

Optoelektronika

Garant předmětu:

Doc Ing. Otakar Wilfert, CSc.

Autoři textu:

Doc Ing. Otakar Wilfert, CSc.

Obsah

1	ÚVODNÍ PŘEDNÁŠKA	6
1.1	CHARAKTERISTIKA OPTOELEKTRONIKY	6
1.2	ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI OPTICKÉHO ZÁŘENÍ	11
2	METROLOGICKÉ ASPEKTY OPTOELEKTRONIKY	13
2.1	SVĚTELNÉ VLNY A OPTICKÝ SIGNÁL	13
2.2	RADIOMETRICKÉ A FOTOMETRICKÉ VELIČINY	16
3	INTERFEROMETRIE OPTICKÝCH VLN A OPTICKÉ INTERFEROMETRY	20
3.1	INTERFERENCE A KOHERENCE OPTICKÝCH VLN	20
3.2	OPTICKÉ INTERFEROMETRY	23
4	OPTICKÁ HOLOGRAFIE	28
4.1	HOLOGRAFICKÁ ROVNICE	28
4.2	VÝROBA HOLOGRAMŮ	30
5	OPTICKÁ DIFRAKCE	32
5.1	DIFRAKČNÍ INTEGRÁL A JEHO APROXIMACE	32
5.2	FRAUNHOFFEROVA DIFRAKCE NA KRUHOVÉM OTVORU	38
6	OPTICKÉ REZONÁTORY	42
6.1	MODY OPTICKÉHO REZONÁTORU	42
6.2	PARAMETRY GAUSSOVA SVAZKU	50
7	MATICOVÁ OPTIKA	54
7.1	MATICE TRANSFORMACE PAPRSKU	54
7.2	MATICE TRANSFORMACE SVAZKU	61
7.3	MATICOVÁ OPTIKA REZONÁTORU	63
8	LASERY - I	71
8.1	INTERAKCE ZÁŘENÍ A LÁTKY	71
8.2	BUZENÍ AKTIVNÍ LÁTKY	76
9	LASERY - II	80
9.1	PODMÍNKY LASEROVÉ GENERACE	80
9.2	DRUHY LASERŮ A JEJICH APLIKACE	89
10	POLOVODIČOVÁ OPTOELEKTRONIKA	91
10.1	POLOVODIČOVÝ LASER	91
10.2	FOTODIODY	96
11	OPTICKÁ VLÁKNA	99
11.1	PRINCIP ŠÍŘENÍ SVĚTLA V OPTICKÝCH VLÁKNECH	99
11.2	ÚTLUM A DISPERZE OPTICKÝCH VLÁKEN	101
12	OPTICKÉ BEZKABELOVÉ SPOJE	106
12.1	ATMOSFÉRICKÉ PŘENOSOVÉ PROSTŘEDÍ	106
12.2	SKLADBA A ENERGETICKÁ BILANCE SPOJE	111
13	OPTICKÉ SÍTĚ	117

13.1	OPTICKÝ KOMUNIKAČNÍ SYSTÉM	117
13.2	MODEL OPTICKÉ SÍTĚ	119
13.3	ARCHITEKTURA OPTICKÉ SÍTĚ.....	120

Seznam obrázků

OBRÁZEK 2.1:	ČASOVÉ A PROSTOROVÉ ROZLOŽENÍ VLNY (PŘEDPOKLÁDÁ SE ROVINNÁ UNIFORMNÍ VLNA)	13
OBRÁZEK 2.2:	ČASOVÉ ROZLOŽENÍ VELIČIN E_x , $ \vec{\Pi} $ a I	15
OBRÁZEK 2.3:	ZÁŘENÍ PLOŠNÉHO ZDROJE	17
OBRÁZEK 2.4:	POMĚRNÁ SVĚTELNÁ ÚČINNOST OKA (PRO DENNÍ VIDĚNÍ)	19
OBRÁZEK 3.1:	INTERFERENCE VLN S RŮZNÝM STUPNĚM KOHERENCE (SPLNĚNA JE PODMÍNKA $I_1 = I_2$)	23
OBRÁZEK 3.2:	SCHÉMA FABRYOVA-PEROTOVA INTERFEROMETRU	24
OBRÁZEK 3.3:	FUNKCE TVARU INTERFERENCE PROUŽKŮ FABRYOVA-PEROTOVA INTERFEROMETRU	27
OBRÁZEK 4.1:	INTERFERENCE OPTICKÝCH VLN PŘI OPTICKÉ HOLOGRAFII	28
OBRÁZEK 4.2:	HOLOGRAFICKÉ ZAZNAMENÁNÍ INFORMACE	30
OBRÁZEK 4.3:	REKONSTRUKCE HOLOGRAFICKÉHO ZÁZNAMU	31
OBRÁZEK 4.4:	KONFIGURACE VLN PŘI REKONSTRUKCI HOLOGRAFICKÉHO ZÁZNAMU	32
OBRÁZEK 5.1:	ZNÁZORNĚNÍ HUYGENSOVA-FRESNELOVA PRINCIPU ($R_M, S_M, R_0, S_0 \gg \lambda$)	34
OBRÁZEK 5.2:	DIFRAKCE NA OTVORU V ROVINNÉM STÍNÍTKU	35
OBRÁZEK 5.3:	KRUHOVÝ OTVOR S_0 V JINAK NEPROPUSTNÉM STÍNÍTKU S	39
OBRÁZEK 5.4:	ZNÁZORNĚNÍ DIFRAKCE NA KRUHOVÉM OTVORU ($\sin \varphi \approx \varphi \approx w/S_0$)	39
OBRÁZEK 5.5:	ROZLOŽENÍ OPTICKÉ INTENZITY PŘI FRAUNHOFEROVĚ DIFRAKCI NA KRUHOVÉM OTVORU	41
OBRÁZEK 6.1:	ZNÁZORNĚNÍ OPTICKÉHO REZONÁTORU	43
OBRÁZEK 6.2:	SPEKTRÁLNÍ ROZLOŽENÍ MODŮ PLANPARALELNÍHO OPTICKÉHO REZONÁTORU S PRAVOÚHLÝMI ZRCADLY	46
OBRÁZEK 6.3:	FUNKCE TVARU REZONANČNÍ ČÁRY OPTICKÉHO REZONÁTORU FABRYOVA-PEROTOVA TYPU	47
OBRÁZEK 6.4:	KONFOKÁLNÍ OPTICKÝ REZONÁTOR	47
OBRÁZEK 6.5:	PLOŠNÉ ROZLOŽENÍ INTENZITY ELEKTRICKÉHO POLE NA ZRCADLECH S PRAVOÚHLOU A KRUHOVOU SYMETRIÍ (ŠÍPKY REPREZENTUJÍ VEKTOR INTENZITY ELEKTRICKÉHO POLE)	48
OBRÁZEK 6.6:	JEDNOROZMĚRNÉ GAUSSOVO ROZLOŽENÍ	49
OBRÁZEK 6.7:	SPEKTRÁLNÍ ROZLOŽENÍ MODŮ V KONFOKÁLNÍM REZONÁTORU S PRAVOÚHLÝMI ZRCADLY	49
OBRÁZEK 6.8:	GRAF PODMÍNKY STABILITY OPTICKÉHO REZONÁTORU; $y = \left(1 - \frac{d}{R_2}\right)$ A $x = \left(1 - \frac{d}{R_1}\right)$	50
OBRÁZEK 6.9:	KRAJ GAUSSOVA SVAZKU	51
OBRÁZEK 6.10:	ZÁVISLOST POLOMĚRU KŘIVOSTI GAUSSOVA SVAZKU NA z	52
OBRÁZEK 7.1:	TRANSFORMACE PAPRSKU OBECNOU OPTICKOU SOUSTAVOU	54
OBRÁZEK 7.2:	PRŮCHOD PAPRSKU MEZI DVĚMA VZTAŽNÝMI ROVINAMI	55
OBRÁZEK 7.3:	LOM PAPRSKU NA PLOŠE	57
OBRÁZEK 7.4:	ODRAZ PAPRSKU OD ZRCADLA	58
OBRÁZEK 7.5:	POSTUPNÝ PRŮCHOD PAPRSKU LÁMAVÝMI PLOCHAMI A VRSTVAMI PROSTŘEDÍ MEZI NIMI	59
OBRÁZEK 7.6:	TENKÁ ČOČKA	59
OBRÁZEK 7.7:	TENKÁ ČOČKA	60

OBRÁZEK 7.8:	TRANSFORMACE SVAZKU PAPRSKŮ OPTICKOU SOUSTAVOU.....	61
OBRÁZEK 7.9:	SCHÉMA OPTICKÉHO REZONÁTORU PRO JEHO MATICOVÉ VYJÁDRĚNÍ.....	64
OBRÁZEK 8.1:	ENERGETICKÉ HLADINY ČÁSTIC A PŘECHODY MEZI NIMI	74
OBRÁZEK 8.2:	PŮSOBNÍ MONOCHROMATICKÉ OPTICKÉ VLNY NA DVOUHLADINOVÝ SYSTÉM. 77	
OBRÁZEK 8.3:	ENERGETICKÉ HLADINY A PŘECHODY ČÁSTIC V TŘÍHLADINOVÉM SYSTÉMU.	79
OBRÁZEK 9.1:	MODEL ŠÍŘENÍ OPTICKÉHO ZÁŘENÍ V LASERU.....	84
OBRÁZEK 9.2:	ZNÁZORNĚNÍ FUNKCÍ $\Delta N_I = \Delta N_I(W_B)$ A $N_F = N_F(W_B)$	88
OBRÁZEK 10.1:	ENERGETICKÉ SPEKTRUM AKTIVNÍ LÁTKY POLOVODIČOVÉHO LASERU	91
OBRÁZEK 10.2:	BUZENÍ LASEROVÉ DIODY (P_{LD} JE OPTICKÝ VÝKON LASEROVÉ DIODY)	93
OBRÁZEK 10.3:	VÝKONOVÁ CHARAKTERISTIKA POLOVODIČOVÉHO LASERU.....	95
OBRÁZEK 10.4:	ZNÁZORNĚNÍ ENERGETICKÝCH HLADIN P-N PŘECHODU FOTODIODY A VZNIKU MINORITNÍCH NOSITELŮ NÁBOJE	96
OBRÁZEK 10.5:	V-A CHARAKTERISTIKA FOTODIODY	97
OBRÁZEK 10.6:	ZNÁZORNĚNÍ ENERGETICKÝCH HLADIN P-N PŘECHODU FOTODIODY PIN S PŘILOŽENÝM NAPĚTÍM U ; ($U = 10$ V)	97
OBRÁZEK 11.1:	ŠÍŘENÍ SVĚTLA V OPTICKÉM VLÁKNU TYPU SI.....	99
OBRÁZEK 11.2:	SPEKTRÁLNÍ ZÁVISLOST KOEFICIENTU ÚTLUMU A KOEFICIENTU MATERIÁLOVÉ DISPERZE	101
OBRÁZEK 11.3:	K DEFINICI KOEFICIENTU ÚTLUMU	102
OBRÁZEK 11.4:	ZÁVISLOST MAXIMÁLNÍ DÉLKY VYBRANÝCH TYPŮ VLÁKEN NA PŘENOSOVÉ RYCHLOSTI PŘI PROVOZU OPTICKÉ TRASY POUZE S ÚTLUMOVÝM OMEZENÍM	103
OBRÁZEK 11.5:	ZÁVISLOST MAXIMÁLNÍ DÉLKY VYBRANÝCH TYPŮ VLÁKEN NA PŘENOSOVÉ RYCHLOSTI PŘI PROVOZU OPTICKÉ TRASY POUZE S DISPERZNÍM OMEZENÍM	105
OBRÁZEK 11.6:	ZÁVISLOST MAXIMÁLNÍ DÉLKY VYBRANÝCH TYPŮ VLÁKEN NA PŘENOSOVÉ RYCHLOSTI PŘI PROVOZU OPTICKÉ TRASY JAK S DISPERZNÍM, TAK S ÚTLUMOVÝM OMEZENÍM POUZE S DISPERZNÍM OMEZENÍM	105
OBRÁZEK 12.1:	SPEKTRÁLNÍ ZÁVISLOST PROPUSTNOSTI „ČISTÉ“ A „KLIDNÉ“ ATMOSFÉRY.	106
OBRÁZEK 12.2:	ATMOSFÉRICKÉ VRSTVY SE ZNÁZORNĚNÍM ZEMSKÉHO POVRCHU A OBLASTÍ PRÁCE OBS	107
OBRÁZEK 12.3:	PARAMETRY ÚNIKŮ	110
OBRÁZEK 12.4:	ZÁVISLOST RELATIVNÍ DISPERZE OPTICKÉ INTENZITY NA PARAMETRU β_0 .	111
OBRÁZEK 12.5:	PŘÍKLAD ZAŘAZENÍ OBS DO KOMUNIKAČNÍ SÍTĚ	112
OBRÁZEK 12.6:	MÍSTA ÚTLUMU A ZESÍLENÍ V ENERGETICKÉ BILANCI OBS.....	113
OBRÁZEK 12.7:	ZNÁZORNĚNÍ VÝZNAMU VELIČINY L_0 (POMOCNÉ DÉLKY).....	114
OBRÁZEK 13.1:	ZÁKLADNÍ PŘEDSTAVA OPTICKÉHO KOMUNIKAČNÍHO SYSTÉMU	117
OBRÁZEK 13.2:	BLOKOVÉ SCHÉMA OPTICKÉHO KOMUNIKAČNÍHO SYSTÉMU	117
OBRÁZEK 13.3:	PŘÍKLAD FYZICKÉHO PROPOJENÍ KOMUNIKAČNÍCH BODŮ V RÁMCI SÍTĚ.....	119

Seznam tabulek

TABULKA 3.1:	TABULKA VYBRANÝCH HODNOT R A F	26
TABULKA 6.1:	ZNAČENÍ INDEXŮ MODU.	43
TABULKA 11.1:	TABULKA TYPICKÝCH HODNOT NA JEDNOTLIVÝCH DRUHŮ VLÁKEN	100
TABULKA 12.1:	TABULKA STAVŮ APP	109
TABULKA 12.2:	TABULKA STAVŮ APP PODLE MÍRY TURBULENCE	111
TABULKA 12.3:	DĚLENÍ OBS PODLE DOSAHU.....	112
TABULKA 12.4:	DĚLENÍ OBS PODLE PŘENOSOVÉ RYCHLOSTI.....	112
TABULKA 13.1:	DĚLENÍ SÍTÍ PODLE ROZLEHLOSTI:	119
TABULKA 13.2:	PŘEHLED VRSTEV A JEJICH FUNKCÍ V OSIRM MODELU SÍTĚ.....	120

Úvod

Optoelektronika je zařazena jako volitelný předmět do 3. ročníku bakalářského studia oboru EST. Ke zvládnutí problémů optoelektroniky je nutná znalost předmětů fyziky a matematiky probíraných v předcházejících ročnících studia. Konkrétně se jedná o základy *geometrické optiky* (zobrazovací rovnice, zákon odrazu a lomu, totální odraz, zobrazování tenkou čočkou), *vlnové optiky* (vlnová rovnice, Fresnelovy vzorce, polarizace světla), *kvantové mechaniky* (Schrödingerova rovnice, vlnová funkce, Heisenbergovy relace neurčitosti) a *interakce záření a látky* (záření černého tělesa, spontánní emise, stimulovaná emise, absorpce, obsazení energetických hladin). Z oblasti *matematiky* je vyžadována znalost komplexních čísel, vektorového počtu, diferenciálního počtu a integrálního počtu.

Cílem předmětu je objasnit fyzikální jevy a teorie, z nichž vyplývá funkce prvků, zařízení a systémů používaných v optických komunikacích. Objasněny budou metrologické aspekty optoelektroniky, vlnové a kvantové projevy světla. Podrobně bude rozebrána funkce optických rezonátorů, princip činnosti laseru, šíření světla v optických vláknech a ve volném prostoru. Pojednáno bude o optovláknových spojích, optických bezkabelových spojích a optických sítích.

Optoelektronika našla uplatnění v telekomunikačních, zobrazovacích, měřicích, řídicích a výpočetních systémech. Řadu aplikací lze nalézt v lékařství, strojírenství, geodézii, stavebnictví a vojenství. Použití optoelektronických prvků a systémů (elektroluminiscenčních diod, laserových diod, fotodiod, optických vláken, vláknových zesilovačů, chirurgických nástrojů, vláknových gyroskopů, dálkoměrů, lidarů atd.) podstatně zkvalitňuje základní parametry původních systémů. Dnes se optoelektronika dotýká každodenního života a v budoucnu se očekává její další široký rozvoj.

Předmět „*optoelektronika*“ je dobrým základem pro řadu dalších předmětů zařazených do magisterského studijního programu oboru EST. Nabídnout lze např. „*kvantovou a laserovou elektroniku*“, „*fotoniku a optické komunikace*“ a další.

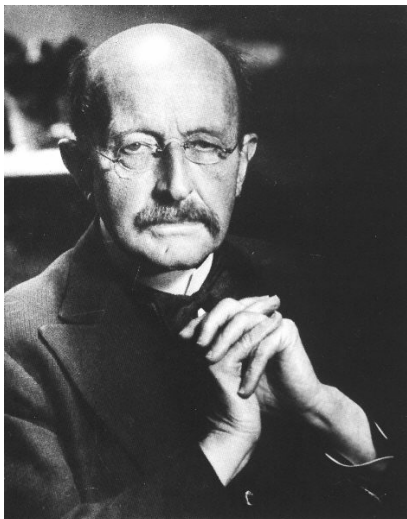
1 Úvodní přednáška

1.1 Charakteristika optoelektroniky

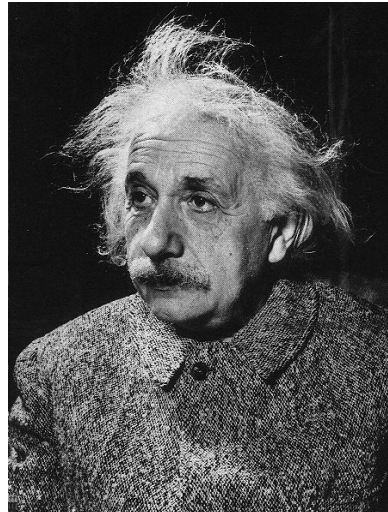
Optoelektronika je technický obor, který se zabývá aplikacemi jevů plynoucích z interakce optického záření a látky. Základními technickými prostředky optoelektroniky jsou elektroluminiscenční diody, laserové diody, fotodiody, optická vlákna, displeje z kapalných krystalů a pod.

a) Vývoj oboru optoelektroniky

Jev interakce optického záření a látky je kvantové povahy a k jeho objasnění je potřebná kvantová teorie. Vznik *kvantové teorie* je spojený s objevem energetických kvant elektromagnetických vln (Planck, 1901) a světelných částic – fotonů – (Einstein, 1905).



Max Planck
(Nobelova cena 1918)



Albert Einstein
(Nobelova cena 1921)

Pro energii fotonu ε a hybnost fotonu \vec{p} platí

$$\varepsilon = h\nu = \hbar\omega; |\vec{p}| = \frac{h}{\lambda}; \vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad (1.1)$$

kde h – Planckova konstanta ($h = 6,623 \times 10^{-34}$ J.s)
 \hbar – redukovaná Planckova konstanta ($\hbar = 1,05 \times 10^{-34}$ J.s)
 ν – frekvence světelné vlny
 ω – úhlová frekvence světelné vlny
 λ – délka vlny
 \vec{k} – vlnový vektor

Rovinnou optickou vlnu pro intenzitu pole \vec{E} lze vyjádřit vztahem

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{A} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) \quad (1.2)$$

kde $(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$ představuje fázi vlny, \vec{r} je polohový vektor, t je čas, \vec{A} je vektor amplitudy a δ je konstantní fázový člen. Veličiny \vec{k} a ω ze vztahu (1.2) lze použít pro vyjádření ε a \vec{p} podle vztahu (1.1).

Kvantová teorie objasňuje nejen částicový charakter vln elektromagnetického pole, ale i vlnový charakter látkových částic (Louis de Broglie, 1924). Částici s energií E a hybností \vec{p} lze přisoudit skalární vlnu (vlnovou funkci)

$$\hat{\Psi}(\vec{r}, t) = A e^{\frac{j}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} \quad (1.3)$$

s frekvencí $\nu = \frac{E}{h}$, resp. $\omega = \frac{E}{\hbar}$, vlnovou délkou $\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|}$ a vlnovým vektorem $\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$.



Luis de Broglie
(Nobelova cena 1929)



Max Born
(Nobelova cena 1949)

Vlny přiřazené látkovým částicím mají statistický význam (Born, 1926), který lze vysvětlit následujícím způsobem: Vlnová funkce se vyjádří součinem dvou funkcí (separace proměnných)

$$\hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \hat{\psi}(\vec{r}) \hat{f}(t). \quad (1.4)$$

Pro vlnovou funkci závislou jen na souřadnicích prostoru platí

$$|\hat{\psi}(\vec{r})|^2 dV = dW(\vec{r}); \quad (1.5)$$

dW vyjadřuje pravděpodobnost výskytu částice v elementárním objemu dV , jehož poloha v prostoru je určena polohovým vektorem \vec{r} .

Vznik oboru kvantové elektroniky je spojený s konstrukcí prvního kvantového generátoru. *Kvantová elektronika* je obor vědy a techniky, zabývající se metodami zesilování a generace elektromagnetických vln na základě stimulované emise. Základními technickými prostředky kvantové elektroniky jsou lasery a masery.

MASER (Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation)

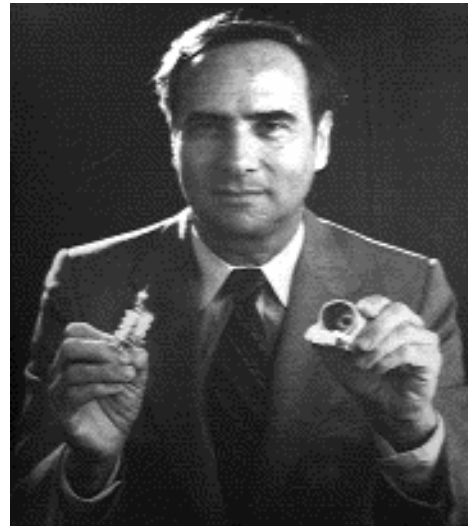
Konstruktéry prvního maseru (čpavkového, NH_3) jsou A. Prochorov, N. Basov a Charles H. Townes (1954).

Vznik *optoelektroniky* (1960) je spojený s konstrukcí prvního laseru (rubínového). Konstruktér tohoto laseru je Charles H. Townes.

LASER (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation)



Charles H. Townes
(Nobelova cena udělena společně
s Prochorovem a Basovem v roce 1964)



Theodor Harold Maiman
konstruktér prvního laseru (1960)

Vznik *optických komunikací* (1970) je spojený se zvládnutím výroby elektroluminiscenčních diod, laserových diod, fotodiod a optických vláken s přijatelnou hodnotou koeficientu útlumu ($\alpha < 20 \text{ dB/km}$; 1970).



V oboru optických vláken jsou významné práce C. K. Kaa a George Hockhama z roku 1966, ve kterých byla prokázána možnost zhotovení optických vláken vhodných pro optické komunikace.

Charles Kao při práci ve své laboratoři
ve městě Harlow, Anglie, 1966

Hlavními aplikacemi optoelektroniky jsou:

- optické komunikace (světlovodné, bezkabelové, kosmické),
- optická výpočetní technika (optická a holografická propojení a spínání),
- měřicí a řídicí technika (vysoce citlivé optické senzory),
- zobrazovací technika (displeje pro zobrazování stavů a procesů).

b) Náplň předmětu optoelektroniky

1 *Úvodní přednáška.* Historické aspekty optoelektroniky. Charakteristika optoelektroniky. Základní vlastnosti laserového záření. Přehled nejvýznamnějších aplikací optoelektroniky. Výhody optické komunikace.

2 *Metrologické aspekty optoelektroniky.* Optická intenzita a vektor intenzity elektrického pole. Radiometrické a fotometrické veličiny. Základní vlastnosti lidského oka. Bezpečná práce z hlediska zdraví očí a pokožky v optoelektronické laboratoři.

3 *Interference optických vln a interferometry.* Interference a koherence optických vln. Fabryův-Perotův interferometr a optická spektrální analýza. Sagnacův interferometr a optoelektronický gyroskop.

4 *Holografie a interferometrie optických vln.* Interference optických vln při holografii. Holografická rovnice. Holografický záznam informace. Konstrukce a rekonstrukce hologramu.

5 *Optická difrakce.* Skalární teorie difrakce. Difrakční integrál a jeho aproximace. Fraunhoferova difrakce na kruhovém otvoru. Souvislost Fraunhoferovy difrakce a Fourierovy transformace. Optické procesory.

6 *Optické rezonátory.* Aplikace Fabryova - Perotova interferometru v optickém rezonátoru. Druhy optických rezonátorů. Stabilita optických rezonátorů. Charakteristika módů (podélných, příčných). Parametry Gaussova svazku. Maticová optika.

7 *Lasery - I.* Rozdělovací funkce. Interakce optického záření a látky. Planckův zákon záření. Přechody mezi kvazistacionárními stavy. Funkce tvaru spektrální čáry Buzení aktivní látky.

