

9. NÁSOBENÍ PŘIROZENÝCH ČÍSEL

Příběh osmnáctý:

Maruška je žákyní třetí třídy, ve všech předmětech má úspěch, jen v matematice má problémy. Největší problém pro ni je násobilka. Na dotaz „Kolik je $3 \cdot 4$ “ neodpoví a začne plakat. Vůbec neví, co má s čísly provést, když je má násobit.

Příběh devatenáctý:

Matěj je žákem čtvrté třídy. Dostane úkol, aby znázornil $3 \cdot 4$.

Nakreslí OOO OOOO a řekne: Nevím, jak mám znázornit „to krát“.

Příběh dvacátý:

Mojmír je žákem 5. třídy. Neumí dobře násobilku, tak v pětiminutovkách vždy píše nějaké číslo, které ho napadne, jen aby něco napsal.

9. 1. Násobení v oboru násobílek

Zvládnutí operace násobení a základních spojů násobilky je pro děti dobrým východiskem pro zvládnání dalšího učiva, kterým je dělení, dělení se zbytkem, písemné násobení a dělení, počítání se zlomky i praktické využití v aplikačních úlohách. Děti by měly nejprve pochopit, co je to násobení a teprve potom se snažit postupně zvládat jednotlivé spoje násobilky. Proto nejprve vyvozujeme násobilku dvou, tří, čtyř, pěti, následně další (šesti, sedmi, osmi, devíti). Až děti pochopí princip násobení, teprve potom učíme násobení číslem jedna, číslem 0 a číslem 10, protože na těchto specifických číslech děti princip násobení nemohou pochopit. Pokud se omezíme pouze na pamětné učení, děti neumí poznat, kdy mají násobení použít.

Násobení přirozených čísel je vyvozováno na základě sčítání několik sobě rovných sčítanců. Při vyvozování této operace vycházíme z dramatizace a z konkrétních situací, které jsou dětem blízké.

Např. Maminka dá každému ze svých čtyř dětí dva pomeranče. Kolik pomerančů maminka dá dětem celkem?

Děti:	A	B	C	D
Pomeranče:	oo	oo	oo	oo

$$2 + 2 + 2 + 2 = 8$$
$$4 \cdot 2 = 8$$

(Poznámka: při tomto způsobu vyvozování násobení nelze tohoto příkladu použít pro spoj $2 \cdot 4$ – zde se musí znázornit dvě skupiny po čtyřech prvcích.)

Při vyvozování násobení používáme vše, co děti osloví, např.

- Při vyvozování násobilky čísel 2, 4, 6, 8 využíváme zvířátka, např. 2 nohy má papoušek, 4 nohy má pejsek, 6 noh má včela nebo moucha, 8 noh má pavouk.
- Při pečení vánočního cukroví sledujeme a počítáme, jak jsou na plechu umístěny jednotlivé druhy.
- Využíváme modelování ve čtvercové síti, např. $4 \cdot 6$ modelujeme:

●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●

- Ukážeme dětem „prstovou násobilku“.
- Učíme vyjmenovat násobky čísel vzestupně i sestupně.
- Vyznačujeme násobky čísel ve stovkové tabulce.
- Využíváme deskových her, např. loto, domino, pexeso, bingo.
- Hrajeme hru na „obchod“ a nakupujeme zboží, např. 4 jogurty po 8 Kč, 3 žvýkačky po 6 Kč, 5 lízátek po 4 Kč aj. a počítáme, kolik Kč zaplatíme.
- Využíváme obrázky různého zboží, např. ovoce a zeleninu (8 trsů banánů po 6 kusech, broskve v krabici 5 řad po 6 broskvích, 9 sáčků cibule po 10 kusech apod.), počítáme, kolik kusů je celkem.
- Využíváme oporu součinů sobě rovných činitelů, např. $6 \cdot 6$, $8 \cdot 8$, $4 \cdot 4$ aj.