8 *Lasery - II.* Podmínky laserové generace. Kinetické rovnice. Tříhladinový a čtyřhladinový systém. Rychlost buzení a výkon laseru. Ztráty v laseru. Šířka rezonanční čáry. Druhy laserů a jejich aplikace.

9 *Polovodičová optoelektronika.* Elektroluminiscenční diody, laserové diody. Fotodiody PIN a lavinové fotodiody. Princip činnosti, konstrukce, parametry. Elektronické obvody optických vysílačů a přijímačů.

10 *Optická vlákna.* Princip šíření světla v optických vláknech. Druhy optických vláken a jejich základní parametry. Příčiny útlumu a disperze optických vláken. Technologie výroby optických vláken.

11 *Optické komunikační systémy.* Druhy optických komunikačních systémů a optický signál. Modulace, kódování. Šumy v optických spojkách. Energetická bilance optického spoje.

12 *Optické bezkabelové spoje.* Atmosférické přenosové prostředí, útlum, turbulence, přerušování svazku. Skladba optického bezkabelového spoje, energetická bilance spoje, charakteristika, použití.

13 *Optické sítě.* Prvky optické sítě. Architektura optických sítí. Kosmické projekty. Podmořské kabely. Spolupráce optických a družicových spojů. Městské a místní sítě s využitím optických bezkabelových spojů. Internet.

c) Zásadní výhody a problémy optoelektronických systémů:*Výhody:*

- galvanické oddělení elektronických bloků
- odolnost proti vnějšímu elektromagnetickému rušení
- vysoká výkonová dynamika systému
- vysoká přenosová rychlost komunikačních systémů
- vysoká citlivost senzorů
- vysoká přesnost naváděcích systémů
- aplikace optických vláken (malý útlum, odolnost proti chemickým vlivům)
- aplikace optických bezkabelových spojů (absence legislativních překážek)

Problémy:

- potřeba určité opatrnosti při práci s optickým vláknem a laserem
- relativně vysoká cena optovláknových konektorů
- oproti radiovým spojům větší závislost kvality přenosu na stavu počasí

1.2 Základní vlastnosti optického záření**a) Některé veličiny popisující optické záření***Rozsah optické oblasti spektra záření:*

ν [Hz]	10^{17}	10^{16}	10^{15}	10^{14}	10^{13}	10^{12}	10^{11}
	rent. zář.		optická oblast spektra				radiová obl.
λ [m]	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}
			přechody vnějších elektronů v atomu		kmitý molekul	rotace molekul	

V optice se volí znaménko fáze v časovém fázovém členu se znaménkem minus: $-\omega t$.
Přímá postupná vlna se pak vyjádří takto:

$$\vec{E} = \vec{A} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) \quad (1.6)$$

nebo v komplexním tvaru

$$\hat{\vec{E}} = \vec{A} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)} \quad (1.7)$$

a platí následující vztahy:

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$\vec{k} = k_x \cdot \vec{x}^o + k_y \cdot \vec{y}^o + k_z \cdot \vec{z}^o$$

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}; k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y}; k_z = \frac{2\pi}{\lambda_z}$$

$$\vec{r} = x \cdot \vec{x}^o + y \cdot \vec{y}^o + z \cdot \vec{z}^o$$

$$c_0 = \lambda\nu; \quad \lambda = \frac{c_0}{\nu};$$

$$d\lambda = -\frac{c_0}{\nu^2} d\nu; \quad |\Delta\lambda| = \frac{c_0}{\nu^2} |\Delta\nu|;$$

$$(c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s})$$

Vlna daná vtahem (1.6) nebo (1.7) není modulovaná žádným signálem. Frekvence nosné optické vlny se značí ν . V případě modulace optické vlny nějakým signálem je nutno zvažovat frekvence tvořící spektrum tohoto signálu s označením f .

\vec{E} je intenzita elektrického pole. Optická intenzita se značí I a platí

$$I = \langle \vec{\Pi} \rangle \quad (1.8)$$

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}$$

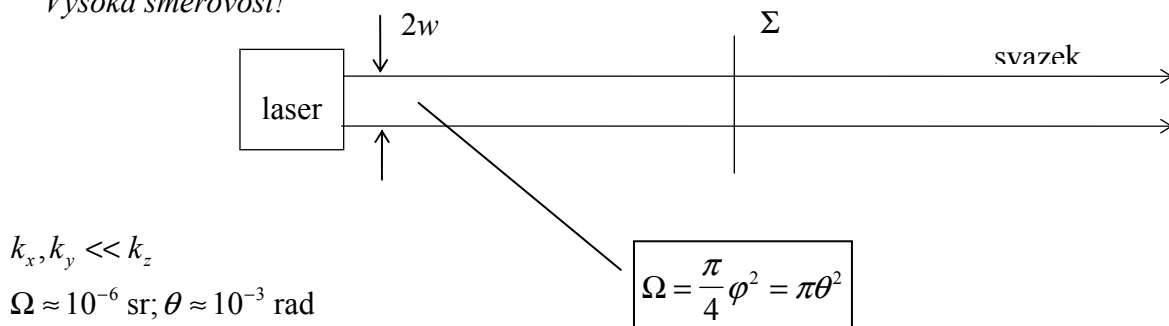
kde $\vec{\Pi}$ je Poyntingův vektor a \vec{H} je intenzita magnetického pole. Lze odvodit, že

$$I = \frac{1}{2} c_0 \epsilon_0 n |\vec{E}|^2 = \frac{1}{2} c_0 \epsilon_0 n A^2 = \frac{1}{2} \frac{A^2}{Z_0} n; \quad (Z_0 = 377 \Omega), \quad (1.9)$$

kde c_0 je rychlost světla ve vakuu, ϵ_0 je absolutní permitivita vakua, n je absolutní index lomu prostředí a Z_0 je impedance vakua.

b) Základní vlastnosti laserového záření

Vysoká směrovost!



Vysoká zář (L)!

$$L = \frac{d\Phi}{dS d\Omega} \approx \frac{\Phi}{\pi w^2 \Omega} \approx \frac{10^{-2}}{\pi (10^{-3})^2 10^{-6}} \approx 10^9 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1},$$

kde L – zář, Φ – optický výkon, w – pološířka svazku, φ – plošná úhlová šířka svazku, Ω – prostorová úhlová šířka svazku, θ – divergence svazku.

Vysoký stupeň monochromaticnosti!

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} < 10^{-3}$$

Všechny uvedené vlastnosti mají základ ve vysoké časové a prostorové koherenci laserového záření.

c) Porovnání optických a radiových (nebo metalických) komunikačních systémů

Vysoká frekvence a vysoká koherence optické nosné vlny mají za důsledek:

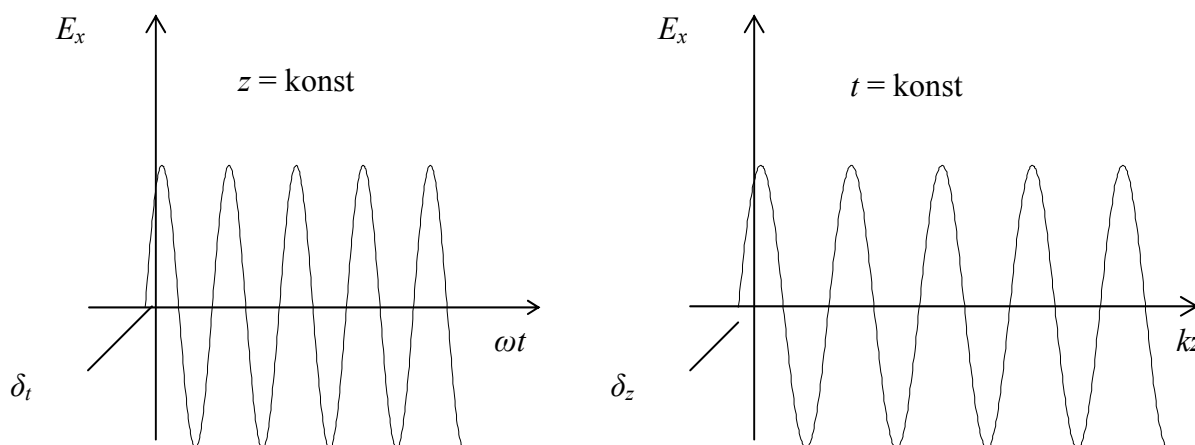
- zvětšení dosahu světlovodného spoje
- zvýšení informační kapacity optického spoje (vysoká přenosová rychlost)
- zvýšení spolehlivosti (vysoká výkonová a spektrální systémová rezerva)

2 Metrologické aspekty optoelektroniky

2.1 Světelné vlny a optický signál

a) Základní představy

Světlo je ve své podstatě elektromagnetické vlnění; částice (fotony) jsou světlu přiřazeny, aby bylo možno objasnit kvantové jevy světla. Pro představu vlnových procesů, které při šíření světelné vlny nastávají, by bylo potřebné použít animaci. Při tištěném textu je nutno se omezit vždy jen na některou dílčí závislost (viz Obr. 2.1).



Obrázek 2.1: Časové a prostorové rozložení vlny (předpokládá se rovinná uniformní vlna)

Šíří-li se optická vlna ve směru z , je $E_z = 0$ a souřadnice E_x a E_y je možno vyjádřit některým z následujících způsobů:

$$\begin{aligned} E_{x,y} &= A_{x,y} \sin(kz - \omega t + \delta) \\ E_{x,y} &= \operatorname{Re}\{\dot{E}_{x,y}\} \quad \dot{E}_{x,y} = A_{x,y} \exp[-j(kz - \omega t + \delta)] \end{aligned} \quad (2.1)$$

kde $E_{x,y}$ jsou x -ová nebo y -ová souřadnice vektoru intenzity elektrického pole $\vec{E}(\vec{r}, t)$, resp. komplexního vektoru intenzity elektrického pole $\hat{\vec{E}}(\vec{r}, t)$ a δ je konstantní fázový člen ($\delta = \delta_i + \delta_z$).

Je třeba pečlivě rozlišovat veličiny komplexní, reálné, vektorové a skalární:

$\hat{\vec{E}}$ - komplexní vektor intenzity elektrického pole

\vec{E} - vektor intenzity elektrického pole (reálná veličina)

\vec{E}_x, \vec{E}_y - složky vektoru intenzity elektrického pole (vektorové reálné veličiny)

E_x, E_y - souřadnice vektoru intenzity elektrického pole (skalární reálné veličiny)

Veličiny $\vec{E}, \vec{E}_x, \vec{E}_y, E_x, E_y$ mohou být obecně vyjádřeny v komplexním tvaru.

Míra polarizace optické vlny může být vyjádřena poměrem absolutních hodnot souřadnic $\frac{|E_x|}{|E_y|}$, resp. $\frac{|E_y|}{|E_x|}$ a *míra monochromatickosti* jedním z následujících vztahů:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}.$$

Při popisování optické vlny a její modlace se rozlišují zejména dvě veličiny: intenzita elektrického pole (stručně intenzita pole) a optická intenzita. Intenzita pole $\hat{\vec{E}}$ je veličinou vektorovou, obecně komplexní, silového charakteru a s optickými periodickými změnami řádu 10^{14} Hz. Optická intenzita I je veličinou skalární, vždy reálnou, energetického charakteru a časově středovanou vůči optickým změnám.

b) Intenzita záření

Pro vyjádření plošné hustoty výkonu optických vln se zavádí časově středovaná veličina vzhledem k vysokým optickým frekvencím – optická intenzita

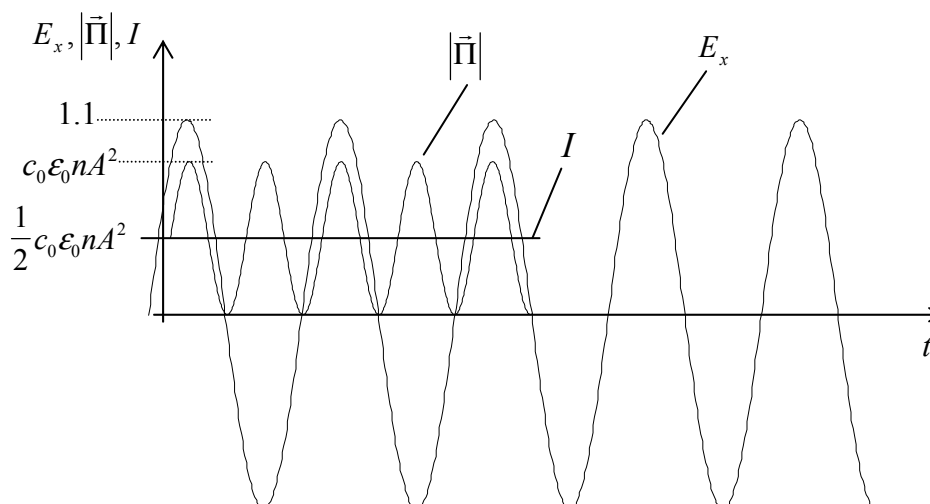
$$I = \left\langle |\vec{\Pi}| \right\rangle_{čas} = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{\Pi}| dt; [I] = \text{W.m}^{-2}, \quad (2.2)$$

kde $\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}$ je Poyntingův vektor. Předpokládá se ideální rovinná vlna (mohochromatická, uniformní, lineárně polarizovaná) a ideální prostředí (homogenní izotropní dielektrikum). Po dosazení ($\vec{E} \parallel \vec{H}; \sqrt{\epsilon} |\vec{E}| = \sqrt{\mu} |\vec{H}|; \mu_r = 1$) je:

$$\begin{aligned} I = \langle \vec{\Pi} \rangle &= \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0}} \langle |\vec{E}|^2 \rangle = \frac{1}{T} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0}} \int_0^T A^2 \sin^2(kz - \omega t + \varphi) dt = \\ &= \frac{1}{2} A^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0}} = \frac{1}{2} c_0 \epsilon_0 n A^2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

kde ϵ_r - relativní permitivita, μ_r - relativní permeabilita, n - absolutní index lomu prostředí;

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad \text{a} \quad n = \sqrt{\epsilon_r}.$$



Obrázek 2.2: Časové rozložení veličin E_x , $|\vec{P}|$ a I

Uváží-li se nekonstantní plošné rozložení optické intenzity v určité ploše kolmé na směr šíření a připustí-li se navíc intenzitní modulaci vlny, je intenzita záření v obecném případě funkcí plochy a času

$$I = I(x, y, t); z = konst \quad (2.4)$$

c) Modulace světelné vlny

Rozlišuje se modulace intenzity pole (*koherentní modulace*) a modulace optické intenzity (*nekoherentní/intenzitní modulace*, IM). Při modulaci intenzity pole lze rozlišit modulaci *amplitudy* (AM), *frekvence* (FM) nebo *fáze* (FáM). Veličiny, které se při jednotlivých způsobech modulují, jsou vyznačeny na vlnové rovnici

$$E_{x,y} = A_{x,y} \sin[kz - \omega t + \varphi(t)] \quad (2.5)$$

\swarrow FM \searrow FáM

Integrací optické intenzity po ploše S kolmé na směr šíření se získá časově závislý *optický výkon*

$$\phi(t) = \int_S I(x, y, t) dS \quad (2.6)$$

Časová závislost je zde uvažována vzhledem k modulačním změnám optické intenzity, nikoli vzhledem k vysoké frekvenci optické nosné vlny.

Při vyjádření plošně středované optické intenzity se použije výraz

$$\bar{I}(t) = \frac{\phi(t)}{S} \quad (2.7)$$

Pro časově středovanou optickou intenzitu (středovanou vzhledem k modulačním změnám po nějakou charakteristickou dobu T) platí

$$\langle \bar{I}(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_T I(x, y, t) dt = \text{konst} \quad (2.8)$$

2.2 Radiometrické a fotometrické veličiny

a) Radiometrické veličiny

Zářivou energii W příslušející časovému intervalu T lze vypočítat pomocí optického výkonu (nazývaného také zářivým tokem) integrací

$$W = \int_T \phi(t) dt; [W] = \text{J}. \quad (2.9)$$

Zářivá energie se může vztáhnout k jednotce objemu a definuje se *objemová hustota zářivé energie* w vztahem

$$w = \frac{dW}{dV}; [w] = \text{J} \cdot \text{m}^{-3}. \quad (2.10)$$

Zářivou energii příslušející objemu V lze pak vyjádřit integrací

$$W = \int_V w dV. \quad (2.11)$$

Pro vyjádření spektrálních vlastností záření je užitečné definovat zářivou energii vztaženou na jednotkový interval vlnových délek s názvem „*spektrální zářivá energie*“ výrazem

$$W_\lambda = \frac{dW}{d\lambda}; [W_\lambda] = \text{J} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (2.12)$$

Všechny radiometrické i fotometrické veličiny, které budou vztaženy na jednotkový interval vlnových délek, se budou nazývat „*spektrální*“ a u označení veličiny se přidá index λ (případně ν nebo ω). Pomocí spektrální zářivé energie lze zářivou energii připadající na interval vlnových délek (λ_1, λ_2) vyjádřit integrálem

$$W = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} W_\lambda(\lambda) d\lambda. \quad (2.13)$$

Zářivý tok vztažený na jednotku plochy, z níž je vyzařovaný, se nazývá *intenzitou vyzařování* s označením M . Zářivý tok vztažený na jednotku plochy, která je ozařována (záření na ni dopadá), se nazývá *ozářením* s označením E . Matematickým vyjádřením je

$$M \text{ nebo } E_i = \frac{d\phi}{dS}; [M \text{ nebo } E_i] = \text{W.m}^{-2}, \quad (2.14)$$

kde dS je element plochy. Index i je připojen, aby se vyloučila záměna veličiny ozáření E_i s energií E .

Prostorový úhel, v němž se zářivá energie šíří, není u veličin M a E_i stanoven. Bude-li zdrojem záření výstupní apertura laseru, bude se záření šířit v malém prostorovém úhlu s hodnotu např. 1 mrad. Pro zářivou difúzní plochu nebo oblohu se bude prostorový úhel blížit hodnotě 2π . Veličiny M a E_i ohodnocují energeticky plošné zdroje nebo ozařované plochy. K ohodnocení bodového zdroje je vhodné definovat další veličinu *zářivost* I_i vztahem

$$I_i = \frac{d\phi}{d\Omega}; [I_i] = \text{W.sr}^{-1}, \quad (2.15)$$

kde $d\Omega$ je element prostorového úhlu, obsahující odpovídající elementární část zářivého toku $d\phi$. Index i je připojen, aby se vyloučila záměna veličiny zářivosti I_i s optickou intenzitou I . Ve vyjádření zářivosti je zářivý tok vztažen k jednotce prostorového úhlu. Ve vyjádření optické intenzity je zářivý tok vztažen k jednotce plochy, postavené kolmo na směr šíření.

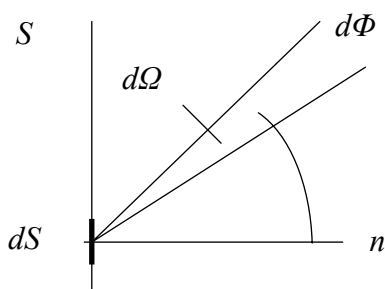
Poslední radiometrickou veličinou, která je nutno se věnovat, je zář L . *Zář* je zářivý tok vztažený k jednotce zdánlivé plochy a jednotce prostorového úhlu. Element zdánlivé plochy dS_{\perp} je průmět elementu skutečné plochy dS do roviny kolmé k vyšetřovanému směru záření a platí

$$dS_{\perp} = dS \cos \theta, \quad (2.16)$$

kde θ je úhel mezi normálou skutečné plochy dS a směrem pozorování této plochy. Situace je znázorněna na obrázku a matematické vyjádření definice je

$$L = \frac{d^2\Phi}{dS d\Omega \cos \theta}; [L] = \text{W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}. \quad (2.17)$$

Plocha S může být plochou, která záření emituje nebo rozptyluje (je-li sama už nějakým jiným optickým zdrojem ozařována). *Zář* je lokální veličinou.



Obrázek 2.3: Záření plošného zdroje

Je-li plocha S dostatečně malá vzhledem ke vzdálenosti přijímače od této plochy, lze zář L vyjádřit pomocí zářivosti I_i vztahem

$$L \approx \frac{I_i}{S \cos \theta} \quad (2.18)$$

Obě veličiny L i I_i jsou obecně závislé na úhlu θ . Jedná-li se však o Lambertovu plochu, definovanou konstantní září ve všech směrech θ , lze pro zářivost v tomto případě odvodit výraz

$$I_i(\theta) = I_i(0) \cos \theta \quad (2.19)$$

Ve speciálním případě izotropních bodových zdrojů platí (podle jejich definice) $I_i(\theta) = \text{konst.}$ Mezi září L a intenzitou vyzařování M Lambertovy plochy lze odvodit vztah

$$M = \pi L, \quad (2.20)$$

z kterého plyne, že celkový zářivý tok, emitovaný Lambertovou plochou jednotkové velikosti do poloprostoru, je roven πL (nikoli $2\pi L$, jak by se mohlo na první pohled zdát).

b) Fotometrické veličiny

Ve *fotometrii* je zářivý tok ohodnocen podle toho, jaký je schopen vyvolat zrakový vjem. Takto ohodnocený zářivý tok se nazývá *světelným tokem* (s jednotkou lumen). Ostatní geometrické souvislosti a parametry zůstávají při definování fotometrických veličin stejné jako v radiometrii a každé radiometrické veličině odpovídá veličina fotometrická. Přechod k fotometrickým veličinám se v jejich názvu projeví označením „světelný“ a v označení veličiny se přidá index „v“.

K objasnění přechodu radiometrických veličin k fotometrickým se definuje *světelná účinnost zářivého toku* $K_v(\lambda)$

$$K_v(\lambda) = \frac{d\phi_v(\lambda)}{d\phi(\lambda)} \Big|_{\lambda}; \quad [K_v] = \text{lm} \cdot \text{W}^{-1}, \quad (2.21)$$

která je mírou schopnosti zdroje vzbudit zrakový vjem.

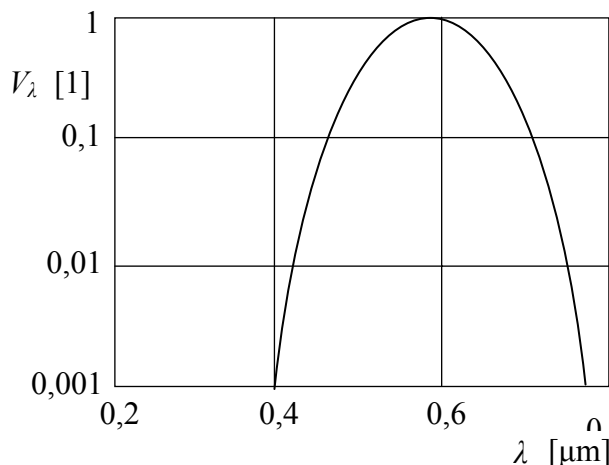
Kdyby zdroj vyzařoval veškerou energii v té části spektra, kde je oko nejcitlivější ($\lambda_m = 555 \text{ nm}$) a světelný tok by byl určen v lumenech, zatímco zářivý tok ve wattech, pak podle definice lumenu a wattu je $K_v = K_{v,\max} = 680 \text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$.

Hodnota světelné účinnosti zářivého toku je za uvedených podmínek maximální. Bude-li se ohodnocování světelné účinnosti opakovat pro jiné vlnové délky (oko je zde méně citlivé), dostane se světelná účinnost zářivého toku závislá na vlnové délce $K_v = K_v(\lambda)$.

V souvislosti s touto charakteristikou lidského zraku se definuje *poměrná světelná účinnost oka* $V_\lambda(\lambda)$ vztahem

$$V_{\lambda}(\lambda) = \frac{K_v(\lambda)}{K_{v,\max}}; \quad [V_{\lambda}] = 1, \quad (2.22)$$

kteřá je graficky zobrazena na obrázku. U průměrného oka se předpokládá nenulová hodnota V_{λ} v rozmezí vlnových délek 380 nm až 760 nm.



Obrázek 2.4: Poměrná světelná účinnost oka (pro denní vidění)

Pomocí poměrné světelné účinnosti oka V_{λ} a spektrálního zářivého toku ϕ_{λ} (daného použitým světelným zdrojem) lze určit světelný tok v intervalu spektra (λ_1, λ_2) následujícím integrálem

$$\phi_v = 680 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} V_{\lambda}(\lambda) \phi_{\lambda}(\lambda) d\lambda. \quad (2.23)$$

Integrál je nutno řešit graficky nebo numericky, protože $V_{\lambda}(\lambda)$ ani $\phi_{\lambda}(\lambda)$ nejsou analytickou funkcí vlnové délky.

Stručný přehled fotometrických veličin:

Souvislost světelné energie W_v a zářivé energie W je definována pomocí spektrální zářivé energie vztahem

$$W_v = 680 \int_{380\text{nm}}^{760\text{nm}} K_{\lambda}(\lambda) W_{\lambda}(\lambda) d\lambda; \quad (2.24)$$

$$[W_{\lambda}] = \text{lm.s},$$

kde $W_\lambda(\lambda)$ je spektrální zářivá energie.

Objemovou hustotu světelné energie w_v definuje vztah

$$w_v = \frac{dW_v}{dV}; [w_v] = \text{lm.s.m}^{-3}. \quad (2.25)$$

Vyjádření světelného toku ϕ_v je

$$\phi_v = \frac{dW_v}{dt}; [\phi_v] = \text{lm}. \quad (2.26)$$

Světlení M_v a osvětlení E_v plochy definují výrazy

$$M_v \text{ nebo } E_v = \frac{d\phi_v}{dS}; \quad (2.27)$$

$$[M_v \text{ nebo } E_v] = \text{lm.m}^{-2} = \text{lx}.$$

Svítivost I_v je definovaná vztahem

$$I_v = \frac{d\phi_v}{d\Omega}; \quad (2.28)$$

$$[I_v] = \text{lm.sr}^{-1} = \text{cd}.$$

a nakonec jas L_v je definován

$$L_v = \frac{d^2\phi_v}{dS d\Omega \cos\theta} = \frac{dI_v}{dS \cos\theta}; \quad (2.29)$$

$$[L_v] = \text{cd.m}^{-2}.$$

Mezi veličinami L_v a M_v pro Lambertovou plochu lze odvodit podobně jako v případě radiometrických veličin vztah

$$M_v = \pi L_v. \quad (2.30)$$

3 Interferometrie optických vln a optické interferometry

3.1 Interference a koherence optických vln

Interference světla je optickým jevem, při kterém dochází ke skládání (superpozici) koherentních optických vln od konečného počtu zdrojů. Prostorové rozložení výsledné

intenzity záření se nazývá interferenčním obrazcem. Kontrast interferenčního obrazce je mírou koherence interferujících vln a je měřen ve zvolené rovině.

Předpokládá se interference dvou optických vln (rovinných, uniformních, monochromatických, souhlasně lineárně polarizovaných) šířících se ve volném prostoru (ve vakuu) stejným směrem. Obě vlny jsou reprezentovány intenzitami elektrického pole $E_1(\vec{r}, t)$ a $E_2(\vec{r}, t)$. Interference se lépe vyjádří, přiřadí-li se těmto veličinám komplexní charakter (vektorový charakter lze zanedbat).

$$\dot{E}_1(\vec{r}, t) = A_1 e^{jg_1(\vec{r})} e^{-j\omega t}, \quad (3.1)$$

$$\dot{E}_2(\vec{r}, t) = A_2 e^{jg_2(\vec{r})} e^{-j\omega t}, \quad (3.2)$$

kde A_1, A_2 jsou reálné amplitudy; $g_1(\vec{r}), g_2(\vec{r})$ jsou fázové funkce závislé pouze na polohovém vektoru \vec{r} ; ω je úhlová frekvence (stejná u obou vln) a t je čas. Tečka nad veličinou zvýrazňuje její komplexní charakter. Platí

$$g_i(\vec{r}) = \vec{k}_i \cdot \vec{r} + \delta_{0i} \quad (3.3)$$

kde δ_{0i} jsou konstantní fázové členy, $i = 1, 2, \dots$

Pravidlo pro přiřazení komplexního tvaru intenzitě elektrického pole je

$$E_i(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\dot{E}_i(\vec{r}, t)\} = A_i \cos[g_i(\vec{r}) - \omega t] \quad (3.4)$$

neboli

$$E_i(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} [\dot{E}_i(\vec{r}, t) + \dot{E}_i^*(\vec{r}, t)] \quad (3.5)$$

Superpozice vln se vyjádří součtem intenzit elektrického pole (nikoli součtem optických intenzit) a výsledné pole je

$$E = E_1 + E_2, \quad (3.6)$$

z čehož pro optickou intenzitu plyne

$$I = c\epsilon_0 n \left\langle |E_1 + E_2|^2 \right\rangle_{\text{čas}} = c\epsilon_0 n \langle E_1^2 \rangle + c\epsilon_0 n \langle E_2^2 \rangle + 2c\epsilon_0 n \langle E_1 E_2 \rangle \quad (3.7)$$

Členy v závorce se vyjádří jednotlivě:

$$\langle E_1^2 \rangle = \langle \dot{E}_1 \dot{E}_1^* \rangle = \frac{1}{2} A_1^2, \quad (3.8)$$

$$\langle E_2^2 \rangle = \frac{1}{2} A_2^2, \quad (3.9)$$

$$\langle 2E_1 E_2 \rangle = A_1 A_2 \cos(g_1 - g_2), \quad (3.10)$$

Po dosazení a označení $g_1 - g_2 = \phi$ je

$$I = c\epsilon_0 n \left(\frac{1}{2} A_1^2 + \frac{1}{2} A_2^2 + A_1 A_2 \cos \phi \right). \quad (3.11)$$

Podle definice optické intenzity je $\frac{1}{2} c\epsilon_0 n A_1^2 = I_1$, $\frac{1}{2} c\epsilon_0 n A_2^2 = I_2$. Po dosazení se získá výraz

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \phi. \quad (3.12)$$

Poslední člen se nazývá "interferenční člen" s označením J_{12} .

$$I = I_1 + I_2 + J_{12}. \quad (3.13)$$

Kontrast interferenčního obrazce se definuje výrazem

$$K = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (3.14)$$

z něhož lze dosazením odvodit

$$K = \frac{4\sqrt{I_1 I_2}}{2(I_1 + I_2)}. \quad (3.15)$$

Je-li $I_1 = I_2$, je v případě koherentních vln $K = 1$.

V reálném případě jsou vlny koherentní jen částečně nebo jsou nekoherentní. Rozlišuje se také, zda se koherence narušila „nemonochromaticností“ zdroje nebo „plošnou rozlehlostí“ zdroje a hovoří se o časové nebo prostorové koherenci. Se ztrátou koherence snižuje svoji hodnotu interferenční člen, což se vyjádří zavedením stupně částečné koherence γ_{12} vztahem

$$J_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \gamma_{12} \cos \phi; \quad (3.16)$$

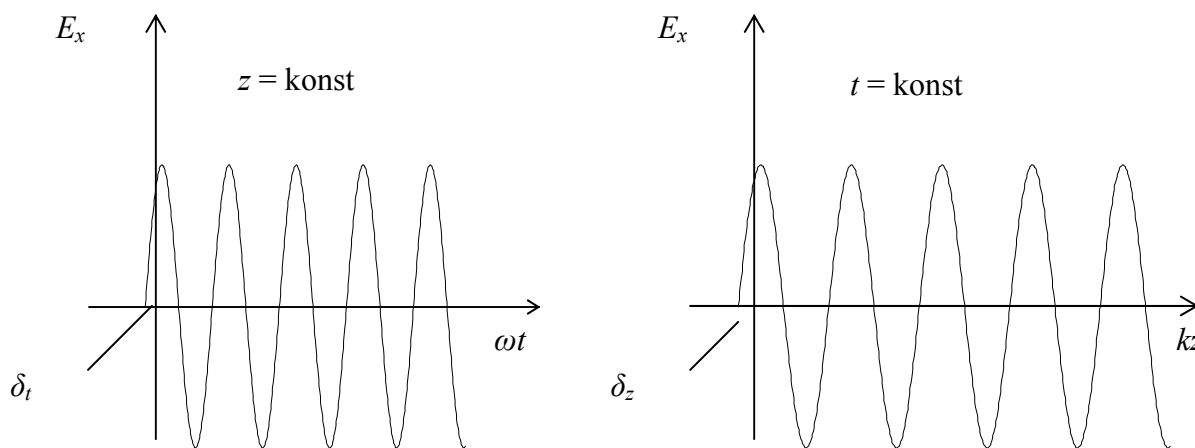
Vyjádříme-li teď kontrast K , je

$$K = \frac{4\sqrt{I_1 I_2}}{2(I_1 + I_2)} \gamma_{12}; \quad 0 \leq \gamma_{12} \leq 1. \quad (3.17)$$

Je-li $I_1 = I_2$, je $K = \gamma_{12}$. Prostřednictvím kontrastu K lze přímo měřit stupeň částečné koherence vln γ_{12} (je však nutno zabezpečit podmínku $I_1 = I_2$). Jsou-li vlny generovány laserem, je možné tímto způsobem ohodnocovat stupeň koherence laseru.

Pro interferenční obrazec je typické, že za podmínky $I_1 = I_2$ a $\gamma_{12} = 1$ je $I_{\min} = 0$ a $I_{\max} = 4I_1$.

Grafické zobrazení funkce $I = I(\phi)$ pro tři různé hodnoty γ_{12} je uvedeno na obr. 3.1.



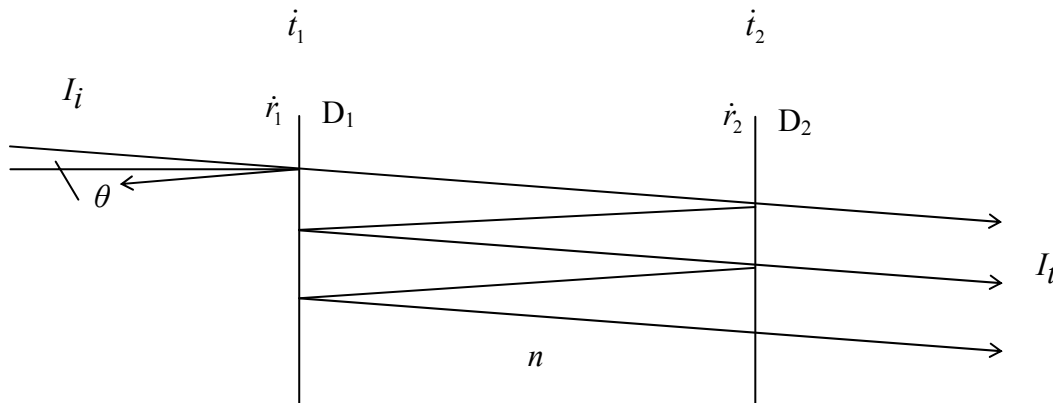
Obrázek 3.1: Interference vln s různým stupněm koherence (splněna je podmínka $I_1 = I_2$)

3.2 Optické interferometry

V interferometrii se předpokládá, že interferenční obrazec je známý (prostorové rozložení intenzity se stanoví měřením) a určují se parametry interferujících vln, pomocí nichž lze stanovit některé fyzikální veličiny (prostorové posunutí, změnu indexu lomu prostředí a pod.). Existuje několik druhů interferometrů, z nichž nejvýznamnější jsou Michelsonův, Fabryův-Perotův, Machův-Zehnderův, Sagnacův atd.

Schéma Fabryova-Perotova interferometru je uvedeno na obr. 3.2. D_1 a D_2 jsou dvě planparalelní skleněné desky. Na skleněných deskách jsou napařeny reflexní plochy a

interferometr se chová jako planoparalelní vrstva opticky homogenního průzračného prostředí ohraničená dvěma reflexními rovinami.



Obrázek 3.2: Schéma Fabryova-Perotova interferometru

(D_1, D_2 - skleněné planoparalelní desky opatřené reflexními plochami s amplitudovými koeficienty odrazivosti \dot{r}_1, \dot{r}_2 a amplitudovými koeficienty propustnosti \dot{t}_1, \dot{t}_2 ; n - absolutní index lomu prostředí; I_i - optická intenzita dopadající vlny; I_t - výsledná optická intenzita interferujících vln; θ - úhel dopadu;)

Na desku D_1 dopadá pod úhlem θ rovinná, monochromatická, uniformní, lineárně polarizovaná vlna, jejíž rovina polarizace je např. rovnoběžná s rovinou dopadu. Na první reflexní ploše se dopadající vlna dělí na vlnu odraženou a vlnu procházející. Vlna procházející dopadá pod úhlem θ na druhou reflexní plochu a znovu se dělí na odraženou a procházející vlnu. Procházející vlny vytvářejí na výstupu svazek rovnoběžných paprsků.

Pro fázový rozdíl ϕ mezi dvěma sousedními vlnami lze odvodit vztah

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2dn \cos \theta, \quad (3.18)$$

kde λ_0 je vlnová délka záření ve vakuu, d je vzdálenost reflexních ploch, n je absolutní index lomu prostředí mezi reflexními plochami a θ je úhel, který svírají paprsky s kolmicí dopadu.

Vlnám se přiřadí fáze a reflexní plochy se definují amplitudovými koeficienty odrazivosti \dot{r}_1, \dot{r}_2 a amplitudovými koeficienty propustnosti \dot{t}_1, \dot{t}_2 . (Jednotlivé koeficienty vyjadřují poměr příslušných fázorů - viz Fresnelovy vzorce - a jejich význam se ukáže v dalším textu.) Je-li E_i amplituda intenzity elektrického pole vlny dopadající na první reflexní plochu, je $E_i \dot{t}_1$ fázor vlny procházející touto plochou. Fázor vlny procházející druhou reflexní plochou je $E_i \dot{t}_1 \dot{t}_2 e^{j\delta_{12}}$ (δ_{12} představuje změnu fáze při šíření vlny prostorem mezi reflexními plochami). Vlna, která se poprvé odráží od druhé reflexní plochy je daná fázorem $E_i \dot{t}_1 \dot{r}_2 e^{j\delta_{12}}$ a po dalším odrazu (od první reflexní plochy) bude daná fázorem $E_i \dot{t}_1 \dot{r}_2^2 e^{2j\delta_{12}}$; ($\dot{r}_1 = -\dot{r}_2$). Konečně vlna zobrazená druhým paprskem a procházející druhou reflexní plochou má fázor $E_i \dot{t}_1 \dot{r}_2^2 \dot{t}_2 e^{j3\delta_{12}}$. Podobným postupem se vyjádří vystupující vlna po libovolném sudém

počtu odrazů mezi reflexními plochami. Vliv povrchů skleněných desek, které nejsou opatřeny reflexními plochami se zanedbá. Interference všech vystupujících vln se vyjádří součtem

$$\dot{E}_t = \dot{E}_i \dot{t}_1 \dot{t}_2 \left(1 + \dot{r}_2^2 e^{j\phi} + \dot{r}_2^4 e^{j2\phi} + \dot{r}_2^6 e^{j3\phi} + \dots \right) \quad (3.19)$$

kde se fáze upravila tak, aby veličina ϕ vyjadřovala fázový rozdíl mezi dvěma sousedními vlnami ($\phi = 2 \delta_{12}$). Pro vysoký počet vln lze součet (3.19) upravit na tvar

$$\dot{E}_t = \frac{\dot{t}_1 \dot{t}_2}{1 - \dot{r}_2^2 e^{j\phi}} \dot{E}_i. \quad (3.20)$$

Při praktické realizaci interference procházejících vln je třeba použít spojné čočky a interferenční obrazec pozorovat v její obrazové ohniskové rovině. V případě, že čočka nebude použita, je potřebné volit úhly θ dostatečně malé. Cílem není změření prostorového rozložení intenzity, ale sleduje se frekvenční závislost intenzity při konstantním směru šíření vln. Zvolí-li se úhel $\theta = 0$, je intenzita (při dané frekvenci) konstantní v celé ozářené rovině desky interferometru a závisí jen (při konstantních amplitudových koeficientech odrazivosti a propustnosti) na intenzitě a frekvenci dopadajících vln.

Amplitudové koeficienty odrazivosti \dot{r}_1, \dot{r}_2 a amplitudové koeficienty propustnosti \dot{t}_1, \dot{t}_2 , jsou (při $\theta = 0$) závislé jen na indexech lomu n_D a n podle Fresnelových vzorců. Pro další úpravy výrazu (3.20) se definuje v souladu s Fresnelovými vzorci odrazivost R

$$R = (\dot{r}_2)^2 \quad (3.21)$$

a propustnost T

$$T = \dot{t}_1 \dot{t}_2. \quad (3.22)$$

Odrazivost R i propustnost T jsou reálné veličiny, pro něž platí (v souladu se zákonem zachování energie)

$$R + T = 1. \quad (3.23)$$

Dosadí-li se (3.21) a (3.22) do (3.20) je

$$\dot{E}_t = \frac{T}{1 - R e^{j\phi}} \dot{E}_i. \quad (3.24)$$

Výsledná intenzitu ($I_t \sim \dot{E}_t \dot{E}_t^*$) se vyjádří vztahem

$$I_t = I_i \frac{T^2}{(1 - Re^{j\phi})(1 - Re^{-j\phi})}, \quad (3.25)$$

kde $I_i \sim E_i^2$ je intenzita dopadající vlny. Po dalších úpravách se dostane konečný výraz (Airyho vzorec)

$$I_t = I_i \frac{T^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\phi}{2}}. \quad (3.26)$$

Analýza výsledného vztahu bude snadnější, zavede-li se bezrozměrný parametr F vztahem

$$F = \frac{4R}{(1 - R)^2}. \quad (3.27)$$

Tabulka 3.1: Tabulka vybraných hodnot R a F

R	F
1	∞
0,99	39600
0,98	9800
0,97	4311
0,90	360

V předpokládané aplikaci Fabryova-Perotova interferometru bude odrazivost R relativně vysoká a parametr F bude mít rovněž relativně vysokou hodnotu. Pro představu o vztahu mezi parametrem F a odrazivostí R je uvedena Tab. 3.1.

Použitím parametru F lze výraz pro výslednou intenzitu upravit na tvar

$$I_t = I_i \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\phi}{2}}. \quad (3.28)$$

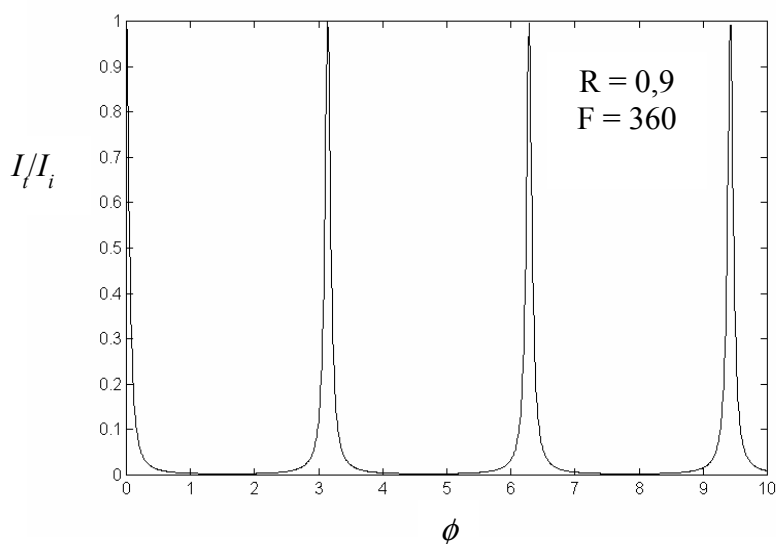
Funkce $I_t = I_t(\phi)$ vyjádřená vztahem (3.28) je periodická s periodou 2π a vyjadřuje, při konstantním směru šíření optického záření, intenzitu vlny procházející oběma reflexními plochami v závislosti na vlnové délce (nebo frekvenci). Při kolmém dopadu ($\theta = 0$) je

$$\phi = \phi(\lambda) = \frac{4\pi}{\lambda_0} nd \quad (3.29)$$

nebo

$$\phi = \phi(\nu) = \frac{4\pi\nu}{c_0} nd. \quad (3.30)$$

Na Obr. 3.3 je graficky znázorněna závislost relativní intenzity I_t/I_i na veličině ϕ pro vybrané hodnoty parametru F . Grafy na Obr. 3.3 představují "funkce tvaru interferenčních proužků" Fabryova-Perotova interferometru.



Obrázek 3.3: Funkce tvaru interferenčních proužků Fabryova-Perotova interferometru

Pro šířku rezonanční čáry (interferenčního proužku) ε_F , definovanou na poloviční úrovni maximální hodnoty relativní optické intenzity, lze odvodit výraz

$$\varepsilon_F = \frac{4}{\sqrt{F}}, \quad (3.31)$$

z něhož je vidět (pomocí 3.27), jak souvisí šířka rezonanční čáry s odrazivostí reflexních ploch. Jsou-li požadovány úzké rezonanční čáry, je třeba volit vysoké odrazivosti reflexních ploch, ale zároveň je třeba se smířit s poklesem propustnosti interferometru, tedy s relativně nízkou úrovní intenzity vycházející vlny.

4 Optická holografie

4.1 Holografická rovnice

Holografický záznam informace (holografie) spočívá v úplném záznamu obrazového signálu. Obrazovým signálem se rozumí optická vlna s modulovanou amplitudou a fází. Úplným záznamem obrazového signálu se rozumí zaznamenání obou veličin: amplitudy i fáze. Princip holografie předložil jako první Dennis Gábor v roce 1947. Kromě holografického záznamu informace v optické oblasti (optická holografie) může být holografický záznam informace uskutečněn i v jiných oblastech spektra záření.

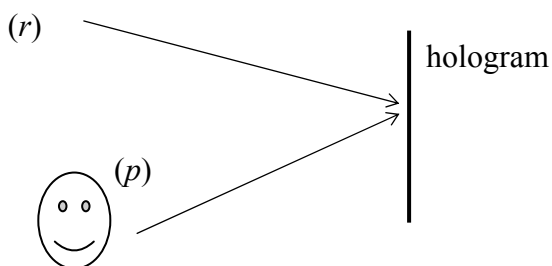
Dennis Gábor
(Nobelova cena 1971)



Holografie našla své aplikace zejména v optických komunikacích (holografické paměti) a v metrologii (holografické mřížky, dvojexpoziční hologramy).

Holografie zahrnuje záznam a rekonstrukci optických vln. Hologramem se rozumí fotografická deska s vysokou rozlišovací schopností obsahující kódovaný záznam optické vlny. Existuje také objemová holografie, jejímž objevitelem je Denisjuk. Objemová holografie nabízí jisté výhody, ale pro názornost a rychlé pochopení principu holografie bude pojednáno o holografii plošné využívající hologramu v podobě rovinného transparentu.

K odvození holografické rovnice je vhodné vyjít z interference světla. Předpokládá se interference dvou koherentních vln, z nichž jedna je referenční (přichází přímo z laseru) a druhá je předmětová (přichází jako rozptýlená od předmětu, jehož holografický záznam se pořizuje).



Obrázek 4.1: Interference optických vln při optické holografii
(r – referenční vlna; p – předmětová vlna)

Obě vlny (referenční i předmětová) jsou reprezentovány fázory intenzit elektrického pole:

$$\dot{E}_r(\vec{r}) = A_r(\vec{r})e^{ig_r(\vec{r})} - \text{referenční vlna} \quad (4.1)$$

$$\dot{E}_p(\vec{r}) = A_p(\vec{r})e^{ig_p(\vec{r})} - \text{předmětová vlna} \quad (4.2)$$

kde A_r, A_p jsou amplitudy a g_r, g_p jsou fáze s konstantními fázovými členy δ_r, δ_p :

$$g_r = \vec{k}_r \cdot \vec{r} - \delta_r, \quad (4.3)$$

$$g_p = \vec{k}_p \cdot \vec{r} - \delta_p. \quad (4.4)$$

Časové členy fáze jsou v uvedeném popisu vynechány. Informace o objektu P se považuje za úplnou, bude-li zachována fáze obrazové vlny g_p , resp. bude-li rekonstruován vlnový vektor \vec{k}_p , určující (v třírozměrném prostoru) směr šíření obrazové vlny.

Předpokládá se, že na fotografické desce obě vlny interferují (koherenční délka laserového záření je větší než maximální rozdíl drah referenční a předmětové vlny) a výsledná intenzita I_Σ vyvolá po chemickém zpracování fotografické desky změnu její propustnosti T . Tento proces lze popsat následujícím způsobem:

$$I_\Sigma = c\epsilon_0 n \left\langle \left| \dot{E}_r + \dot{E}_p \right|^2 \right\rangle = I_r + I_p + 2\sqrt{I_r I_p} \cos(g_r - g_p), \quad (4.5)$$

$$I_\Sigma \sim T,$$

kde I_r, I_p jsou intenzity referenční a předmětové vlny.

Propustnost fotografické desky se může nyní vyjádřit

$$T \sim I_r + I_p + 2\sqrt{I_r I_p} \cos(g_r - g_p). \quad (4.6)$$

Ozáří-li se nyní fotografická deska pouze referenční vlnou způsobem (stejným směrem) jako při konstrukci hologramu, vznikne vlna \dot{E}_h , která se odvodí postupem, vyjadřujícím modulaci referenční vlny \dot{E}_r propustností T fotografické desky:

$$\dot{E}_h = T\dot{E}_r. \quad (4.7)$$

Po dosazení je

$$\dot{E}_h \sim I_r \dot{E}_r + I_p \dot{E}_r + 2\dot{E}_r \sqrt{I_r I_p} \cos(g_r - g_p) \quad (4.8)$$

a po úpravách se získá

$$\dot{E}_h \sim (I_r + I_p) A_r e^{jg_r} + \sqrt{I_r I_p} (e^{j(g_r - g_p)} + e^{-j(g_r - g_p)}) A_r e^{jg_r}, \quad (4.9)$$

$$\dot{E}_h \sim A e^{jg_r} + B e^{j(2g_r - g_p)} + B e^{jg_p} \quad (4.10)$$

kde

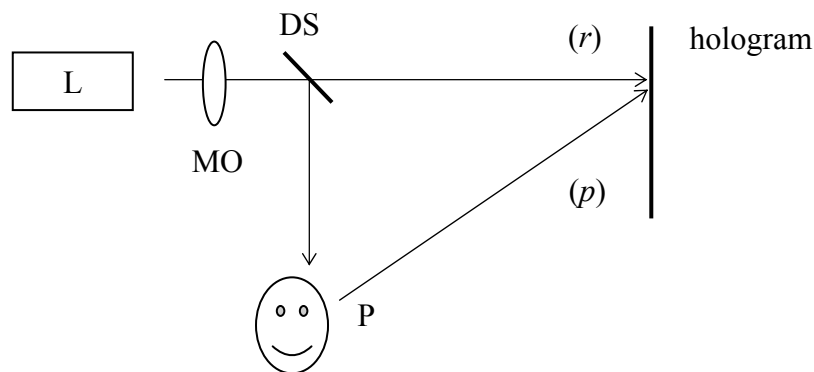
$$A = (I_r + I_p) A_r, \quad (4.11)$$

$$B = A_r \sqrt{I_r I_p}. \quad (4.12)$$

Rovnice 4.10 se nazývá „holografická rovnice“. První člen pravé strany rovnice představuje referenční vlnu (důležitý je záznam fáze, velikost amplitudy zde není podstatná), druhý člen představuje vlnu "komplexně sdruženou" s předmětovou (jde o vlnu, která působí rušivě, ale kterou je nutno respektovat) a třetí člen představuje rekonstruovanou předmětovou vlnu (opět je důležitý pouze záznam fáze). Fáze předmětové vlny zůstává zachována v původním tvaru g_p .