Násobení přirozených čísel má mnoho vlastností:

Násobení přirozených čísel je komutativní. Činitele můžeme zaměnit, součin se nezmění, např.

$$3 \cdot 4 = 12, \quad 4 \cdot 3 = 12 \quad \text{obecně} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

Komutativnost násobení ilustrujeme na jednom objektu, např. máme bonboniéru, v ní jsou bonbóny uspořádány:

Ve třech řadách s čtyřech sloupcích $3 \cdot 4 = 12$

O	O	O	O
O	O	O	O
O	O	O	O

Nebo ji pootočíme a bonbóny jsou uspořádány ve čtyřech řadách a třech sloupcích $4 \cdot 3 = 12$

O	O	O
O	O	O
O	O	O
O	O	O

Násobení přirozených čísel je asociativní. Činitele můžeme sdružovat, součin se nezmění, např.

$$(4 \cdot 2) \cdot 5 = 4 \cdot (2 \cdot 5) \quad \text{obecně } a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$
$$8 \cdot 5 = 4 \cdot 10 = 40$$

Asociativnosti násobení využíváme pro výhodnější počítání nebo při násobení mimo obor násobílek.

Násobení číslem 1

Násobíme-li přirozené číslo číslem 1, číslo se nezmění, např.

$$6 \cdot 1 = 6, \quad 1 \cdot 6 = 6 \quad \text{obecně } a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Násobení číslem 0

Násobíme-li přirozené číslo číslem 0, součin je roven 0, např.

$$5 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 5 = 0 \quad \text{obecně } a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

9. 2. Násobení mimo obor násobílek z paměti

1. Příklady typu $4 \cdot 30$

Vhodné je využít rozkladu čísla 30 asociativnosti násobení, tj.

$$4 \cdot 30 = 4 \cdot (3 \cdot 10) = (4 \cdot 3) \cdot 10 = 12 \cdot 10 = 120$$

Stačí tedy, abychom vynásobili počet desítek a tento součin vynásobili deseti.

2. Příklady typu $5 \cdot 12$

Využijeme rozkladu čísla 12 na desítku a jednotky a roznásobení závorek:

$$5 \cdot 12 = 5 \cdot (10 + 2) = 5 \cdot 10 + 5 \cdot 2 = 50 + 10 = 60$$

9. 3. Problémy dětí při pamětném násobení

1. Děti vůbec nechápou význam operace násobení přirozených čísel, vůbec neví, co mají s čísly udělat.

2. Děti zaměňují operaci násobení a zápis čísla, např.:

$$4 \cdot 4 = 44, \quad 6 \cdot 5 = 65$$

3. Chybují při vyvození násobení, dominantní je pro ně jeden činitel, např.

$$5 \cdot 7 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5$$

4. Děti stále používají pouze řadu násobků a nejsou schopny naučit se spoje nezávisle na řadě násobků.

5. Dětem některé násobky zaměňují, např.
 $7 \cdot 8 = 54$, $9 \cdot 6 = 56$, $8 \cdot 9 = 80$,
 $7 \cdot 8 = 64$, $7 \cdot 7 = 53$, $5 \cdot 7 = 37$, $8 \cdot 4 = 34$
6. Převažuje dominance některého čísla, např.
 $2 \cdot 9 = 19$, $4 \cdot 4 = 14$, $8 \cdot 8 = 68$
7. Děti zaměňují operace násobení a sčítání, např.
 $50 \cdot 4 = 54$
8. Nerozlišují mezi rozvojem čísla v desítkové soustavě a násobením, např.:
 $13 \cdot 2 = 1 \cdot 10 + 3 \cdot 2 = 16$
 $32 \cdot 3 = 30 + 2 \cdot 3 = 36$

9. 4. Reedukační postupy

1. Neustále se snažíme o to, aby děti pochopily podstatu násobení, aby věděly, co se s čísly při násobení děje. Největší potíže při násobení činí dětem to, že nevědí, co s činiteli udělat, takže většinou napíšou jako součin číslo, které je napadne.
2. Pamětné zvládnutí spojů násobení vždy opíráme o konkrétní představy. Násobilku učíme v malých krocích, ale procvičujeme neustále.
3. Při vyvození vždy začínáme násobilkami čísel 2, 3, 4, atd. Zdánlivě jednoduché případy násobení čísly 1, 0 a 10 nemohou být jako prvotní, protože nedostatečně ilustrují význam násobení.
4. Prvotní je vyvození operace násobení a teprve potom pamětné zvládnutí.
5. Co nejvíce využíváme praktických příkladů, které děti zajímají.
6. Volíme vhodné didaktické hry.