4.2 Výroba hologramů

Holografické zaznamenání informace probíhá následujícím způsobem: Na fotografickou skleněnou desku (pro holografické účely) dopadají dvě koherentní vlny (vlna referenční a vlna předmětová) viz obr. 4.2.



Obrázek 4.2: Holografické zaznamenání informace

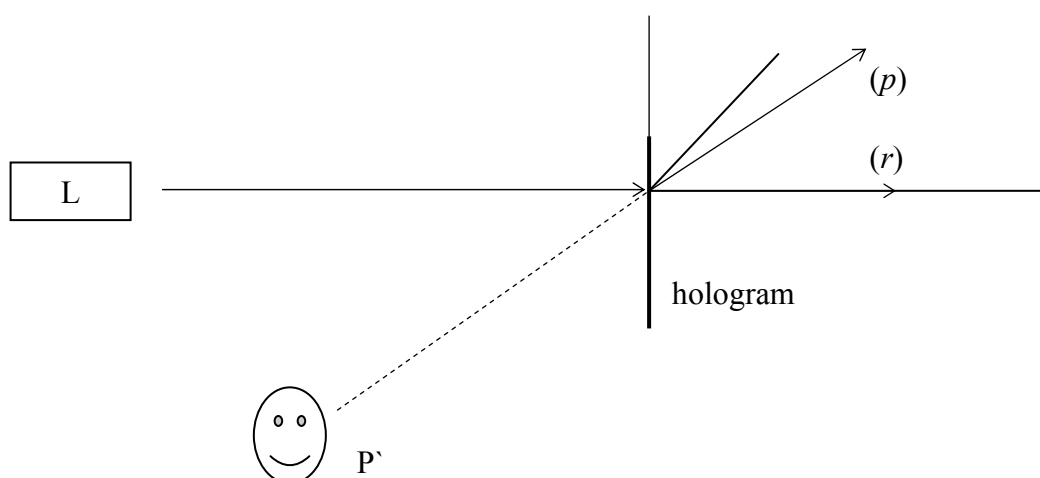
(L - laser vytvářející referenční vlnu, P - objekt vytvářející obrazovou vlnu, DS – dělič svazku)

Koherence obou vln referenční a předmětové se zabezpečí jediným zdrojem koherentního světla (laserem), jehož svazek se čočkou (mikroskopovým objektivem MO) rozšíří v divergentní vlnu s následným dělením tak, aby předmět byl ozařován stejným laserem, který generuje referenční vlnu. Je-li zabezpečeno, aby dráhový rozdíl referenční a předmětové vlny v místě hologramu (počítáno od DS) byl menší než koherenční délka laseru, budou vlny na hologramu interferovat podle rovnice (4.5).

Interferenční obrazec, který je třeba zaznamenat, má jemnou strukturu skvrn, které jsou od sebe vzdáleny srovnatelně s vlnovou délkou použitého světla. Nutnou podmínkou úspěšné výroby hologramu je proto dostatečně mechanicky tuhá soustava, která se nesmí během expozice chvět. Interferenční obrazec ozáří fotografickou desku, která je následně chemicky zpracována podobně jako běžný exponovaný fotografický film. Požadavkem je ovšem vysoká rozlišovací schopnost fotocitlivé vrstvy.

Na exponované a chemicky zpracované fotografické desce se takovýmto způsobem zaznamená informace formou tzv. holografického kódu. Holografický kód je fotografickým záznamem kombinace původní předmětové vlny a vlny referenční. Záznam holografického kódu je možný díky interferenci koherentních vln referenční a předmětové. Referenční vlnu nelze při vytváření holografického kódu vyloučit. Optická intenzita interferenčního obrazce I_E se zaznamená na fotografickou desku a chemickou cestou je vyroben transparent s propustností T .

K dekódování informace ukryté na fotografické desce (hologramu) se použije stejná referenční vlna jako při konstrukci hologramu, která bude ozařovat hologram stejným způsobem (viz. obr. 4.3; kolmý dopad není nutným požadavkem).



Obrázek 4.3: Rekonstrukce holografického záznamu

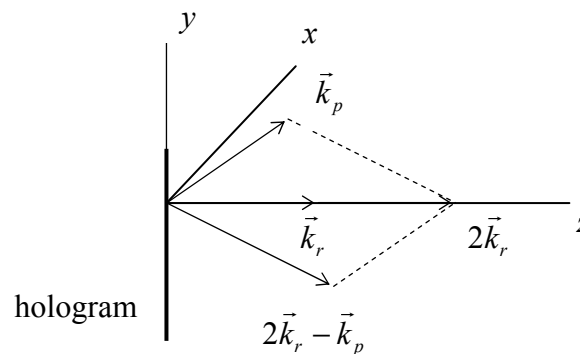
(L – laser, P' – zdánlivý předmět, T – propustnost hologramu, $0xyz$ – souřadnicová soustava, r – referenční vlna, p – předmětová vlna,)

Při rekonstrukci holografického záznamu je třeba zabezpečit, aby hologram byl ozařován referenční vlnou pod stejným úhlem jako při konstrukci záznamu a aby pozorování předmětové vlny se uskutečnilo ve stejném směru, ve kterém při konstrukci hologramu dopadala předmětová vlna. Výsledkem ozáření hologramu referenční vlnou je vlna \dot{E}_h

$$\dot{E}_h \sim Ae^{ig_r} + Be^{j(2g_r - g_p)} + Be^{jg_p}.$$

Jedná o plošný transparentní hologram a výsledná vlna \dot{E}_h je pozorovaná v poloprostoru vpravo od hologramu ($z > 0$, podle obr.4.3). Pro jednoduchost je možno referenční vlnu vyjádřit vlnovým vektorem \vec{k}_r a rekonstruovanou předmětovou vlnu vlnovým vektorem \vec{k}_p . Směry šíření vln vzniklých ozářením hologramu referenční vlnou jsou znázorněny na obr. 4.4. Závěrečnou úlohou holografie je odfiltrovat vlny, které působí rušivě: referenční vlnu reprezentovanou vektorem \vec{k}_r a vlnu "komplexně sdruženou" s předmětovou vlnou reprezentovanou vektorem $2\vec{k}_r - \vec{k}_p$. V analytickém vyjádření (4.13) jsou vynechány konstantní fázové členy δ_r a δ_p .

$$\dot{E}_h \sim A e^{j\vec{k}_r \cdot \vec{r}} + B e^{j(2\vec{k}_r - \vec{k}_p) \cdot \vec{r}} + B e^{j\vec{k}_p \cdot \vec{r}}. \quad (4.13)$$



Obrázek 4.4: Konfigurace vln při rekonstrukci holografického záznamu

5 Optická difrakce

5.1 Difrakční integrál a jeho aproximace

Optická difrakce je jevem, při kterém dochází k odklonu přímočarého šíření optických vln jinak než odrazem nebo lomem. První kdo jasně popsal difrakční jevy byl Franciscus Mario Grimaldi 1665. Od této doby se lidé zabývají difrakcí vážně jako speciálním optickým vlnovým jevem. Za zakladatele vlnové teorie světla je však považován Christian Huygens 1690.

Slovní vyjádření difrakce vychází z Huygensova-Fresnelova principu formulovaného Fresnelem v roce 1818: *"Kmity světelné vlny v každém z jejích bodů mohou být považovány za součet elementárních pohybů, které tam v téže okamžiku nezávisle na sobě vyšlou všechny části této uvažované vlny v některé z jejích dřívějších poloh"*.



Augustin Jean Fresnel
(Huygensův-Fresnelův princip 1918)



Christian Huygens
(Huygensův princip 1690)

Jednotlivé pojmy vyskytující se v Huygensovu-Fresnelovu principu jsou znázorněny na obrázku 5.1. Předpokládá se, že prostředí, ve kterém se vlny šíří, je homogenní a izotropní dielektrikum. Optická vlna je monochromatická, obecně sférická, lineárně polarizovaná a její intenzita je natolik nízká, že nevyvolá v prostředí nelineární jevy.

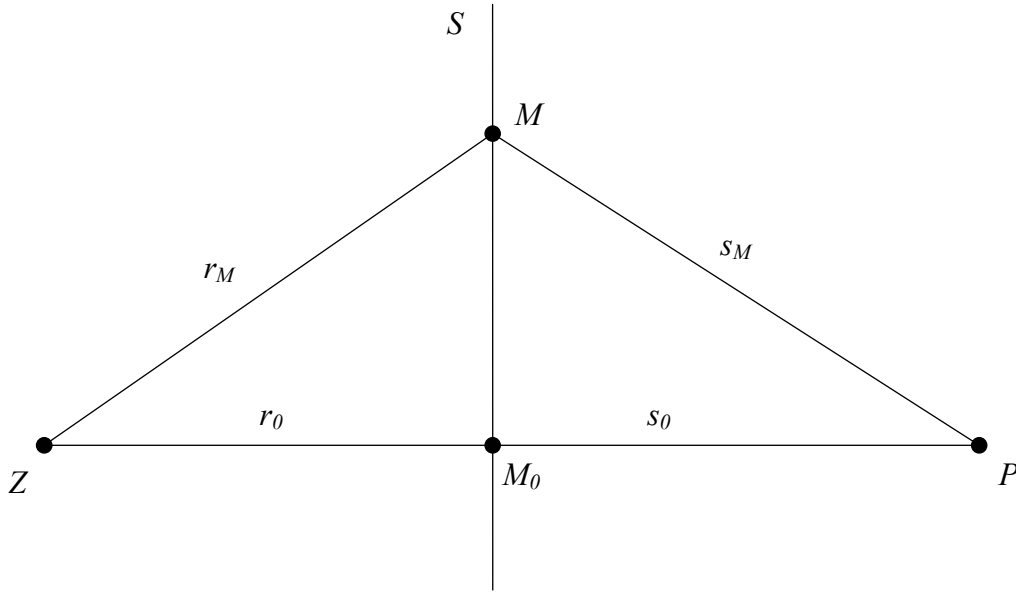
Plocha S definuje "dřívější polohu" vlny a bod P je zvolený bod, v němž se pozorují výsledné "kmity vlny". Jednotlivé "elementární pohyby" jsou dílčí kmity, které v bodu P vyvolají kulové vlny, vycházející ze všech bodů plochy S . (Jedná se o vlny typu $\frac{e^{jks_M}}{s_M}$). Bod

M je bod plochy S . Vzdálenosti bodů r_M , s_M , r_0 a s_0 (viz obr. 5.1) umožňují matematickou formulaci Huygensova-Fresnelova principu. Kmity vlny se vyjádří intenzitou elektrického pole (v komplexním skalárním tvaru; fázorem). Matematickým vyjádřením Huygensova-Fresnelova principu je integrál (předpokládá se, že čas je rovný konstantě a časový fázový člen se pokládá rovný jedné)

$$E(P) \sim \int_S K(M) E(M) \frac{e^{jks_M}}{s_M} dS, \quad (5.1)$$

kde $K(M)$ je tzv. faktor sklonu, kterým se vyjádří ubývající míra příspěvků vln se vzdalováním se bodu M od bodu M_0 . $E(M)$ je intenzita elektrického pole reprezentující kulovou vlnu vyzařovanou zdrojem Z

$$E(M) = \frac{e^{jkr_M}}{r_M}.$$



Obrázek 5.1: Znázornění Huygensova-Fresnelova principu ($r_M, s_M, r_0, s_0 \gg \lambda$)

Předpokládá-li, se že plochu S tvoří rovinné stínítko s malým otvorem S_0 takovým, že lineární rozměry otvoru jsou mnohem menší než r_0 nebo s_0 a zároveň mnohem větší než λ , je možné položit $K(M) = 1$ a v amplitudových členech intenzit místo r_M, s_M psát r_0, s_0 . Po dosazení do (5.1) se dostane výraz, který se nazývá "difrakční integrál"

$$E(P) \sim \int_{S_0} \frac{e^{jkr_M}}{r_0} \frac{e^{jks_M}}{s_0} dS. \quad (5.2)$$

Konstanta úměry (při jednotkové amplitudě vlny v jednotkové vzdálenosti od zdroje) je rovna $-j/\lambda$ a lze ji odvodit podrobnější matematickou analýzou. Úpravou (5.1) se získá difrakční integrál ve tvar

$$E(P) = -\frac{j}{\lambda} \frac{1}{r_0 s_0} \int_{S_0} e^{jk(r_M + s_M)} dS = C \int_{S_0} e^{jk(r_M + s_M)} dS. \quad (5.3)$$

Je vhodné zvolit souřadnicovou soustavu $0\xi\eta z$ tak (viz obr. 5.2), že se rovina stínítka S ztotožní s rovinou $\xi 0 \eta$ a počátek souřadnicové soustavy se umístí do bodu M_0 . Délky r_M a s_M jsou funkcemi souřadnic bodů Z, M a P . Budou-li (x_0, y_0, z_0) souřadnice bodu Z , (x, y, z) souřadnice bodu P a $(\xi, \eta, 0)$ souřadnice bodu M , platí (viz obr. 5.2)

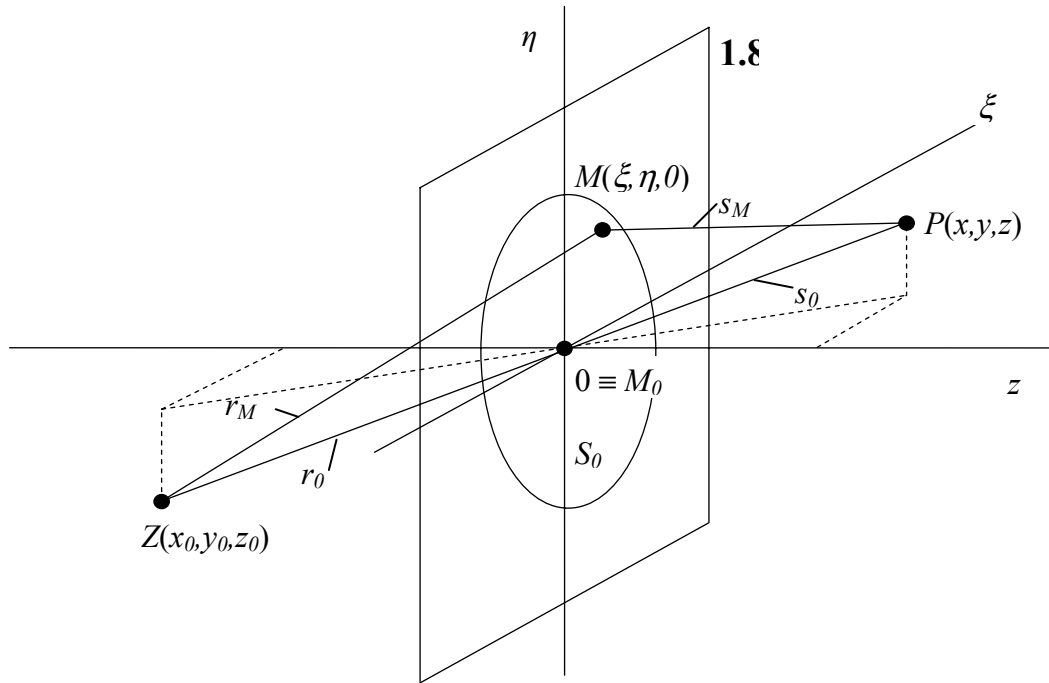
$$r_M = \left[(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + z_0^2 \right]^{1/2}, \quad (5.4)$$

$$s_M = \left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2 \right]^{1/2}. \quad (5.5)$$

Úpravou a rozvojem funkcí r_M , s_M do řady [podle vzorce $(1 + \varepsilon)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \dots$] se získají tvary

$$r_M = z_0 + \frac{(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2}{2z_0} - \frac{[(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2]^2}{8z_0^3} + \dots, \quad (5.6)$$

$$s_M = z + \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2z} - \frac{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^2}{8z^3} + \dots \quad (5.7)$$



Obrázek 5.2: Difrakce na otvoru v rovinném stínítku

Budou-li splněny nerovnosti (tzv. Rayleighovo kritérium)

$$\frac{[(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2]^2}{8z_0^3} \leq 0,1\lambda, \quad (5.8)$$

$$\frac{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^2}{8z^3} \leq 0,1\lambda, \quad (5.9)$$

lze zanedbat třetí členy v rozvoích funkcí r_M a s_M . Jedná se o Fresnelovu aproximaci difrakčního integrálu (Fresnelovu difrakci). Difrakční integrál má v tomto případě tvar

$$E(P) = C e^{jk(z_0+z)} \int_{S_0} e^{jkf(\xi,\eta)} d\xi d\eta = C' \int_{S_0} e^{jkf(\xi,\eta)} d\xi d\eta, \quad (5.10)$$

kde

$$f(\xi,\eta) = \frac{(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2}{2z_0} + \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2z}. \quad (5.11)$$

Funkci $f(\xi,\eta)$ je pro další úvahy vhodné upravit do tvaru

$$f(\xi,\eta) = \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_0} - \frac{x_0\xi + y_0\eta}{z_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2z_0} + \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{x\xi + y\eta}{z} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2z}. \quad (5.12)$$

Budou-li splněny nerovnosti

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{2z_0} \leq 0,1\lambda, \quad (5.13)$$

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{2z} \leq 0,1\lambda, \quad (5.14)$$

lze ve vztahu (5.11) zanedbat členy druhého řádu "malosti" vzhledem k proměnným ξ a η . Jedná se o Fraunhoferovu aproximaci difrakčního integrálu (Fraunhoferovu difrakci). Difrakční integrál má potom tvar

$$E(P) = C'' \int_{S_0} e^{-jk\left(\frac{x_0\xi + y_0\eta}{z_0} + \frac{x\xi + y\eta}{z}\right)} d\xi d\eta, \quad (5.15)$$

kde

$$C'' = -\frac{j}{\lambda r_0 s_0} e^{jk(z_0+z)} e^{jk\left(\frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_0} + \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)}. \quad (5.16)$$

Budou-li zdroj Z a bod pozorování P umístěny natolik vzdáleny od počátku a blízko ose z , že budou splněny nerovnosti

$$\frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_0}, \quad \frac{x^2 + y^2}{2z} \leq 0,1\lambda, \quad (5.17)$$

lze konstantu C'' zjednodušit na tvar

$$C'' = -\frac{j}{\lambda} \frac{1}{r_0 s_0} e^{jk(z_0+z)} = C'. \quad (5.18)$$

Označí-li se směrové cosiny směrů dopadající vlny l_0, m_0 a směrů difragující vlny l, m pomocí souřadnic bodů Z a P

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x_0}{z_0} \doteq \frac{x_0}{r_0} = l_0 \\ \frac{x}{z} \doteq \frac{x}{s_0} = l \end{array} \right\} l_0 + l = p, \quad (5.19)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{y_0}{z_0} \doteq \frac{y_0}{r_0} = m_0 \\ \frac{y}{z} \doteq \frac{y}{s_0} = m \end{array} \right\} m_0 + m = q, \quad (5.20)$$

(platí totiž $x_0, y_0 \ll z_0$; $x, y \ll z$; $z_0 \cong r_0$; $z \cong s_0$), lze difrakční integrál přepsat na tvar

$$E(P) = E(p, q) = C' \int_{S_0} e^{-jk(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta. \quad (5.21)$$

Situace se zjednoduší za předpokladu, že na stínítko S dopadá kolmo rovinná vlna s jednotkovou amplitudou a s fází v rovině S_0 rovnou nule. Difrakční integrál se za těchto podmínek vyjádří rovnicí

$$E(l, m) = C_0 \int_{S_0} e^{-jk(l\xi + m\eta)} d\xi d\eta, \quad (5.22)$$

kde C_0 je

$$C_0 = -\frac{j}{\lambda} \frac{1}{s_0} e^{-jks_0}. \quad (5.23)$$

Zavedou-li se nyní tzv. prostorové frekvence u, v pomocí vztahů

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{x}{s_0 \lambda} = u; \quad [u] = \text{m}^{-1}, \quad (5.24)$$

$$\frac{m}{\lambda} = \frac{y}{s_0 \lambda} = v; \quad [v] = \text{m}^{-1}, \quad (5.25)$$

integrace se rozšíří i na nepropustnou část stínítka a bude-li navíc plocha S_0 představovat určitou funkci propustnosti, reprezentující optický signál $E_s(\xi, \eta)$, bude

$$E(u, v) = C_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_s(\xi, \eta) e^{-j2\pi(u\xi + v\eta)} d\xi d\eta, \quad (5.26)$$

kde integrál na pravé straně představuje dvourozměrnou Fourierovu transformaci optického signálu $E_s(\xi, \eta)$. Takovýmto způsobem souvisí Fraunhoferova difrakce s Fourierovou transformací. Odvozené vlastnosti se využívají při optickém zpracování signálu (v optickém procesoru).

5.2 Fraunhoferova difrakce na kruhovém otvoru

V praxi se lze často setkat s Fraunhoferovou difrakcí na *kruhovém otvoru* (viz obr.5.3). Počátek souřadnicové soustavy je ztotožněn se středem kruhového otvoru. K řešení difrakčního integrálu je vzhledem k osové symetrii difrakčního obrazce vhodné provést transformaci pravoúhlých souřadnic na polární

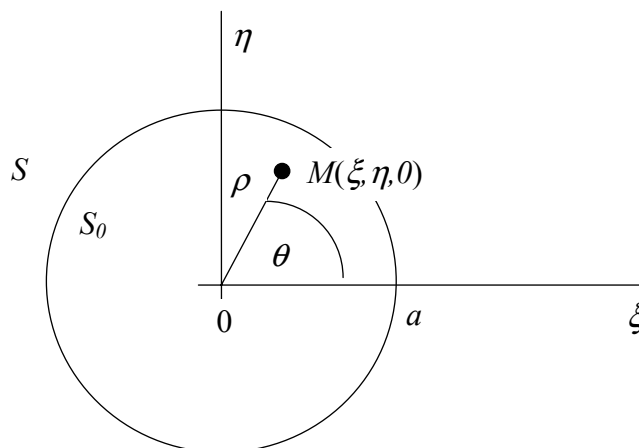
$$\xi = \rho \cos \theta, \quad (5.27)$$

$$\eta = \rho \sin \theta. \quad (5.28)$$

Podobně bod pozorování vyjádříme v polárních souřadnicích

$$x = w \cos \psi, \quad (5.29)$$

$$y = w \sin \psi. \quad (5.30)$$



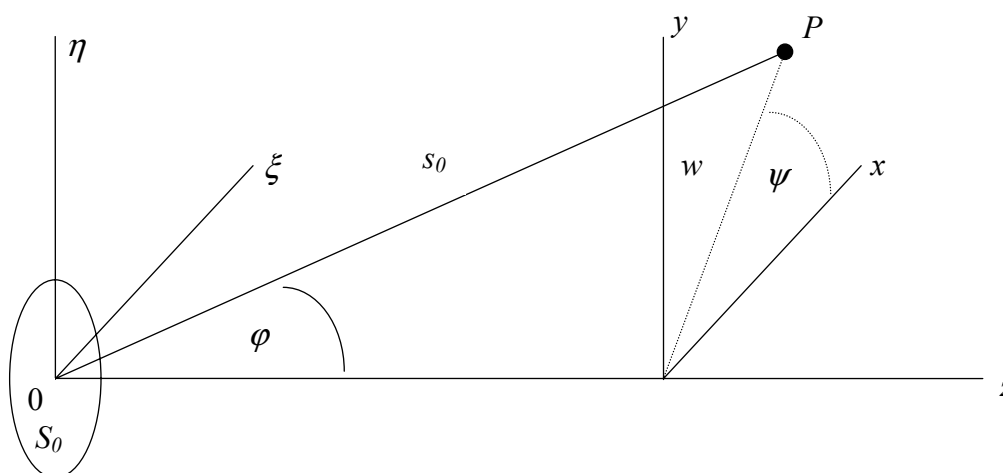
Obrázek 5.3: Kruhový otvor S_0 v jinak nepropustném stínítku S

Pro směrové cosiny vychází

$$l = \frac{w}{s_0} \cos \psi, \quad (5.31)$$

$$m = \frac{w}{s_0} \sin \psi, \quad (5.32)$$

kde w/s_0 vyjadřuje sinus úhlu φ mezi osou z a směrem pozorování (viz obr. 5.4).



Obrázek 5.4: Znázornění difrakce na kruhovém otvoru ($\sin \varphi \cong \varphi \cong w/s_0$)

Difrakční integrál teď může být vyjádřen následujícím způsobem

$$\begin{aligned} E(l, m) &= C_0 \int_{S_0} e^{-jk(l\xi + m\eta)} d\xi d\eta = C_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-jk\rho \sin\varphi (\cos\theta \cos\psi + \sin\theta \sin\psi)} \rho d\theta d\rho = \\ &= C_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-jk\rho \sin\varphi \cos(\theta - \psi)} \rho d\theta d\rho = C_0 \int_0^{ka \sin\varphi} 2\pi J_0(k\rho \sin\varphi) \rho d\rho, \end{aligned} \quad (5.33)$$

kde $J_0(k\rho \sin\varphi)$ je Besselova funkce nultého řádu, argumentu $k\rho \sin\varphi$. Další úpravou integrálu

(5.33) se získá [podle vzorce $\int_0^\alpha x J_0(x) dx = \alpha J_1(\alpha)$] výraz

$$E(\sin\varphi) = C_0 D \frac{2J_1(ka \sin\varphi)}{ka \sin\varphi}, \quad (5.34)$$

kde $D = \pi a^2$ je plocha kruhového otvoru a $J_1(ka \sin\varphi)$ je Besselova funkce prvního řádu argumentu $ka \sin\varphi$. V podmínkách experimentu je $\sin\varphi \ll \varphi$.

Optická intenzita se vyjádří s uvažováním (5.34) vztahem

$$I = I_0 \left[\frac{2J_1(ka\varphi)}{ka\varphi} \right]^2, \quad (5.35)$$

kde $I_0 = C_0^2 D^2 \frac{c\mathcal{E}_0}{2}$.

Rozložení intenzity $I(\varphi)$, pozorované v určité rovině kolmé k ose z se nazývá difrakčním obrazcem. Vzdálenost roviny pozorování od otvoru musí být dostatečně daleko (podle kritéria Fraunhoferovy difrakce). V opačném případě je nutno použít spojnou čočku a difrakci pozorovat v ohniskové rovině čočky.

Poloha prvního intenzitního minima v difrakčním obrazci se určí vztahem

$$w_{\min} = 1,22 \frac{\lambda L}{2a}, \quad (5.36)$$

kde L je vzdálenost roviny pozorování difrakčního obrazce od kruhového otvoru. Grafické znázornění rozložení intenzity v závislosti na argumentu $ka\varphi$ je na obr. 5.5.

Mají-li být splněny podmínky Fraunhoferovy difrakce na kruhovém otvoru bez přítomnosti jakékoliv čočky, musí poloměr kruhového otvoru a vyhovovat podmínce, která byla položena při Fraunhoferově aproximaci difrakčního integrálu (viz 5.14)

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{2z} \leq 0,1\lambda. \quad (5.37)$$

Kraj otvoru je definován rovnicí

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2, \quad (5.38)$$

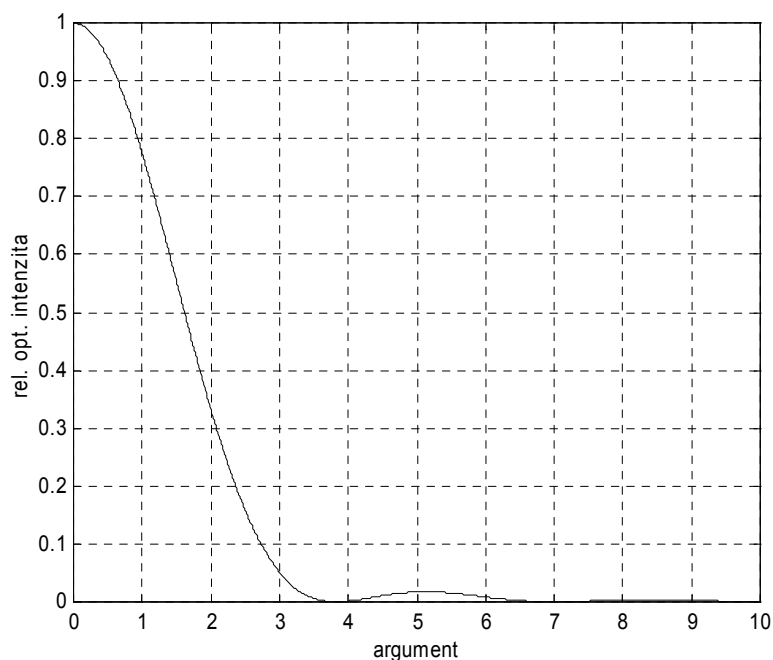
proto z nerovnosti (5.37) vychází podmínka pro Fraunhoferovu difrakci

$$a \leq 0,5\sqrt{\lambda z}. \quad (5.39)$$

Při dané vlnové délce a daném poloměru kruhového otvoru stanovuje souřadnice z , vyjádřená z (5.39)

$$z = \frac{(2a)^2}{\lambda} = z_0 \quad (5.40)$$

hranici mezi Fresnelovou a Fraunhoferovou oblastí difrakce. Tato hranice se také nazývá hranice blízké a vzdálené zóny záření. Značí se z_0 .



Obrázek 5.5: Rozložení optické intenzity při Fraunhoferově difrakci na kruhovém otvoru

6 Optické rezonátory

6.1 Mody optického rezonátoru

Intenzita elektrického pole uvnitř uzavřené kovové krychle o straně L je vyjádřena vztahem

$$\vec{E} = \vec{E}_{n_x, n_y, n_z} = \vec{E}_0 e^{-j\omega t} \cos\left(n_x \frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(n_y \frac{\pi y}{L}\right) \sin\left(n_z \frac{\pi z}{L}\right), \quad (6.1)$$

kde \vec{E}_0 je vektor amplitudy pole; ω je úhlová frekvence; x, y, z jsou souřadnicové osy a n_x, n_y, n_z jsou celá nezáporná čísla, tzv. indexy modu. Pro určité indexy modu lze nalézt určité prostorové rozložení pole, kterému se říká mod pole.

Pro frekvenci modů ν platí

$$\nu_{n_x, n_y, n_z} = \frac{c}{2L} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.2)$$

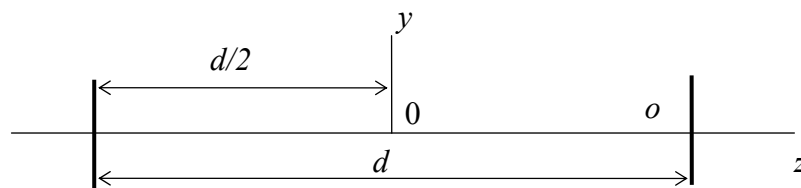
V případě laserů je součástí rezonátoru aktivní látka, kterou je třeba budit. Požadavkům buzení se vyhoví tak, že se z krychle odstraní čtyři „boční“ stěny a ponechají se dvě protilehlé rovnoběžné stěny, jejichž vzdálenost se označí d . Takto vznikne uspořádání, kterému se říká otevřený optický rezonátor. Protilehlé stěny rezonátoru jsou zrcadla zabezpečující několikanásobný průchod vlny aktivní látkou (kladná zpětná vazba). K vyvedení optického výkonu z rezonátoru se volí jedno zrcadlo částečně propustné.

Spektrální vlastnosti rezonátoru je možno objasnit teorií Fabryova-Perotova interferometru. Zrcadla rezonátoru mohou být kruhová o poloměru a nebo čtvercová se stranou $2a$. Kromě rovinných zrcadel se používají zrcadla s konečnými poloměry křivosti R_1, R_2 .

Při konstrukci otevřeného optického rezonátoru je splněna nerovnost

$$d \gg 2a \gg \lambda. \quad (6.3)$$

Je třeba si uvědomit, že rozměry optického rezonátoru značně převyšují vlnovou délku optického záření, čímž dochází k principiální odlišnosti optických a mikrovlnných rezonátorů. Otevřený optický rezonátor se čtvercovými rovinnými zrcadly je znázorněn na obr. 6.1. V souladu se zvyklostí se budou modová čísla značit m, n, q (u pravoúhlých zrcadel) nebo p, l, q (u kruhových zrcadel), viz tab. 6.1.



Obrázek 6.1: Znázornění optického rezonátoru
(*o* - optická osa rezonátoru, *d* – vzdálenost mezi zrcadly, 0xyz - vztažná soustava souřadnic)

K označení jednotlivých módů se použijí počáteční písmena TEM (transverse electro-magnetic) s přidáním indexů *m*, *n*, *q* nebo *p*, *l*, *q*: TEM_{*m,n,q*}; TEM_{*p,l,q*}. Následující text bude věnován rezonátoru s rovinnými pravoúhlými zrcadly.

Tabulka 6.1: Značení indexů modů.

Index modu	pravoúhlá symetrie zrcadel	kruhová symetrie zrcadel
n_x	m	p
n_y	n	l
n_z	q	q

Rozložení pole v takovém rezonátoru je nyní dáno výrazem

$$\vec{E}_{m,n,q} = \vec{E}_0 e^{-j\omega t} \sin\left(m \frac{\pi x}{2a}\right) \sin\left(n \frac{\pi y}{2a}\right) \sin\left(q \frac{\pi z}{d}\right) \quad (6.4)$$

a frekvence módů je daná výrazem

$$\nu_{m,n,q} = \frac{c}{2} \left[\left(\frac{m}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n}{2a} \right)^2 + \left(\frac{q}{d} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (6.5)$$

Pro vlnový vektor \vec{k} , přiřazený libovolné vlně v rezonátoru, platí

$$\vec{k} = \vec{k}_x + \vec{k}_y + \vec{k}_z \quad (6.6)$$

a podle předcházejících úvah je

$$|\vec{k}_x|, |\vec{k}_y| \ll |\vec{k}_z|. \quad (6.7)$$

Jelikož vlnové číslo a frekvenci váže vztah

$$k = \frac{2\pi\nu}{c}, \quad (6.8)$$

může se frekvence modů vyjádřit pomocí absolutních hodnot složek vlnového vektoru

$$\nu_{m,n,q} = \frac{c}{2\pi} \left(|\vec{k}_x|^2 + |\vec{k}_y|^2 + |\vec{k}_z|^2 \right). \quad (6.9)$$

Porovnáním vztahů (6.5) a (6.9) se získá $|\vec{k}_x| = \pi \frac{m}{2a}$, $|\vec{k}_y| = \pi \frac{n}{2a}$, $|\vec{k}_z| = \pi \frac{q}{d}$

a podle (6.7) bude

$$m, n \ll q. \quad (6.10)$$

S uvažováním poslední nerovnosti se upraví výraz pro frekvenci modů (6.5) na tvar

$$\nu_{m,n,q} = \frac{c}{2} \frac{q}{d} \left[1 + \frac{m^2 + n^2}{\left(2a \frac{q}{d}\right)^2} \right]^{1/2} \quad (6.11)$$

a použije-li se vzorec $(1 + \varepsilon)^{1/2} \doteq 1 + \frac{1}{2} \varepsilon$, lze (6.11) upravit na tvar

$$\nu_{m,n,q} \doteq \frac{c}{2} \frac{q}{d} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{m^2 + n^2}{(2a)^2} \frac{d^2}{q^2} \right] \quad (6.12)$$

nebo

$$\nu_{m,n,q} \doteq \frac{c}{2} \left[\frac{q}{d} + \frac{1}{2} \frac{m^2 + n^2}{q} \frac{d}{4a^2} \right]. \quad (6.13)$$

Zanedbá-li se v (6.12) v závorce druhý člen vůči 1, platí přibližně $\nu_{m,n,q} = \nu_q \doteq \frac{c}{2} \frac{q}{d}$

neboli $d \doteq q \frac{\lambda_q}{2}$.

Index modu q se vztahuje k podélné souřadnicové ose z , proto mody jím označované se nazývají "*podélné mody*". Indexy modů m, n se vztahují k příčným souřadnicovým osám x, y a mody jimi označované se nazývají "*příčné mody*".

Frekvenční vzdálenost podélných modů $\Delta \nu_q$ se určí vztahem

$$\Delta \nu_q = \nu_{m,n,q+1} - \nu_{m,n,q} = \frac{c}{2d} \quad (6.14)$$

a frekvenční vzdálenost příčných modů $\Delta \nu_m$ vztahem

$$\Delta \nu_m = \nu_{m+1,n,q} - \nu_{m,n,q} = \frac{c}{2} \frac{(m+1)^2 - m^2}{2q} \frac{d}{4a^2} = \frac{cd}{8qa^2} \left(m + \frac{1}{2} \right). \quad (6.15)$$

Veličiny před závorkou lze upravit pomocí (6.14):

$$\Delta \nu_m = \Delta \nu_q \frac{d^2}{4qa^2} \left(m + \frac{1}{2} \right). \quad (6.16)$$

Pro ohodnocení difrakčních ztrát v optickém rezonátoru se definuje tzv. "*Fresnelovo číslo*" N vztahem

$$N = \frac{\alpha_g}{4\alpha_d}, \quad (6.17)$$

kde $\alpha_g = \frac{2a}{d}$ je úhlový rozměr jedné strany zrcadla vzhledem ke středu protilehlého zrcadla a

$\alpha_d = \frac{\lambda_q}{2a}$ je úhlová vzdálenost prvního difrakčního minima od osy rezonátoru při difrakci vlny na jednom ze zrcadel rezonátoru. Po dosazení příslušných vztahů je

$$N = \frac{a^2}{\lambda_q d}, \quad (6.18)$$

kde λ_q je vlnová délka modu $0,0,q$. Upraví-li se výraz pro vzdálenost příčných modů (6.16) pomocí Fresnelova čísla (6.18) a uváží-li se platnost vztahu $d = q \frac{\lambda_q}{2}$, získá se tvar

$$\Delta \nu_m = \Delta \nu_q \frac{m + \frac{1}{2}}{8N}. \quad (6.19)$$

Podobným způsobem lze vyjádřit vzdálenost příčných modů

$$\Delta \nu_n = \Delta \nu_q \frac{n + \frac{1}{2}}{8N}. \quad (6.20)$$

Spektrální rozložení modů rezonátoru je znázorněno na obr.6.2, přičemž se předpokládají nekonečně úzké rezonanční čáry.

m	0	1	1 ...	0 ...	0 ...
n	0	0	1 ...	0 ...	0 ...
q	q	q	$q \dots$	$q+1 \dots$	$q+2 \dots$
	Δv_m	Δv_n	Δv_q	Δv_q	

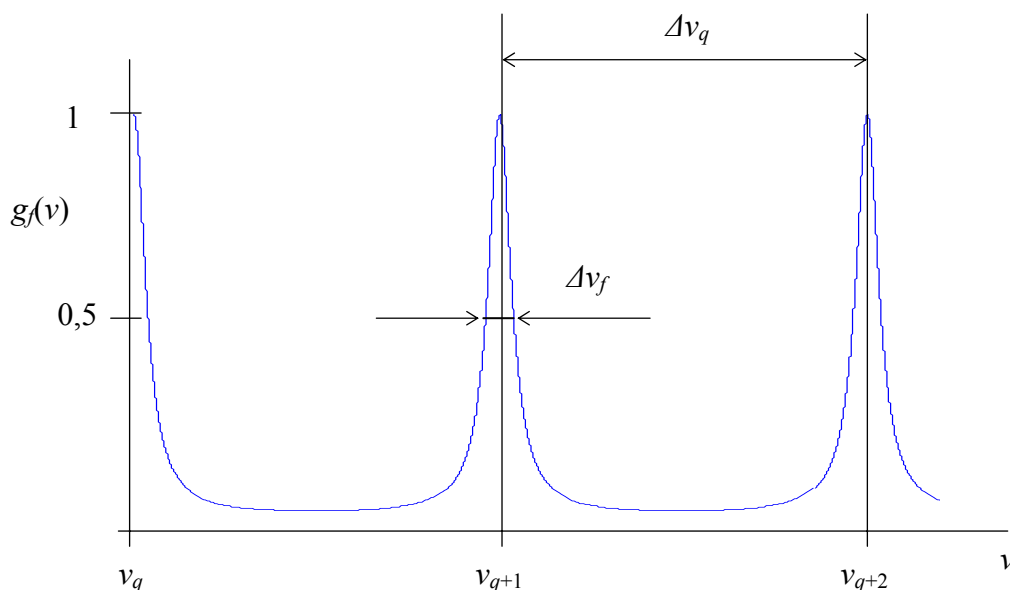
Obrázek 6.2: Spektrální rozložení modů planparalelního optického rezonátoru s pravoúhlými zrcadly

V reálném případě mají rezonanční čáry nenulovou šířku a určitý tvar. Šířka rezonanční čáry se vyjadřuje pomocí "doby života fotonů" v rezonátoru τ_f . Pro šířku rezonanční čáry $\Delta \nu_f$, vyjádřené pomocí τ_f , platí vztah

$$\Delta \nu_f = \frac{1}{2\pi\tau_f}. \quad (6.21)$$

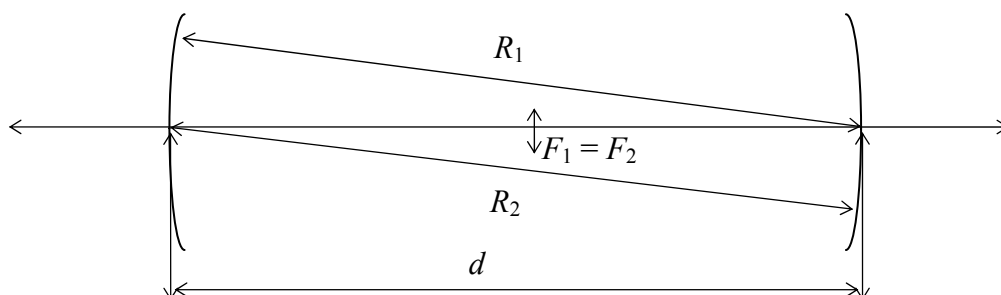
Podrobné vyjádření τ_f na základě zvážení všech ztrát v rezonátoru bude uvedeno v přednášce o laserech. Obecně platí, že výkonové ztráty rezonanční čáru rozšiřují.

Funkce tvaru rezonanční čáry $g(\nu)$ optického rezonátoru pro podélné mody je uvedena na obr. 6.3. Zatímco podélné mody jsou frekvenčně dobře rozlišitelné, příčné mody mohou splývat a to tím více, čím větší budou ztráty v rezonátoru.



Obrázek 6.3: Funkce tvaru rezonanční čáry optického rezonátoru Fabryova-Perotova typu

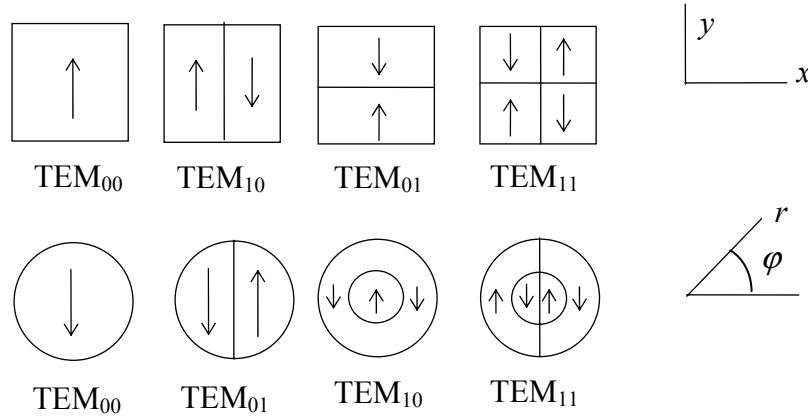
Pro praktické použití je výhodnější místo rovinných zrcadel použít v optickém rezonátoru zrcadla sférická. V určitém rozmezí hodnot poloměrů křivosti zrcadel R_1 , R_2 (při daném d) bude mít takový rezonátor menší difrakční ztráty a snadněji se nastaví do stabilní pracovní geometrické konfigurace. Speciálním typem optického rezonátoru se sférickými zrcadly je tzv. "konfokální rezonátor" (viz obr.6-4) s parametry $R_1 = R_2 = d$.



Obrázek 6.4: Konfokální optický rezonátor

V případě kruhových zrcadel má pole v rezonátoru charakter Laguerrových-Gaussových svazků. Na zrcadlech rezonátoru vytvářejí tyto svazky určité rozložení intenzity elektrického pole, které je pro vybrané svazky (mody) znázorněno na obr. 6.5. Modový index q , vztahující se k ose z , není uváděn.

Podobně jako je modový index q roven počtu uzlů stojaté vlny v rezonátoru podél osy z , jsou modové indexy m , n rovny počtu uzlů podél os x , y , což je patrné z obr. 6.5. (V případě kruhových zrcadel se používá válcová soustava souřadnic $0r\varphi z$. Počet uzlů v radiálním směru r je roven p ; počet uzlů v azimutálním směru φ je roven $2l$.)



Obrázek 6.5: Plošné rozložení intenzity elektrického pole na zrcadlech s pravoúhlou a kruhovou symetrií (šipky reprezentují vektor intenzity elektrického pole)

V analytickém vyjádření intenzity elektrického pole se v případě kruhových zrcadel vyskytuje součin Laguerrova polynomu a Gaussovy funkce. Jedná-li se o mod TEM_{00} (základní mod), nabývá Laguerrov polynom jednotkové hodnoty a svazky v rezonátoru přecházejí v Gaussov svazek, jehož analytické vyjádření je:

$$E = E_{\max} e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}}, \quad (6.22)$$

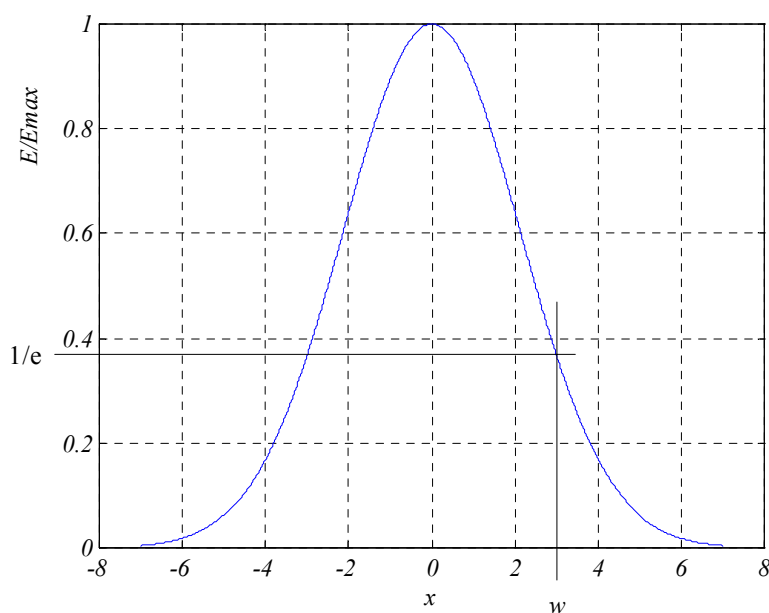
kde $w(z)$ je taková kolmá vzdálenost od osy rezonátoru, ve které absolutní hodnota vektoru intenzity elektrického pole klesá vůči své maximální hodnotě (na ose) e -krát. Veličina $2w(z)$, která je závislá na souřadnici z , se nazývá "šířka" svazku. Na obr. 6.6 je graficky znázorněno jednorozměrné Gaussovo rozložení velikosti vektoru intenzity elektrického pole na ose x při konstantní souřadnici z .

V rovině xOz opisuje kraj svazku hyperbolickou křivku. Ve všech rovinách kolmých na osu z vytváří kraj svazku kružnice. V rovině xOy je svazek nejužší. Tomuto místu se říká "krček" svazku. Pro šířku svazku v krčku vyplývá z teorie konfokálních rezonátorů vztah $2w_0 = 2\sqrt{\frac{d\lambda}{2\pi}}$ a pro šířku svazku na zrcadlech ($z = d/2$) platí $2w = 2w_0\sqrt{2}$.