9. 5. Písemné násobení

Příběh dvacátýprvní:

Šarlotka má problémy s písemným násobením. Když se zaměří na správnost spojů násobení, neví, kam co napsat, zaměří-li se na správnost písemného algoritmu, chybí v násobcích.

Zvládnutí algoritmu písemného násobení vyžaduje jednak znalost pamětného násobení, jednak schopnost přesně postupovat a zapisovat čísla do schématu násobení. Písemné násobení vyžaduje zapojení všech typů paměti dítěte. Uvědomme si, co všechno musí dítě zvládnout, když např. násobí písemně

Nejprve z dlouhodobé paměti vyvolá spoj $8 \cdot 7 = 56$. 6 zapíše, 5 uloží do pracovní paměti. Dále násobí $8 \cdot 5 = 40$ – opět využívá dlouhodobou paměť, potom přičte 5, které má uloženo v pracovní paměti, $40 + 5 = 45$, zapíše 5 a násobí dále $8 \cdot 1 = 8$, přičte 4, $8 + 4 = 12$ a zapíše.

To je velký nápor na myšlenkovou činnost dítěte. Zároveň se ale zdokonaluje v koncentraci, protože při provádění tohoto algoritmu se musí plně soustředit na prováděné operace a postupy při zápisu čísel a nemůže myslet na nic jiného. Je však třeba počítat s tím, že pokud má dítě problémy s násobilkou, tak buď se plně soustředí na správnost násobení a chybuje v zápisu v algoritmu, nebo algoritmus zapisuje správně ale chybuje v násobilce. Některé děti nejsou schopny soustředit se současně na obojí.

Nejprve se vyvozuje písemné násobení jednociferným činitelem, a to ve velmi jemné metodické řadě, kdy v každém novém příkladu je vždy jen jeden nový jev. Pokud by bylo možné, ukážeme dětem, jak by se postupovalo při pamětném počítání a jak se výpočet zjednoduší písemným algoritmem.

Př. vynásobte $123 \cdot 3$

Při pamětném postupu bychom násobili od stovek:

$$123 \cdot 3 = (100 + 20 + 3) \cdot 3 = 300 + 60 + 9 = 369$$

Při písemném násobení postupujeme od jednotek:

$\begin{array}{r} 123 \\ \underline{3} \\ 369 \end{array}$	elementární kroky:	$3 \cdot 3 = 9$
		$3 \cdot 2 = 6$
		$3 \cdot 1 = 3$

První příklady jsou voleny tak, aby násobení bylo bez přechodu přes základ a aby děti zvládly postup při zápisu jednotlivých součinů.

Další příklady volíme tak,

a) aby byl nejprve přechod mezi jednotkami a desítkami
$$\begin{array}{r} 125 \\ \underline{3} \end{array}$$

b) aby byl přechod mezi desítkami a stovkami
$$\begin{array}{r} 162 \\ \underline{3} \end{array}$$

c) aby byly přechody mezi všemi řády
$$\begin{array}{r} 265 \\ \underline{3} \end{array}$$

Násobení dvojciferným činitelem se vyvozuje ve dvou fázích, nejprve se násobí násobky čísla 10, např. 123 a potom dvojciferným činitelem, např.

$\begin{array}{r} 123 \\ \underline{30} \end{array}$	$\begin{array}{r} 123 \\ \underline{32} \end{array}$
---	---

Respektuje se analogický postup, jako při násobení jednociferným činitelem.