Z podrobné analýzy konfokálního rezonátoru s kruhovými zrcadly vyplývá následující vztah pro určení frekvence modů:

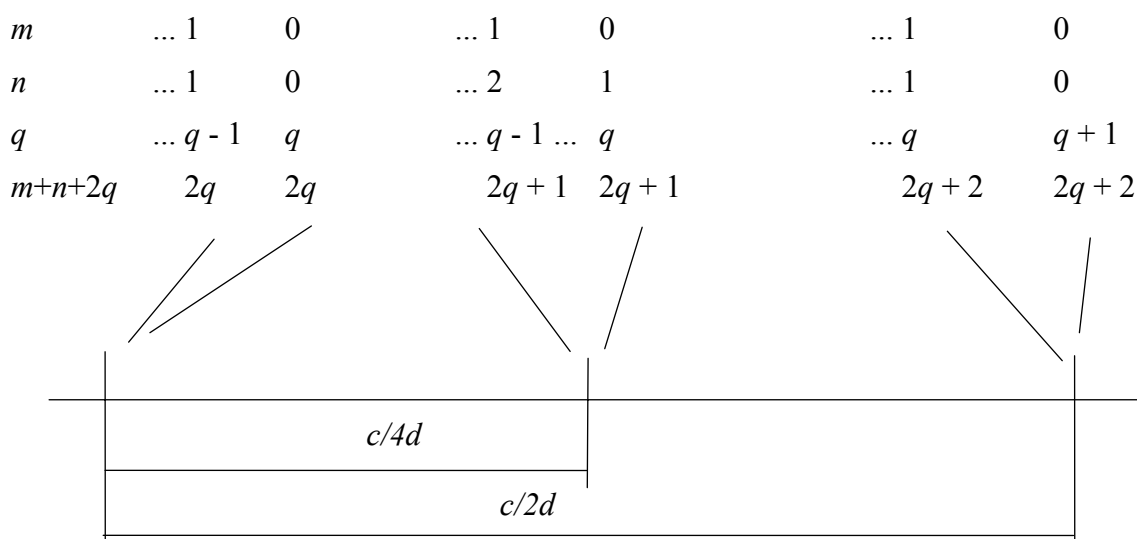
$$\nu_{p,l,q} = \frac{c}{2d} \left(q + \frac{2p+l+1}{2} \right), \quad (6.23)$$

z něhož lze odvodit frekvenční vzdálenosti $\Delta\nu_q = \frac{c}{2d}$; $\Delta\nu_m = \Delta\nu_n = \Delta\nu_p = \Delta\nu_l = \frac{c}{4d}$.



Obrázek 6.6: Jednorozměrné Gaussovo rozložení

Spektrální rozložení módů v konfokálním rezonátoru s pravoúhlými zrcadly je uvedeno na obr. 6.7. Mody, pro něž platí $m + n + 2q = \text{konst.}$, mají stejnou frekvenci.



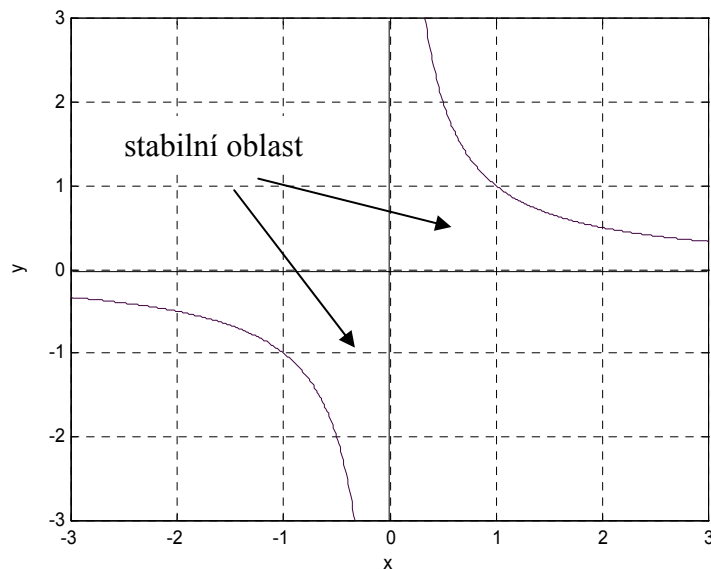
Obrázek 6.7: Spektrální rozložení módů v konfokálním rezonátoru s pravoúhlými zrcadly.

Kromě konfokálních rezonátorů existují i jiné sférické rezonátory, avšak poloměry křivosti zrcadel nelze volit libovolně. Pro volbu R_1 , R_2 plyne z teorie rezonátorů tzv. "podmínka stability" rezonátoru:

$$0 \leq \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) \leq 1. \quad (6.24)$$

Optický rezonátor, jehož parametry vyhovují nerovnosti (6.24), se nazývá stabilním rezonátorem.

Grafické znázornění podmínky stability rezonátoru je uvedeno na obr. 6.8. Z obrázku je vidět, že planparalelnímu rezonátoru odpovídají souřadnice (1,1), konfokálnímu rezonátoru (0,0) a oba rezonátory jsou na mezi stability. Praktický návrh rezonátoru bude volen tak, aby jeho souřadnice zobrazovaly bod ležící ve stabilní oblasti.



Obrázek 6.8: Graf podmínky stability optického rezonátoru; $y = \left(1 - \frac{d}{R_2}\right)$ a $x = \left(1 - \frac{d}{R_1}\right)$

6.2 Parametry Gaussova svazku

Vlnový charakter pole ve svazku musí vyhovovat Helmholtzově rovnici

$$\nabla^2 \dot{E} + k^2 \dot{E} = 0, \quad (6.25)$$

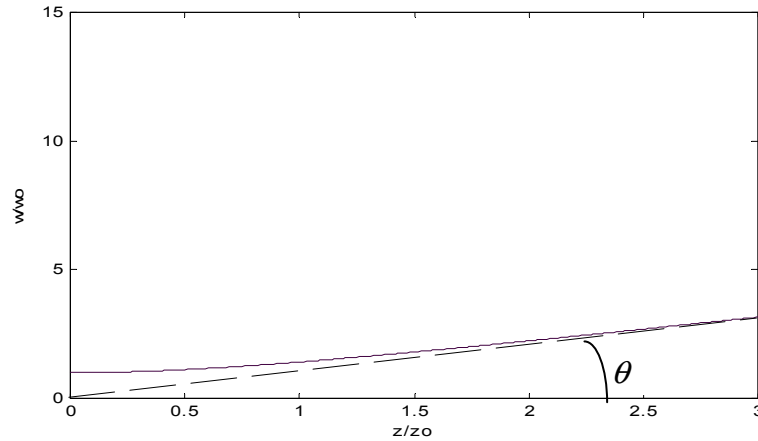
kde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ a $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (předpokládá se monochromatická lineárně polarizovaná vlnu šířící se v těsné blízkosti osy z).

Prostředí, ve kterém se svazek šíří, je homogenní, izotropní, lineární bez volných nábojů, s jednotkovým indexem lomu. Osa svazku je totožná s osou z . Řešením rovnice (6.25) se dospívá k následujícím závěrům:

Vztah vyjadřující závislost pološířky svazku na souřadnici z je

$$w(z) = w_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (6.26)$$

kde $z_0 = \frac{kw_0^2}{2}$ je hranice blízké a vzdálené zóny záření. Veličina $2w_0$ vyjadřuje šířku svazku v krčku. Graf závislosti kraje svazku na ose z tvoří hyperbolu (viz obr. 6.9).



Obrázek 6.9: Kraj Gaussova svazku

Úhel θ , který svírá asymptota hyperboly s osou svazku, se nazývá úhel divergence. Hranice blízké a vzdálené zóny se nalézají v místě největší křivosti hyperboly. Pro úhel divergence θ platí

$$\theta = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w(z)}{z} = \frac{2}{kw_0}. \quad (6.27)$$

Dodatečný fázový posuv vlny, ke kterému dochází v závislosti na souřadnici z se označuje $\varphi(z)$ a platí $\operatorname{tg} \varphi(z) = \frac{z_0}{z}$.

Komplexní amplituda pole Gaussova svazku má po příslušných úpravách tvar

$$\dot{E}(x, y, z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \left(1 + j \frac{z}{z_0} \right)} e^{-j \left[kz + \varphi(z) - \frac{\pi}{2} \right]}. \quad (6.28)$$

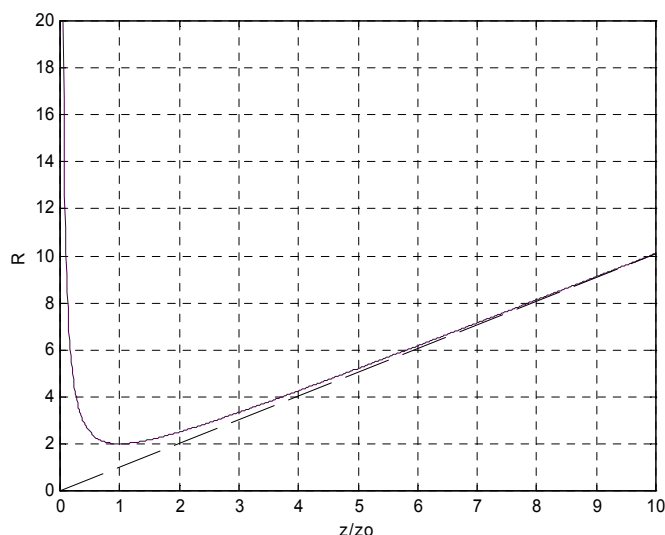
Pomocí rovnice konstantní fáze:

$$-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \frac{z}{z_0} - kz - \varphi(z) + \frac{\pi}{2} = \text{konst} \quad (6.29)$$

lze odvodit, že vlnoplochy Gaussova svazku vytvářejí v prostoru rotační paraboloidy. Úpravou a diferencováním výrazu (6.29) lze vyjádřit poloměr křivosti vlnoplochy

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right]. \quad (6.30)$$

Grafické zobrazení vztahu (6.30) je na obr.6.10. Nejmenší hodnoty veličina R nabývá pro $z = z_0$. V krčku svazku ($z = 0$) přechází vlnoplocha v rovinu ($R = \infty$) a pro z rostoucí nade všechny meze se graf asymptoticky blíží k přímce ($R = z$) se směrnici $\pi/4$. Obvykle se vlnoplochy pro $z \ll z_0$ aproximují částí roviny a pro $z \gg z_0$ částí koule.



Obrázek 6.10: Závislost poloměru křivosti Gaussova svazku na z

Vyjádření pole Gaussova svazku (6.28) se zjednoduší definováním tzv. "komplexního parametru" svazku \dot{q} . Význam veličiny \dot{q} se ukáže úpravou (6.28):

$$\begin{aligned}
\dot{E} &= E_0 \frac{w_0}{w} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2} \left(1 + j \frac{z}{z_0} \right) \right] e^{-j \left(kz + \varphi - \frac{\pi}{2} \right)} = \\
&= E_0 \frac{w_0}{w} \exp \left[-\left(x^2 + y^2 \right) \left(\frac{1}{w^2} + j \frac{z_0}{w_0^2 z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right]} \right) \right] e^{-j \left(kz + \varphi - \frac{\pi}{2} \right)} = \\
&= E_0 \frac{w_0}{w} \exp \left[-\left(x^2 + y^2 \right) \left(\frac{1}{w^2} + j \frac{z_0}{w_0^2 R} \right) \right] e^{-j \left(kz + \varphi - \frac{\pi}{2} \right)} = \\
&= E_0 \frac{w_0}{w} \exp \left[-\left(x^2 + y^2 \right) \left(j \frac{k}{2} \right) \left(\frac{1}{R} - j \frac{2}{kw^2} \right) \right] e^{-j \left(kz + \varphi - \frac{\pi}{2} \right)}.
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Z posledního výrazu je vidět, že pro $z = 0$ je výsledná fáze Gaussovy vlny rovna nule (jedná se o rovinnou vlnu s Gaussovým rozložením intenzity pole):

$$E = E_0 e^{-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}}. \tag{6.32}$$

Pro $z \gg z_0$ se Gaussova vlna projevuje jako vlna sférická s poloměrem křivosti $R = z$:

$$\dot{E} = E_0 \frac{w_0}{\theta z} e^{-jk \frac{x^2 + y^2}{2R(z)}} e^{-j \left(kz - \frac{\pi}{2} \right)}. \tag{6.33}$$

Parametry $w(z)$ a $R(z)$ je Gaussův svazek plně určen. Komplexní parametr svazku se definujeme vztahem

$$\frac{1}{\dot{q}} = \frac{1}{R} - j \frac{2}{kw^2} \tag{6.34}$$

a výraz (6.28) lze nyní vyjádřit (se zdůrazněním závislosti veličin w , \dot{q} , φ na souřadnici z)

$$\dot{E} = E_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-jk \frac{x^2 + y^2}{2\dot{q}(z)}} e^{-j \left(kz + \varphi(z) - \frac{\pi}{2} \right)}. \tag{6.35}$$

Komplexní parametr svazku se používá i v jiném tvaru, který lze získat z výrazu (6.34) uvážením (6.26), (6.30) a příslušnou úpravou:

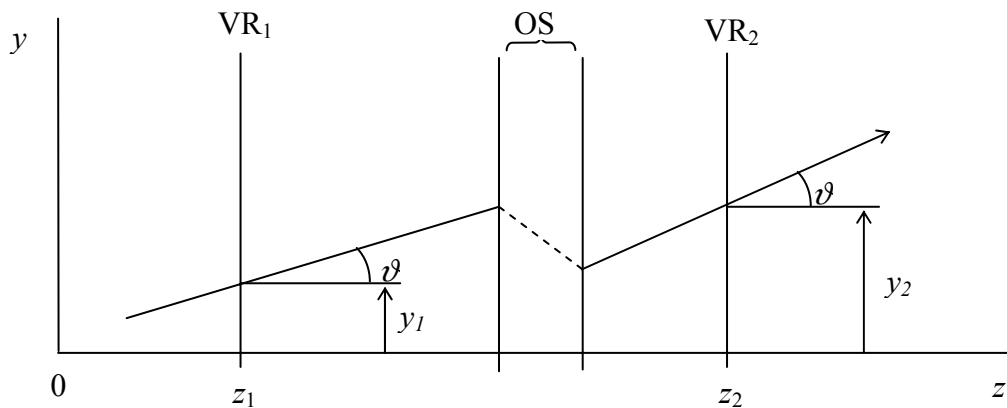
$$\dot{q} = z + jz_0. \quad (6.36)$$

Porovnáním vztahů (6.33) a (6.35) je vidět, že veličina \dot{q} má pro Gaussovu vlnu stejný význam jako veličina R pro vlnu sférickou.

7 Maticová optika

7.1 Matice transformace paprsku

Pro vyjádření transformace jednoho paprsku obecnou optickou soustavou se v soustavě souřadnic $0xyz$ volí vztažné roviny VR_1 a VR_2 (viz obr.7.1), kolmé k ose z s definovanými polohami z_1, z_2 . Předpokládáme osovou symetrii optické soustavy a položíme v našich úvahách $x' = 0$. Vztažnou rovinu VR_1 protíná paprsek s úhlem ϑ_1 v bodě se souřadnicí y_1 (viz obr.7.1). Po transformaci optickou soustavou OS mění paprsek směr a vzdálenost od osy z tak, že vztažnou rovinu VR_2 protíná s úhlem ϑ_2 v bodu se souřadnicí y_2 . Kladný smysl souřadnic $y_1, y_2, \vartheta_1, \vartheta_2$ je na obr.7.1 znázorněn šipkami. Pro opačný směr šipek mají uvedené veličiny zápornou hodnotu.



Obrázek 7.1: Transformace paprsku obecnou optickou soustavou ($0xyz$ - vztažná souřadnicová soustava; VR_1, VR_2 - vztažné roviny; OS - obecná optická soustava)

Paprsek je plně určen veličinami y a ϑ . Mezi výstupními (y_2, ϑ_2) a vstupními (y_1, ϑ_1) hodnotami těchto veličin je lineární závislost, vyjádřená rovnicemi

$$y_2 = Ay_1 + B\vartheta_1, \quad (7.1)$$

$$\vartheta_2 = Cy_1 + D\vartheta_1 \quad (7.2)$$

nebo v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vartheta_1 \end{pmatrix}, \quad (7.3)$$

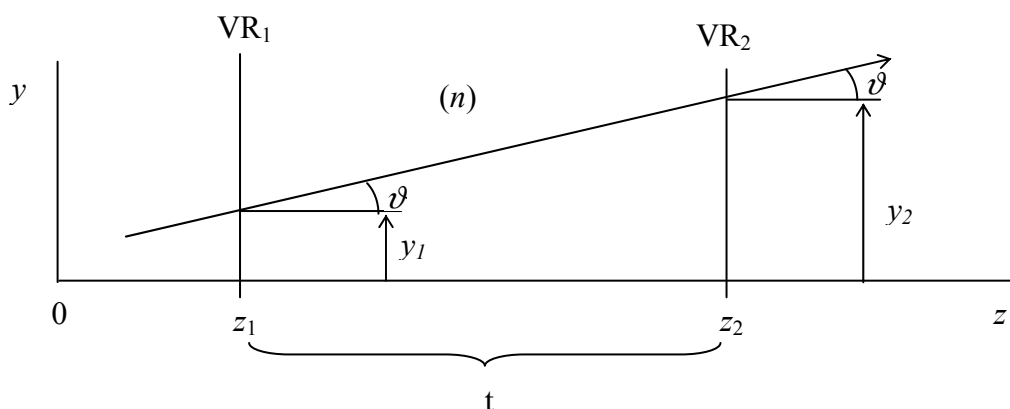
přičemž platí $AD - BC = 1$. Matice $\begin{pmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vartheta_1 \end{pmatrix}$ se nazývají "paprskové vektory" s označením

$\mathbf{K}_2, \mathbf{K}_1$ a matice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ se nazývá "přenosová matice paprsku" s označením \mathbf{M} . Rovnici (7.3) lze potom zapsat v jednodušším tvaru

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{M}\mathbf{K}_1. \quad (7.4)$$

Při transformaci paprsku přicházejí do úvahy dva základní procesy:

- průchod prostředím (homogenním, izotropním, dielektrickým s indexem lomu n),
- lom na ploše, která je hranicí dvou odlišných prostředí s různými indexy lomu.



Obrázek 7.2: Průchod paprsku mezi dvěma vztažnými rovinami (VR_1, VR_2 - vztažné roviny, n - index lomu prostředí)

Pro průchod paprsku prostředím platí (viz obr.7.2)

$$y_2 = y_1 + t\vartheta_1, \quad (7.5)$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_1, \quad (7.6)$$

kde t je délka průchodu ($t = z_2 - z_1$). Význam rovnic je patrný z obr.7.2. Pro zjednodušení zápisu transformace je výhodné zavést optické úhly vztahem

$$\Theta = n\vartheta \quad (7.7)$$

a redukované délky vztahem

$$T = \frac{t}{n}, \quad (7.8)$$

kde n je index lomu prostředí.

Dosadí-li se (7.7) a (7.8) do (7.5) a (7.6), získají se rovnice

$$y_2 = y_1 + T\Theta_1, \quad (7.9)$$

$$\Theta_2 = \Theta_1. \quad (7.10)$$

Pomocí rovnic (7.9) a (7.10) se odvodí *matici transformace průchodem* \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

Pro lom na ploše s poloměrem křivosti r platí (viz obr.7.3)

$$y_1 = y_2, \quad (7.12)$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \doteq \frac{\alpha}{\beta} \doteq \frac{n_2}{n_1}, \quad (7.13)$$

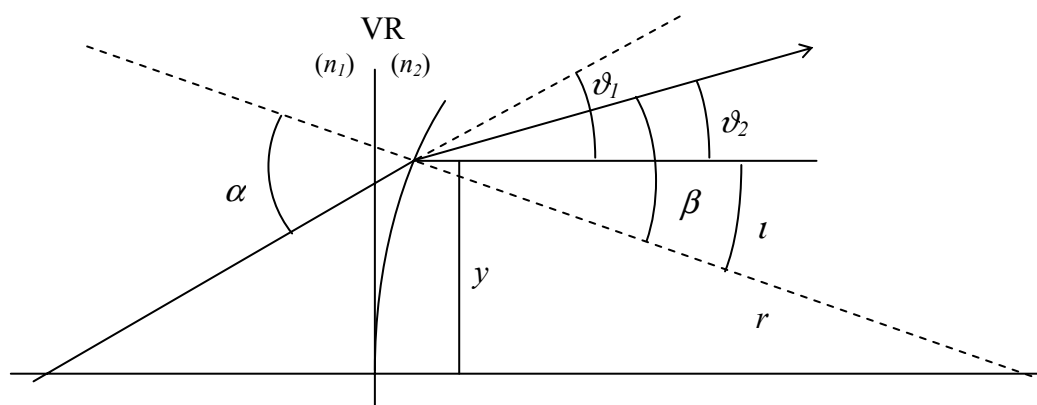
kde

$$\alpha = \vartheta_1 + i, \quad (7.14)$$

$$\beta = \vartheta_2 + i. \quad (7.15)$$

Úpravou rovnice (7.13) se získá vztah

$$n_1 \alpha = n_2 \beta. \quad (7.16)$$



Obrázek 7.3: Lom paprsku na ploše
(VR - vztažná rovina, n_1 , n_2 - indexy lomu prostředí)

Pomocný úhel i v rovnicích (7.14) a (7.15) lze vyjádřit poměrem y/r . Po dosazení do (7.16) je

$$n_1 \left(\vartheta_1 + \frac{y_1}{r} \right) = n_2 \left(\vartheta_2 + \frac{y_1}{r} \right) \quad (7.17)$$

nebo

$$\Theta_1 + \frac{n_1 y_1}{r} = \Theta_2 + \frac{n_2 y_2}{r}, \quad (7.18)$$

což po úpravě dává rovnici

$$\Theta_2 = -\frac{n_2 - n_1}{r} y_1 + \Theta_1, \quad (7.19)$$

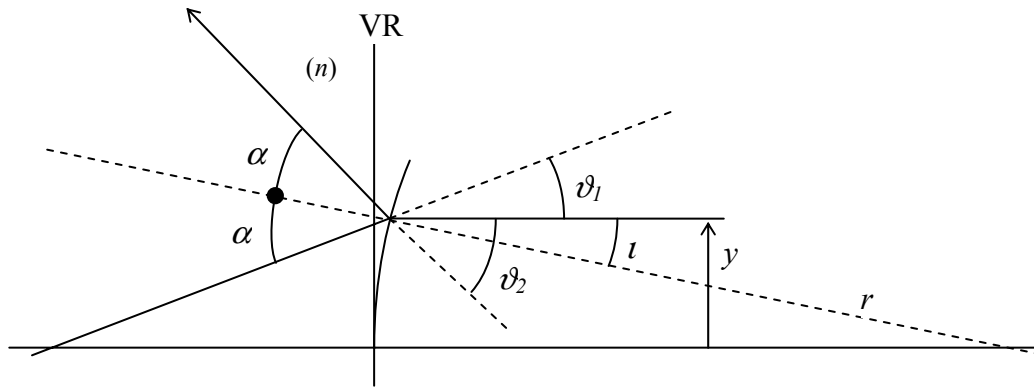
kde $(n_2 - n_1)/r$ vyjadřuje optickou mohutnost lámavé plochy s označením P .

Pomocí rovnic (7.12) a (7.19) se odvodí *matice transformace lomem* \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.20)$$

kde P je optická mohutnost lámavé plochy.

Poloměr křivosti r má na obr.7.3 kladnou hodnotu. Při opačném zakřivení plochy se definujeme poloměr křivosti se záporným znaménkem.



Obrázek 7.4: Odraz paprsku od zrcadla
(VR - vztážná plocha, n - index lomu prostředí)

Maticí typu \mathbf{R} lze vyjádřit rovněž odraz paprsku od zrcadla (viz obr.7.4). Podobným způsobem jako v předcházejícím případě lze pro matici \mathbf{R} vyjadřující odraz odvodit výraz

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n/r & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.21)$$

který můžeme se formálně získat také tak, že v optické mohutnosti se uvede index lomu vztážený k odraženému paprsku (šířícímu se v záporném směru osy z) se záporným znaménkem. Optická mohutnost odrazné plochy se potom vyjádří vztahem

$$P = \frac{(-n) - n}{r} = -\frac{2n}{r}. \quad (7.22)$$

Po dosazení vztahu (7.22) do obecného tvaru matice typu \mathbf{R} (7.20) se dostane výraz (7.21).

V případě rovinné lámavé plochy nebo rovinného zrcadla ($r \rightarrow \infty$), je

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.23)$$

což představuje jednotkovou matici.

Pomocí matic typu \mathbf{T} a \mathbf{R} lze sestavit výslednou matici transformace tak, že (v souladu s obr.7.5) se postupně vyjadřují paprskové vektory od výstupu optické soustavy směrem ke vstupu podle rovnice

$$\mathbf{K}_8 = \mathbf{R}_4 \mathbf{K}_7 = \mathbf{R}_4 \mathbf{T}_3 \mathbf{K}_6 = \mathbf{R}_4 \mathbf{T}_3 \mathbf{R}_3 \mathbf{K}_5 = \mathbf{L} = \mathbf{M} \mathbf{K}_1, \quad (7.24)$$

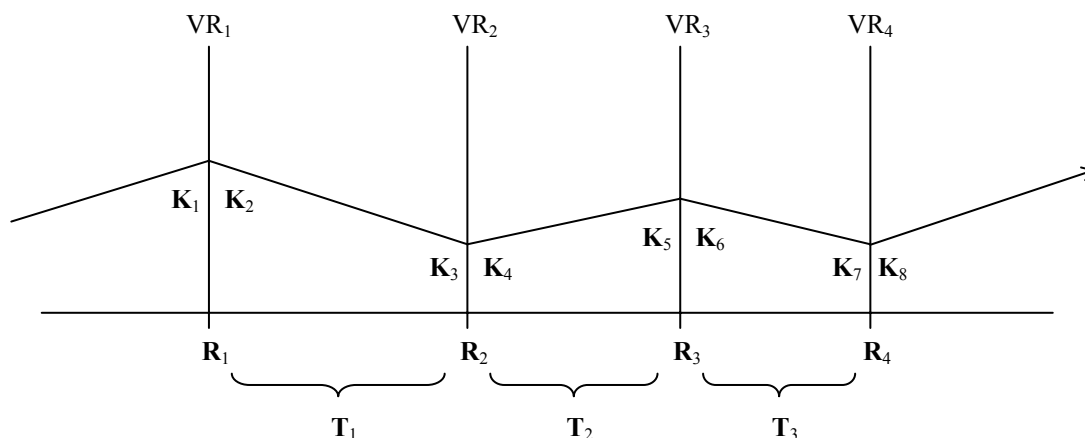
kde

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}_4 \mathbf{T}_3 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{R}_1 \quad (7.25)$$

a platí

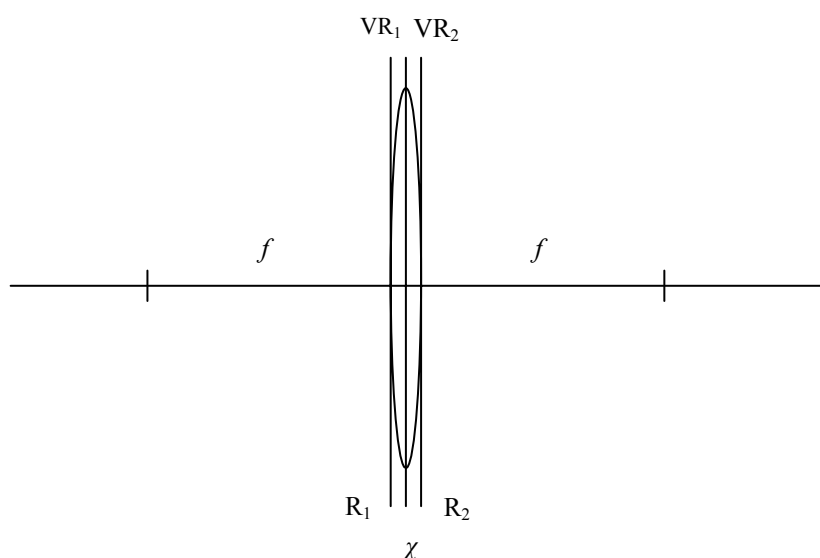
$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_8, \quad (7.26)$$

kde \mathbf{M}^{-1} je inverzní matice k matici \mathbf{M} .



Obrázek 7.5: Postupný průchod paprsku lámavými plochami a vrstvami prostředí mezi nimi
(VR_i - vztažné roviny, \mathbf{K}_i - paprskové vektory, \mathbf{T}_i , \mathbf{R}_i – dílčí matice transformace)

Mezi nejdůležitější případy transformace patří průchod paprsku tenkou čočkou. Rozeberou se dva případy. V prvním se volí vztažné roviny tak, že splývají s hlavní rovinou tenké čočky (tloušťka čočky se zanedbává, viz obr. 7.6).



Obrázek 7.6: Tenká čočka
(χ - hlavní rovina tenké čočky; F , F' - předmětové a obrazové ohnisko; f - ohnisková vzdálenost)

Matice transformace tenké čočky pro uvedený případ se sestaví podle postupu naznačeného rovnicí (7.25)

$$\mathbf{M}_\chi = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1. \quad (7.27)$$

S přihlédnutím k výrazu (7.20) se po dosazení získá výraz

$$\mathbf{M}_\chi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sum_i P_i & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.28)$$

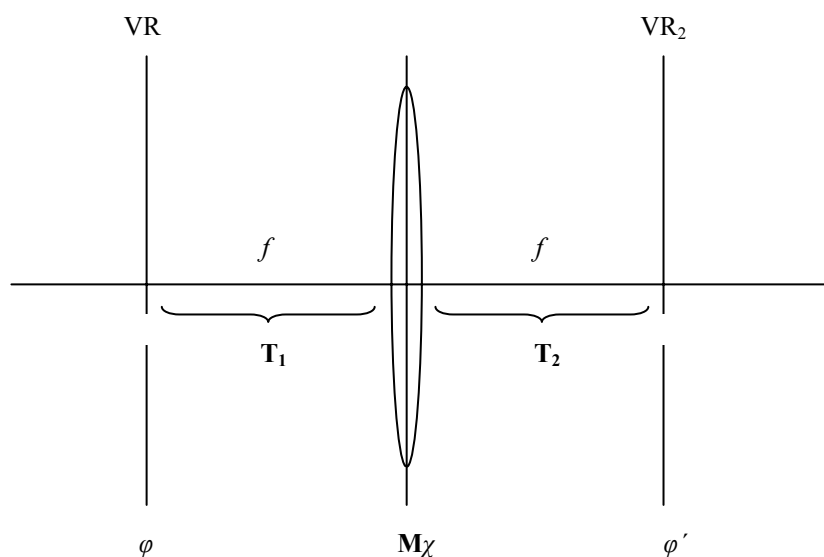
kde (podle geometrické optiky)

$$\sum_i P_i = P_1 + P_2 = \frac{1}{f} \quad (7.29)$$

a po dosazení (7.29) do (7.28) je výsledný tvar

$$\mathbf{M}_\chi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.30)$$

Ve druhém případě se volí vztažné roviny totožné s ohniskovými rovinami (viz obr.7.7).



Obrázek 7.7: Tenká čočka
(φ, φ' - předmětová a obrazová ohnisková rovina)

Matici transformace tenké čočky v tomto případě označíme \mathbf{M}_φ a opět ji sestavíme podle známého pravidla:

$$\mathbf{M}_\varphi = \mathbf{T}_2 \mathbf{M}_\chi \mathbf{T}_1. \quad (7.31)$$

Dosazením (7.30) a upraveného výrazu (7.11) do (7.31)

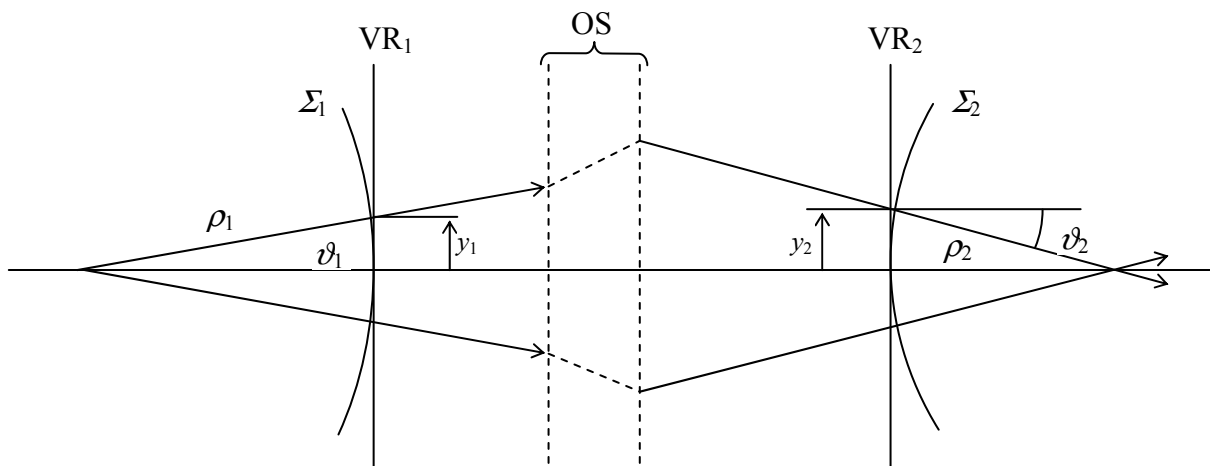
$$\mathbf{M}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

se po úpravě získá výsledný tvar

$$\mathbf{M}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -1/f & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.33)$$

7.2 Matice transformace svazku

Nyní se uvažuje transformace ne jednoho, ale celého svazku paprsků, vycházejícího z jediného bodu Z na ose z' (viz obr.7.8). Celý svazek paprsků je na dané vztahné rovině úplně popsán poloměrem křivosti ρ vlnoplochy Σ . Jedná-li se o divergentní vlnu (Σ_1), definuje se poloměr křivosti se znaménkem kladným ($\rho_1 > 0$), v případě konvergentní vlny (Σ_2) se znaménkem záporným ($\rho_2 < 0$).



Obrázek 7.8: Transformace svazku paprsků optickou soustavou (Σ_1, Σ_2 - vlnoplochy; VR_1, VR_2 - vztahné roviny; OS - optická soustava)

Poloměr křivosti vlnoplochy je na dané vztažné rovině konstantní pro všechny paprsky a lze jej pro paraxiální paprsky stanovit poměrem (viz obr.7.8)

$$\rho_1 = \frac{y_1}{\vartheta_1}, \quad (7.34)$$

$$\rho_2 = \frac{y_2}{\vartheta_2}. \quad (7.35)$$

V analogii s redukovanou délkou se zavádí redukovaný poloměr křivosti vlnoplochy vztahem

$$R = \frac{\rho}{n}, \quad (7.36)$$

kde n je index lomu prostředí.

Pomocí redukovaných poloměrů křivosti a optických úhlů lze vztahy (7.34) a (7.35) upravit do tvarů

$$R_1 = \frac{y_1}{\Theta_1}, \quad (7.37)$$

$$R_2 = \frac{y_2}{\Theta_2}. \quad (7.38)$$

Svazek paprsků na obr.7.8 reprezentuje sférickou vlnu. V závěru této kapitoly se odvodí důležitý transformační zákon (tzv. zákon "ABCD") pro transformaci poloměru křivosti sférické vlny optickou soustavou určenou prvky matice transformace A, B, C, D .

Pro libovolný paprsek sférické vlny platí transformační rovnice

$$y_2 = Ay_1 + B\Theta_1, \quad (7.39)$$

$$\Theta_2 = Cy_1 + D\Theta_1. \quad (7.40)$$

Dělením rovnice (7.39) rovnicí (7.40) se získá výraz

$$\frac{y_2}{\Theta_2} = \frac{Ay_1 + B\Theta_1}{Cy_1 + D\Theta_1} \quad (7.41)$$

a po další úpravě s využití (7.37) a (7.38) je

$$R_2 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D}, \quad (7.42)$$

což je zákon "ABCD".

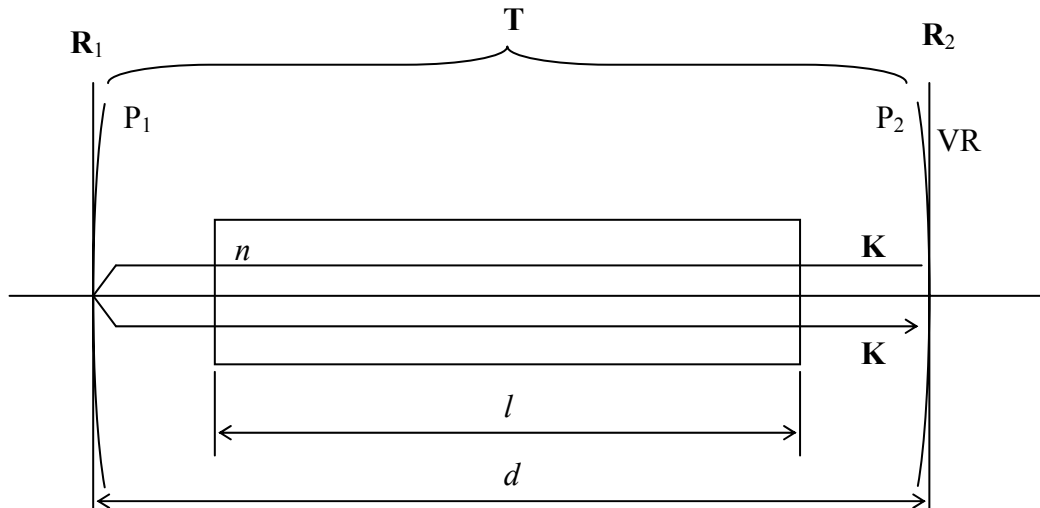
V případě Gaussova svazku platí pro transformaci formálně stejný zákon, je však třeba poloměry křivosti R_1, R_2 nahradit komplexními parametry \dot{q}_1, \dot{q}_2 . Zákon "ABCD" v případě Gaussova svazku má tvar

$$\dot{q}_2 = \frac{A\dot{q}_1 + B}{C\dot{q}_1 + D}. \quad (7.43)$$

Pomocí zákona "ABCD" lze studovat tvarování svazku. Předpokladem je ovšem znalost prvků matice transformace A, B, C, D . Pro nejčastěji se vyskytující optické soustavy existují přehledné tabulky příslušných transformačních matic.

7.3 Maticová optika rezonátoru

Ukáže se maticový popis optického rezonátoru a odvodí se podmínka stability rezonátoru. V optickém rezonátoru se předpokládá homogenní aktivní prostředí s indexem lomu n a optická vlna v základním modu TEM_{00}



Obrázek 7.9: Schéma optického rezonátoru pro jeho maticové vyjádření (VR - vztažná rovina; P_1, P_2 - optické mohutnosti zrcadel rezonátoru; $\mathbf{R}_1, \mathbf{T}, \mathbf{R}_2$ - matice transformace; $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ - paprskové vektory)

Redukovaná délka rezonátoru je (podle obr.7.9)

$$T = d - l + \frac{l}{n}, \quad (7.44)$$

přičemž se předpokládá, že prostředí v rezonátoru mimo aktivní látku má jednotkový index lomu.

Optické mohutnosti zrcadel jsou (podle 7.22)

$$P_1 = \frac{2}{r_1}, \quad (7.45)$$

$$P_2 = \frac{2}{r_2}, \quad (7.46)$$

kde r_1, r_2 jsou poloměry křivosti odrazných ploch. V obou případech jsou veličiny P_1, P_2 (vzhledem k chodu paprsků) kladné.

Mezi zrcadly nastává mnohonásobný odraz svazku paprsků. Za výstupní zrcadlo, propouštějící část záření ven z rezonátoru, se volí zrcadlo na pravé straně rezonátoru a v místě uložení tohoto zrcadla se definuje poloha vztažné roviny VR (viz obr.7.9).

Matice transformace svazku paprsků v rezonátoru \mathbf{M}_L se sestaví podle pravidla násobení dílčích matic:

$$\mathbf{M}_L = \mathbf{T} \mathbf{R}_1 \mathbf{T} \mathbf{R}_2. \quad (7.47)$$

Dosadí-li se za matice typu **T** a **R** konkrétní výrazy s aplikací na optický rezonátor, dostane se

$$\mathbf{M}_L = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.48)$$

kde T, P_1, P_2 jsou veličiny vyjádřené vztahy (7.44), (7.45) a (7.46).

Vynásobením matic ve výrazu (7.48) se získá matice

$$\mathbf{M}_L = \begin{pmatrix} 1 - P_1 T - 2P_2 T + P_1 P_2 T^2 & 2T - P_1 T^2 \\ -P_1 - P_2 + P_1 P_2 T & 1 - P_1 T \end{pmatrix}, \quad (7.49)$$

kterou pro stručnost lze vyjádřit tvarem

$$\mathbf{M}_L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (7.50)$$

kde prvky matice A, B, C, D odpovídají stejně položeným výrazům v matici (7.49).

Transformační vztah mezi paprskovými vektory $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ (viz obr.7.9) je

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{M}_L \mathbf{K}_1, \quad (7.51)$$

kde \mathbf{M}_L je matice transformace rezonátoru.

Pro vyjádření několikanásobného průchodu svazku rezonátorem je potřebné matici \mathbf{M}_L upravit na tvar

$$\mathbf{M}_L = \mathbf{F} \mathbf{\Lambda} \mathbf{F}^{-1} \quad (7.52)$$

kde $\mathbf{\Lambda}$ je diagonální matice s prvky λ_1, λ_2

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (7.53)$$

a \mathbf{F} je matice, která umožňuje vyjádření \mathbf{M}_L ve tvaru (7.52). Prvky λ_1, λ_2 se nazývají "vlastní hodnoty" matice \mathbf{F} .

Vykoná-li svazek v rezonátoru N úplných průchodů (úplný průchod začíná a končí na vztažné rovině VR), bude mít matice transformace tvar

$$\mathbf{M}_L^N = \mathbf{F} \Lambda^N \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} \lambda_1^N & 0 \\ 0 & \lambda_2^N \end{pmatrix} \mathbf{F}^{-1}. \quad (7.54)$$

Matice \mathbf{F} se obecně vyjádří ve tvaru

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}, \quad (7.55)$$

kde jednotlivé sloupce

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{pmatrix}, \quad (7.56)$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} F_{12} \\ F_{22} \end{pmatrix} \quad (7.57)$$

se nazývají "vlastní vektory" matice \mathbf{M} .

Pro vyjádření vlastních vektorů a vlastních hodnot se upraví rovnice (7.52) na tvar

$$\mathbf{M}_L \mathbf{F} = \mathbf{F} \Lambda, \quad (7.58)$$

který se po dosazení výrazů (7.50), (7.53) a (7.55) změní na

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (7.59)$$

Vynásobením matic ve vztahu (7.59) se získá rovnice

$$\begin{pmatrix} AF_{11} + BF_{21} & AF_{12} + BF_{22} \\ CF_{11} + DF_{21} & CF_{12} + DF_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}\lambda_1 & F_{12}\lambda_2 \\ F_{21}\lambda_1 & F_{22}\lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (7.60)$$

která odpovídá čtyřem rovnicím

$$AF_{11} + BF_{21} = F_{11}\lambda_1, \quad (7.61)$$

$$CF_{11} + DF_{21} = F_{21}\lambda_1, \quad (7.62)$$

$$AF_{12} + BF_{22} = F_{12}\lambda_2, \quad (7.63)$$

$$CF_{12} + DF_{22} = F_{22}\lambda_2. \quad (7.64)$$

Uváží-li se ještě jednotkový determinant matice \mathbf{M}_L :

$$\det \mathbf{M}_L = AD - BC = 1, \quad (7.65)$$

může se z rovnic (7.61), (7.62), (7.63), (7.64) a (7.65) určit λ_1, λ_2 a (až na skalární činitel) vektory \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_2 , což je k vyjádření matic \mathbf{F} a Λ postačující.

Pro vlastní hodnoty λ_1, λ_2 vychází

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(A + D) \pm \sqrt{(A + D)^2 - 4} \right], \quad (7.66)$$

přičemž $\lambda_1 + \lambda_2 = A + D$; $\lambda_1 \lambda_2 = 1$.

Pro podíly prvků vlastních vektorů platí

$$\frac{F_{11}}{F_{21}} = \frac{\lambda_1 - D}{C} = \frac{B}{\lambda_1 - A}, \quad (7.67)$$

$$\frac{F_{12}}{F_{22}} = \frac{\lambda_2 - D}{C} = \frac{B}{\lambda_2 - A}. \quad (7.68)$$

Pokud je maticový prvek C různý od nuly, je možné matici \mathbf{F} vyjádřit:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - D & \lambda_2 - D \\ C & C \end{pmatrix}, \quad (7.69)$$

s determinantem $\det(\mathbf{F}) = C(\lambda_1 - \lambda_2)$.

Konečné vyjádření matice transformace optického rezonátoru \mathbf{M}_L s uvážením (7.66) a (7.69) je

$$\mathbf{M}_L = \frac{1}{C(\lambda_1 - \lambda_2)} \begin{pmatrix} \lambda_1 - D & \lambda_2 - D \\ C & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & D - \lambda_2 \\ -C & \lambda_1 - D \end{pmatrix}. \quad (7.70)$$

Bude-li maticový prvek C nulový, zvolí se pro matici \mathbf{F} vyjádření

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} B & B \\ \lambda_1 - A & \lambda_2 - A \end{pmatrix} \quad (7.71)$$

a vyjádření matice \mathbf{M}_L je v tomto případě

$$\mathbf{M}_L = -\frac{1}{B(\lambda_1 - \lambda_2)} \begin{pmatrix} B & B \\ \lambda_1 - A & \lambda_2 - A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 - A & -B \\ A - \lambda_1 & B \end{pmatrix}. \quad (7.72)$$

Maticové prvky A, B, C, D jsou určeny výrazem (7.49). Matici \mathbf{M}_L ve tvaru (7.70) nebo (7.72) lze použít pro řešení problémů jak stabilních, tak nestabilních rezonátorů při libovolném počtu úplných průchodů paprsků i celých svazků.

Stabilní optický rezonátor je charakteristický tím, že se svazek paprsků po úplném průchodu rezonátorem transformuje sám na sebe. Označí-li se komplexní parametr svazku před i po průchodu písmenem \dot{q} , platí podle zákona "ABCD" (viz 7.43)

$$\dot{q} = \frac{A\dot{q} + B}{C\dot{q} + D}, \quad (7.73)$$

kde A, B, C, D jsou prvky matice \mathbf{M}_L .

Řeší-li se rovnice (7.73) pro $1/\dot{q}$, dostane se výraz

$$\left(\frac{1}{\dot{q}}\right)_{1,2} = \frac{(D - A) \pm \sqrt{(D - A)^2 + 4BC}}{2B} \quad (7.74)$$

Uváží-li se

$$AD - BC = 1, \quad (7.75)$$

může se rovnice (7.74) upravit na tvar

$$\left(\frac{1}{\dot{q}}\right)_{1,2} = \frac{D-A}{2B} \pm j \frac{\sqrt{1-\left(\frac{A+D}{2}\right)^2}}{B}. \quad (7.76)$$

Porovnáním vztahu (7.76) s definičním vztahem

$$\frac{1}{\dot{q}} = \frac{1}{R} - j \frac{2}{kw^2} \quad (7.77)$$

vzniká vzhledem k reálným a kladným veličinám k a w^2 volba záporného znaménka v (7.76) a podmínka

$$\frac{\sqrt{1-\left(\frac{A+D}{2}\right)^2}}{B} \geq 0, \quad (7.78)$$

kterou lze přepsat do tvaru

$$\left|\frac{A+D}{2}\right| \leq 1 \quad (7.79)$$

nebo

$$-1 \leq \frac{A+D}{2} \leq 1. \quad (7.80)$$

Dosadí-li se do výrazu (7.80) za prvky A a D pomocí (7.49), dostaneme se tvar

$$-2 \leq 1 - P_1 T - 2 P_2 T + P_1 P_2 T^2 + 1 - P_1 T \leq 2. \quad (7.81)$$

K další úpravě se použije výrazů (7.45) a (7.46), pomocí nichž se vztah (7.81) upraví na konečný tvar

$$0 \leq \left(1 - \frac{T}{r_1}\right) \left(1 - \frac{T}{r_2}\right) \leq 1, \quad (7.82)$$

který je známý jako *podmínka stability* optického rezonátoru.

Řeší-li se rovnice (7.73) pro \dot{q} , dostaneme se

$$\dot{q}_{1,2} = \frac{(A-D) \pm \sqrt{(D-A)^2 + 4BC}}{2C}. \quad (7.83)$$

Opět se uváží platnost vztahu (7.75) a rovnice (7.83) se upraví na tvar

$$\dot{q}_{1,2} = \frac{A-D}{2C} \pm j \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{A+D}{2}\right)^2}}{C}. \quad (7.84)$$

Volba kladného znaménka ve vztahu (7.84) se rozhodne porovnáním se vztahem

$$\dot{q} = z + jz_0, \quad (7.85)$$

kde $z_0 = \frac{2}{kw_0^2}$.

Na závěr se vyjádří parametry Gaussova svazku vyzařovaného výstupním zrcadlem, s nímž je ztotožněna vztáhná rovina VR (viz obr.7.9).

Vyjádření poloměru křivosti vlnoplochy na výstupním zrcadle vyplývá z porovnání reálných částí výrazů (7.76) a (7.77):

$$R = \frac{2B}{D-A}. \quad (7.86)$$

Vyjádření poloviny šířky svazku na výstupním zrcadle vyplývá z porovnání imaginárních částí výrazů (7.76) a (7.77):

$$w = \left(\frac{2}{k}\right)^{1/2} \frac{|B|^{1/2}}{\left[1 - \left(\frac{A+D}{2}\right)^2\right]^{1/4}}. \quad (7.87)$$

Poloha výstupního zrcadla na ose z se vyjádří porovnáním reálných částí výrazů (7.84) a (7.85):

$$z = \frac{A-D}{2C}, \quad (7.88)$$

kde $|z|$ představuje vzdálenost výstupního zrcadla od krčku svazku (s krčkem svazku je ztotožněn počátek souřadnicové osy z).

Pološířka svazku v krčku se vyjádří porovnáním imaginárních částí výrazů (7.84) a (7.85):

$$w_0 = \left(\frac{2}{k}\right)^{1/2} \frac{\left[1 - \left(\frac{A+D}{2}\right)^2\right]^{1/4}}{|C|^{1/2}}. \quad (7.89)$$

Nakonec se stanoví hranici blízké a vzdálené zóny

$$z_0 = \frac{k w_0^2}{2} = \frac{\left[1 - \left(\frac{A+D}{2}\right)^2\right]^{1/2}}{C} \quad (7.90)$$

a úhel divergence

$$\theta = \frac{2}{k w_0} = \left(\frac{2}{k}\right)^{1/2} \frac{|C|^{1/2}}{\left[1 - \left(\frac{A+D}{2}\right)^2\right]^{1/4}}. \quad (7.91)$$

8 Lasery - I

8.1 Interakce záření a látky

Energii částic v uzavřeném objemu E určuje trojice kvantových čísel n_x, n_y, n_z , které lze přiřadit jediné číslo n podle vztahu

$$n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2. \quad (8.1)$$

Soustava kvantových čísel n_x, n_y, n_z vytváří prostor kvantových čísel, který je určován celými kladnými čísly, proto objem daný konstantním $n = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2}$, bude 1/8 objemu koule s poloměrem n . Elementární objem prostoru kvantových čísel má jednotkovou hodnotu ($\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = 1$) a s každým takovýmto elementárním objemem je spojen jeden kvantový stav

systému. Počet možných kvantových stavů systému N_n , jehož energetická úroveň je určena číslem n , je

$$N_n = \frac{4}{3} \pi n^3 \frac{\gamma}{8}, \quad (8.2)$$

kde γ je počet nezávislých orientací spinu jedné částice v jednom kvantovém stavu.