Příklady typu 123

$$\begin{array}{r} 123 \\ \cdot 30 \\ \hline \end{array}$$

je vhodné ilustrovat takto: $30 = 3 \cdot 10$, nejprve tedy vynásobíme deseti (napíšeme nulu) a potom třemi:

$$\begin{array}{r} 123 \\ \cdot 30 \\ \hline 3690 \end{array}$$

Příklady typu 123

$$\begin{array}{r} 123 \\ \cdot 32 \\ \hline \end{array}$$

řešíme s využitím obou dříve naučených postupů.

$$\begin{array}{r} 123 \\ \cdot 32 \\ \hline 246 \\ 3690 \\ \hline 3936 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{násobíme číslem 2} \\ \text{násobíme číslem 30} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(nulu později nepíšeme, částečný součin} \\ \text{posuneme jedno místo doleva).} \end{array}$$

9. 6. Problémy dětí při písemném násobení

1. Děti přenášejí postup z písemného sčítání, násobí mezi sebou jednotky a desítky, např.:

$$\begin{array}{r} 42 \\ \cdot 23 \\ \hline 86 \end{array}$$

násobí: $3 \cdot 2 = 6$, $2 \cdot 4 = 8$.

2. Zapisují součin do jednoho řádku, např.

$$\begin{array}{r} 42 \\ \cdot 21 \\ \hline 8442 \end{array}$$

násobí $1 \cdot 2 = 2$, $1 \cdot 4 = 4$, $2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 4 = 8$ nebo $1 \cdot 42 = 42$, $2 \cdot 42 = 84$

3. Násobí pouze jedním číslem druhého činitele, násobení nedokončí, např.

$$\begin{array}{r} 42 \\ \cdot 23 \\ \hline 126 \end{array}$$

násobí $3 \cdot 2 = 6$, $3 \cdot 4 = 12$.

4. Neovládají přechody přes základ:

$$45$$

$$\begin{array}{r} \underline{8} \\ 3240 \end{array}$$

počítají $8 \cdot 5 = 40$, $8 \cdot 4 = 32$

5. Mají problémy s čísly s nulami:

$\begin{array}{r} 304 \\ \underline{2} \\ 68 \end{array}$	násobí jako	$\begin{array}{r} 34 \\ \underline{2} \end{array}$	$\begin{array}{r} 564 \\ \underline{205} \end{array}$	násobí jako	$\begin{array}{r} 564 \\ \underline{25} \end{array}$
--	-------------	---	--	-------------	---

6. Nezapisují správně částečné součiny:

$$\begin{array}{r} 257 \\ \underline{35} \\ 1285 \\ \underline{771} \\ 2056 \end{array}$$

7. Přičítají v přechodech vždy druhého činitele, např.:

$$\begin{array}{r} 75 \\ \underline{5} \\ 405 \end{array}$$

počítají $5 \cdot 5 = 25$, $5 \cdot 7 = 35$, $35 + 5 = 40$

8. Vynásobí vzájemně jednotlivá čísla a součiny sečte, např.

$\begin{array}{r} 608 \\ \underline{65} \\ 40 \\ 30 \\ 48 \\ \underline{36} \\ 154 \end{array}$	$5 \cdot 8$
	$5 \cdot 6$
	$6 \cdot 8$
	$6 \cdot 6$

9. Přičítají desítky k prvnímu činiteli, např.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 28 \\ \underline{4} \\ 202 \end{array}$$

počítají: $4 \cdot 8 = 32$, $2 + 3 = 5$, $4 \cdot 5 = 20$

10. Zaměňují algoritmy sčítání a násobení tak, že čísla sčítají, ale postupují podle algoritmu násobení, např.:

$$\begin{array}{r} 48 \\ \underline{39} \end{array}$$

8247

počítají: $9 + 8 = 17$, 7 zapíše pod jednotky, 1 desítku přičtou k dalšímu

$1 + 9 + 4 = 14$, 4 zapíše pod desítky

$1 + 3 + 8 = 12$, 2 zapíše pod stovky

$1 + 3 + 4 = 8$.

9. 7. Reedukační postupy

1. Neustále opakujeme základní spoje násobení.

2. Nápravná opatření pro písemné násobení spočívají ve vypracování vhodných, velmi jemných metodických řad příkladů, zpočátku s menšími čísly.

3. Pokud mají děti problémy s násobilkou, mohou používat tabulky násobků a vyhledávat v nich potřebné spoje. Je však třeba si uvědomit, že používáním tabulky násobků naučí se pouze hledat v tabulce.

4. Je vhodné, aby děti prováděly zkoušky správnosti používáním kalkulačků, pokud umí čísla na displeji přesně zobse děti násobilce nenaučí –
razit.