Energetická hustota kvantových stavů systému $D(E)$ se definuje výrazem

$$D(E) = \frac{dN_n}{dE} = \frac{dN_n}{dn} \frac{dn}{dE}. \quad (8.3)$$

Je-li systém tvořen fotony, říká se jednotlivým kvantovým stavům *mody* záření. Protože energie fotonu je úměrná frekvenci ω , může se k vyjádření hustoty modů záření použít výraz (8.3) a místo E psát ω :

$$D(\omega) = \frac{dN_n}{dn} \frac{dn}{d\omega}. \quad (8.4)$$

K vyjádření hustoty modů je potřebné provést derivaci dN_n/dn z (8.2):

$$\frac{dN_n}{dn} = \pi n^2; \gamma = 2 \quad (8.5)$$

a také $dn/d\omega$ pomocí následující úvahy: Nachází-li se optické záření v kovové uzavřené krychli o hraně L , musí mít tangenciální složky intenzity elektrického pole všude na stěnách krychle nulovou hodnotu. Tuto okrajovou podmínku vyjadřuje vztah (vzdálenost mezi stěnami krychle je rovna celistvému násobku $\lambda/2$)

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\pi^2}{L^2} n^2, \quad (8.6)$$

kde c je rychlost šíření světla. Pomocí (8.6) lze získat

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{L}{\pi c}. \quad (8.7)$$

Dosazením (8.5) a (8.7) do (8.4) se dostane vyjádření hustoty modů

$$D(\omega) = \pi n^2 \frac{L}{\pi c} = \frac{V \omega^2}{\pi^2 c^3}, \quad (8.8)$$

kde $V = L^3$. Výraz (8.8) představuje spektrální hustotu modů záření v objemu V .

Je-li známá hustota modů záření, střední počet fotonů v jednom modu a energie jednoho fotonu, může se vyjádřit *celková spektrální energie záření* součinem

$$W_\omega = D(\omega) \langle N(\omega) \rangle \hbar \omega, \quad (8.9)$$

kde veličina $\langle N(\omega) \rangle$ reprezentuje Planckovu rozdělovací funkci

$$\langle N(\omega) \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}$$

a $\hbar \omega$ je energie jednoho fotonu. Po dosazení a úpravě je

$$W_\omega = \frac{V \hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}, \quad (8.10)$$

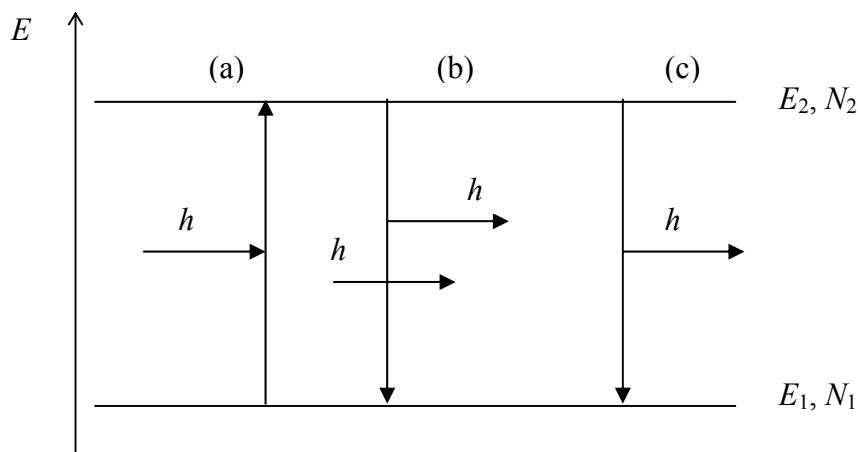
což je tzv. Planckův zákon záření. Použije-li se spektrální objemová hustota energie záření je Planckův zákon ve tvaru

$$w_\omega = \frac{dW_\omega}{dV} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}. \quad (8.11)$$

Na obr.8.1 jsou znázorněny procesy přechodů mezi energetickými hladinami označované jako *absorpce*, *stimulovaná emise* a *spontánní emise*. ($h\nu$ je energie fotonu s frekvencí ν .)

Značí-li $(N_1 \rightarrow N_2)_{\text{abs}}$ počet částic, které přejdou v procesu absorpce z E_1 na E_2 , $(N_2 \rightarrow N_1)_{\text{st}}$ počet částic, které přejdou z E_2 na E_1 v procesu stimulované emise a $(N_2 \rightarrow N_1)_{\text{sp}}$ počet částic, které přejdou z E_2 na E_1 v procesu spontánní emise, je podle zákona zachování počtu částic uzavřeného systému

$$(N_1 \rightarrow N_2)_{\text{abs}} = (N_2 \rightarrow N_1)_{\text{st}} + (N_2 \rightarrow N_1)_{\text{sp}}, \quad (8.12)$$



Obrázek 8.1: Energetické hladiny částic a přechody mezi nimi
 (a - absorpce, b - stimulovaná emise, c - spontánní emise)

Pro vyjádření *rychlosti přechodů* (počtu částic přemístěných v jednotce objemu za jednotku času) platí

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{abs}} = \left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{\text{st}} + \left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{\text{sp}}, \quad (8.13)$$

což je *kinetická rovnice*, popisující procesy přechodů podle obr.8.1. Jednotlivé členy v (8.13) vyjadřují příslušné změny počtu částic na dané energetické hladině v jednotce objemu a za jednotku času.

Rychlosti přechodů lze vyjádřit pomocí počtu látkových částic, které se na příslušném přechodu účastní a *hustot pravděpodobností* přechodu jedné částice (v jednotce objemu za jednotku času):

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{abs}} = W_{12}N_1, \quad \left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{\text{st}} = W_{21}N_2, \quad \left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{\text{sp}} = A_{21}N_2. \quad (8.14)$$

Po dosazení výrazů (8.14) do kinetické rovnice (8.13) lze získat *rovnici interakce*

$$W_{12}N_1 = W_{21}N_2 + A_{21}N_2, \quad (8.15)$$

kde N_1, N_2 jsou počty látkových částic účastnících se v jednotlivých přechodech a W_{12}, W_{21}, A_{21} jsou hustoty pravděpodobností jednotlivých přechodů. (Látku reprezentují veličiny N_1, N_2 a záření je zahrnuto ve veličinách W_{12} , a W_{21} a A_{21} .)

Hustota pravděpodobnosti absorpce je přímo úměrná spektrální objemové hustotě energie $W_{12} = B_{12}w_\omega$ a obdobná úměra platí pro pravděpodobnost stimulované emise $W_{21} = B_{21}w_\omega$, kde B_{12}, B_{21} jsou konstanty. Řádový odhad konstanty B_{12} (viz kvantová teorie) je $B_{12} \approx 10^{21} \text{ J}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$.

Míra pravděpodobnosti spontánní emise A_{21} se v kvantové teorii vyjadřuje tzv. „dobou života“ částice τ_{sp} , během níž pravděpodobnost, že částice zůstane na energetické hladině na níž se právě nalézá, klesne 2,7-krát:

$$A_{21} = \frac{1}{\tau_{sp}}. \quad (8.16)$$

Doba života τ_{sp} je středovaná veličina. Nastalo-li v čase $t=0$ *vzbuzení částice* na energetickou hladinu E_2 , pak po uplynutí času τ_{sp} přejde průměrná částice spontánně zpět na nižší energetickou hladinu E_1 .

Konstanty A_{21} , B_{12} , B_{21} jsou určeny kvantovými vlastnostmi látkových částic s ohledem na interakci s optickým zářením a nazývají se *Einsteinovy koeficienty*. ($[A_{21}] = \text{s}^{-1}$; $[B_{12}] = [B_{21}] = \text{J}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$.)

Jednoduchou algebraickou úpravou rovnice interakce (8.15) se dostane

$$w_\omega = \frac{A_{21}}{B_{12} \frac{N_1}{N_2} - B_{21}}. \quad (8.17)$$

Představa aktivní látky podle předcházejících úvah spočívá v představě ideálního plynu, pro nějž platí *Maxwellova-Boltzmannova rozdělovací funkce*.

$$N = e^{-\frac{E}{kT}},$$

Použitím této rozdělovací funkce lze vyjádřit poměr počtu částic:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{e^{-\frac{E_1}{kT}}}{e^{-\frac{E_2}{kT}}} = e^{\frac{E_2 - E_1}{kT}}, \quad (8.18)$$

kde výraz $(E_2 - E_1)$ lze nahradit součinem $\hbar\omega$. Dosazením (8.18) do (8.17) plyne z rovnice interakce

$$w_\omega = \frac{A_{21}}{B_{12} e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - B_{21}}. \quad (8.19)$$

Pro w_ω však současně platí Planckův zákon záření (viz 8.11)

$$w_\omega = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 \left(\frac{c_0}{n}\right)^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}, \quad (8.20)$$

kde c_0 je rychlost šíření světla ve vakuu a n je zde absolutní index lomu prostředí, v němž se interakce popisuje (tzv. *aktivní prostředí*).

Úvahou nad (8.19) a porovnáním (8.19) a (8.20) se získají výrazy

$$B_{12} = B_{21} = B. \quad (8.21)$$

$$\frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{A}{B} = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c_0^3} n^3. \quad (8.22)$$

(Indexy u veličin A, B je možno bez ztráty srozumitelnosti vynechat.)

Pomocí vztahů (8.21), (8.22) a řádového odhadu konstanty B (viz výše) lze nyní odhadnout pravděpodobnosti stimulované a spontánní emise. Řádový odhad pravděpodobnosti spontánní emise (pro optické frekvence $\nu = 10^{15}$ Hz a $n = 1$) je

$$A = B \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c_0^3} n^3 \doteq 10^{21} \cdot 10^{-13} = 10^8 \text{ s}^{-1}. \quad (8.23)$$

Pomocí (8.23) lze odhadnout řádovou hodnotu doby života částice ve vzbuzeném stavu

$$\tau_{\text{sp}} = \frac{1}{A} \doteq 10^{-8} \text{ s}. \quad (8.24)$$

8.2 Buzení aktivní látky

Nejdříve se rozebere případ, kdy na dvouhladinový systém působí monochromatická optická vlna (tzv. budící vlna) s frekvencí ω_{12} a intenzitou I_b (viz obr.8.2). Pro úplnost se do procesu, který při interakci nastane, zahrnou i nezářivé přechody.

Je-li N_1, N_2 obsazení energetických hladin (1), (2), platí podle zákona zachování počtu částic rovnice

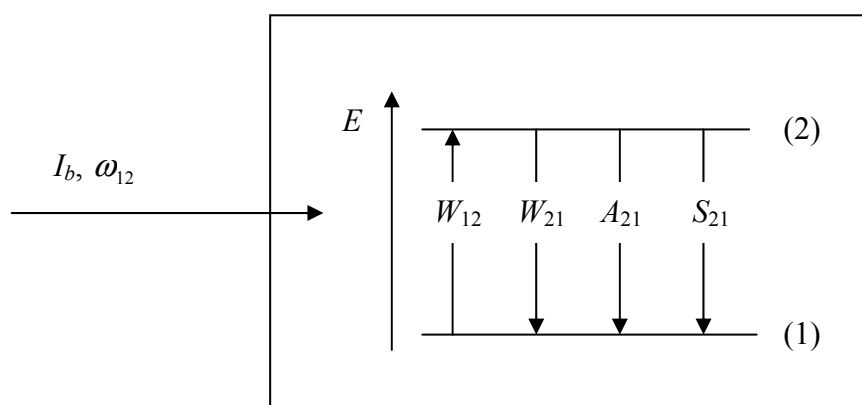
$$N_1 + N_2 = N_\Sigma = \text{konst}, \quad (8.25)$$

kde N_Σ je celkový počet aktivních částic systému. Pro vyjádření změny obsazení druhé hladiny platí kinetická rovnice

$$\frac{dN_2}{dt} = W(N_1 - N_2) - \frac{1}{\tau_\Sigma} N_2, \quad (8.26)$$

kde W a $1/\tau_\Sigma$ jsou hustoty pravděpodobnosti přechodů (na 1 m^3 a na 1 s). τ_Σ je celková doba života částice a platí

$$\frac{1}{\tau_\Sigma} = \frac{1}{\tau_{\text{sp}}} + \frac{1}{\tau_{\text{nezář}}}. \quad (8.27)$$



Obrázek 8.2: Působení monochromatické optické vlny na dvouhladinový systém. [W_{12} , W_{21} , A_{21} , S_{21} jsou pravděpodobnosti přechodů (indukovaných, spontánních a nezářivých) jedné částice za jednotku času]

Rozdíl v obsazení energetických hladin (1) a (2) se označuje ΔN

$$N_1 - N_2 = \Delta N. \quad (8.28)$$

Odečtením rovnice (8.28) od (8.25) se získá rovnice

$$2N_2 = N_\Sigma - \Delta N, \quad (8.29)$$

přičemž platí

$$2 \frac{dN_2}{dt} = -\frac{d}{dt}(\Delta N), \quad (8.30)$$

neboť $N_\Sigma = \text{konst.}$ Pomocí vztahů (8.29) a (8.30) lze kinetickou rovnici (8.26) upravit na tvar

$$-\frac{d}{dt}(\Delta N) = 2W(\Delta N) - \frac{1}{\tau_\Sigma}(N_\Sigma - \Delta N)$$

a po další úpravě je

$$\frac{d}{dt}(\Delta N) = -\Delta N\left(\frac{1}{\tau_{\Sigma}} + 2W\right) + \frac{1}{\tau_{\Sigma}} N_{\Sigma}, \quad (8.31)$$

což je diferenciální rovnice pro ΔN . Ve *stacionárním stavu*, definovaném rovnicí $\frac{d}{dt}(\Delta N) = 0$, se z diferenciální rovnice (8.31) získá rovnice algebraická

$$0 = -\Delta N\left(\frac{1}{\tau_{\Sigma}} + 2W\right) + \frac{1}{\tau_{\Sigma}} N_{\Sigma} \quad (8.32)$$

a pro *rozdíl obsazení hladin* ΔN vychází vztah

$$\Delta N = \frac{N_{\Sigma}}{1 + 2W\tau_{\Sigma}}. \quad (8.33)$$

Pravděpodobnost W je úměrná spektrální objemové hustotě energie w_{ω} podle vztahu

$$W = Bw_{\omega}, \quad (8.34)$$

kde B je Einsteinův koeficient indukovaného přechodu. Se vzrůstem budící intenzity vzrůstá w_{ω} , roste W a tudíž klesá ΔN . (Veličiny N_{Σ} a τ_{Σ} jsou konstantní.) Při extrémně vysokých hodnotách w_{ω} klesá ΔN k nule a počet částic na hladině (1) a hladině (2) se vyrovnává:

$$N_1 \doteq N_2 \doteq \frac{N_{\Sigma}}{2}. \quad (8.35)$$

Takovýto stav dvouhladinového systému se nazývá *nasyceným*. U dvouhladinového systému nelze zvyšováním budící intenzity vyvolat, aby na vyšší energetické hladině bylo více částic než na energetické hladině nižší. Pro získání laserové generace je však nutné (ale ne postačující), aby rozložení částic na energetických hladinách bylo *inverzní* ($N_2 > N_1$), pro které platí:

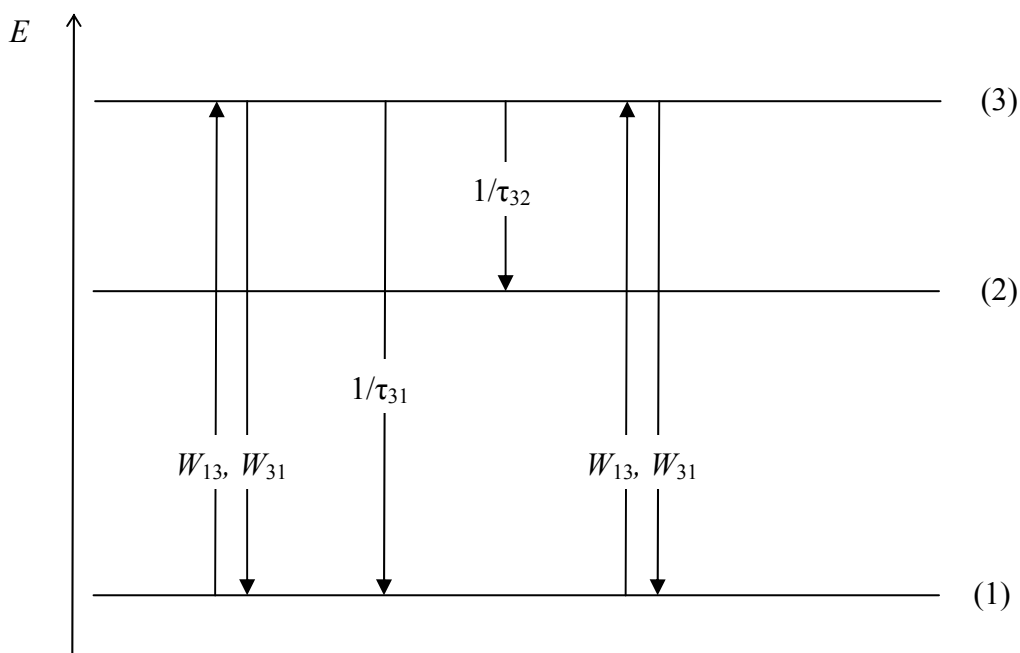
$$N_2 - N_1 = \Delta N_i; \quad \Delta N_i > 0.$$

Ukazuje se, že pro získání *inverzního rozložení* aktivních částic je potřebný systém s více než dvěma hladinami. Rozebere se proto nyní buzení *tříhladinového systému*, jehož energetické hladiny spolu s podstatnými přechody částic jsou znázorněny na obr.8.3.

Hustota pravděpodobnosti indukovaného přechodu (absorpce nebo emise) jedné částice za jednotku času mezi dvěma hladinami je značena W_{13} nebo W_{31} (pro přechody typu $1 \rightarrow 3$ nebo $3 \rightarrow 1$) a W_{12} nebo W_{21} (pro přechody typu $1 \rightarrow 2$ nebo $2 \rightarrow 1$). Hustota pravděpodobnosti spontánních (zářivých i nezářivých) přechodů jedné částice za jednotku času mezi dvěma hladinami je značena $1/\tau_{31}$, $1/\tau_{32}$ (pro přechody typu $3 \rightarrow 1$, $3 \rightarrow 2$) a $1/\tau_{21}$ (pro přechody typu

2→1). Jiné než vyznačené přechody jsou málo pravděpodobné a lze je v úvaze zanedbat. Ukazuje se navíc, že pro získání inverzního obsazení mezi hladinami (2) a (1) je potřebné, aby částice vzbuzené na hladinu (3) se „rychle přemístily“ na hladinu (2) a tam určitou relativně dlouhou dobu setrvaly. Tato popisně vyjádřená podmínka se zapíše nerovností

$$\tau_{32} \ll \tau_{21}, \tau_{31}, \frac{1}{W_{31}}. \quad (8.36)$$



Obrázek 8.3: Energetické hladiny a přechody částic v tříhladinovém systému.

Proces buzení tříhladinového systému se popíše následujícími kinetickými rovnicemi:

$$\frac{dN_3}{dt} = W_{13}N_1 - \left(W_{31} + \frac{1}{\tau_{31}} + \frac{1}{\tau_{32}} \right) N_3, \quad (8.37)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = W_{12}N_1 - \left(W_{21} + \frac{1}{\tau_{21}} \right) N_2 + \frac{1}{\tau_{32}} N_3. \quad (8.38)$$

Je-li N_1, N_2, N_3 obsazení jednotlivých energetických hladin, platí podle zákona zachování počtu částic

$$N_1 + N_2 + N_3 = N_{\Sigma} = \text{konst}, \quad (8.39)$$

Z podmínek (8.36) plyne $N_3 \ll N_1, N_2$ a třetí hladina zůstává téměř neobsazena. Upravíme-li se rovnice (8.37) a (8.38) pro *stacionární případ* a využijeme-li se platnost nerovnosti (podle 8.36): $\frac{1}{\tau_{32}} \gg W_{31} + \frac{1}{\tau_{31}}$, získají se rovnice

$$W_{13}N_1 \doteq \frac{1}{\tau_{32}}N_3, \quad (8.40)$$

$$W_{12}N_1 = \left(W_{21} + \frac{1}{\tau_{21}} \right) N_2 - \frac{1}{\tau_{32}}N_3, \quad (8.41)$$

z nichž po dalších úpravách plyne

$$\frac{N_2}{N_1} \doteq \frac{W_{12} + W_{13}}{W_{21} + \frac{1}{\tau_{21}}}. \quad (8.42)$$

Pro vyjádření podmínky získání inverzního obsazení hladin (2) a (1) se od levé i pravé strany rovnice (8.42) odečte číslo -1. Po úpravě ($W_{12} = W_{21}$) se získá vztah

$$\frac{N_2 - N_1}{N_1} \doteq \frac{W_{13} - \frac{1}{\tau_{21}}}{W_{21} - \frac{1}{\tau_{21}}}. \quad (8.43)$$

Má-li být $N_2 > N_1$, musí platit $W_{13} > \frac{1}{\tau_{21}}$, což je další podmínkou pro dosažení inverzního obsazení hladin (2) a (1) u tříhladinového systému. Veličina W_{13} se nazývá *rychlost buzení* a v dalším textu se označuje W_b .

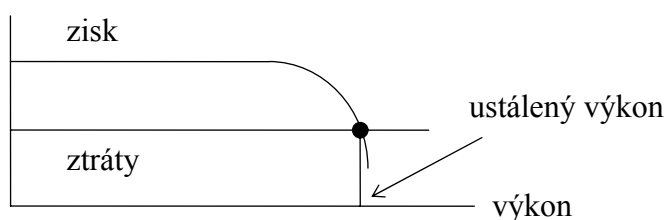
9 Lasery - II

9.1 Podmínky laserové generace

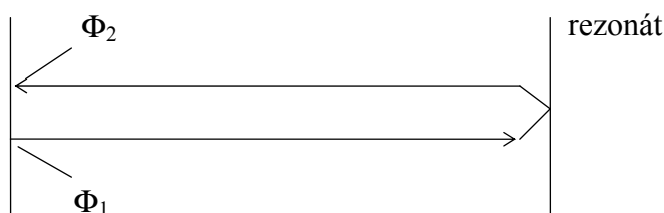
Předpokladem je opticky buzený *tříhladinový systém* umístěný v *konfokálním optickém rezonátoru*. Pro fyzikální popis systému se použije teorie *kinetických rovnic*.

Existují dvě základní podmínky vzniku *laserové generace*:

I. Pro získání laserové generace je potřebné, aby zesilovacím účinkem laseru byly překonány jeho ztráty. Mezní hodnotě uvedené podmínky odpovídá *prahová rychlost buzení* W_b^* a jí odpovídá *prahové inverzní obsazení* energetických hladin ΔN_i^* .



II. Další podmínkou je, aby celková změna fáze Φ při jednom oběhu byla rovna $\Phi_2 - \Phi_1 = n2\pi$, kde n je celé číslo vyjma nuly.



Předpokládejme, že optický rezonátor vytváří podmínky pro generaci pouze základního modu TEM_{00} a označme počet fotonů v rezonátoru při této generaci N_f . V souladu s úvahami předloženými v minulé kapitole platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_{32}} &\gg \frac{1}{\tau_{21}}, \frac{1}{\tau_{31}}, W_{31}; \\ \tau_{32} &\ll \tau_{21}; (N_3 \ll N_2 + N_1); \\ W_{13} &> \frac{1}{\tau_{21}}; \end{aligned} \quad (9.1)$$

a dále:

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 &= N_\Sigma = \text{konst}; \\ N_2 - N_1 &= \Delta N_i. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Kinetická rovnice pro *změnu obsazení* horní pracovní hladiny 2 je (s uvážením (9.1))

$$\frac{dN_2}{dt} = W_b N_1 - W(\Delta N_i) - \frac{1}{\tau_{21}} N_2, \quad (9.3)$$

kde první člen pravé strany reprezentuje buzení a nahrazuje v souladu s podmínkami (9.1) a vztahem (8.40) v rovnici (8.38) člen $\frac{1}{\tau_{32}} N_3$, $(\frac{1}{\tau_{32}} N_3 \doteq W_{13} N_1 = W_b N_1)$; druhý člen reprezentuje stimulované přechody (hustota pravděpodobnost $W = W_{12} = W_{21}$ se vztahuje pouze k přechodům mezi pracovními hladinami 2 a 1); třetí člen reprezentuje spontánní

záření. V rovnici (9.3) nejsou uvedeny procesy se zanedbatelně nízkou hustotou pravděpodobností přechodu.

Sečtením rovnic (9.2) a derivací výsledné rovnice podle času se získá rovnice

$$\frac{d(\Delta N_i)}{dt} = 2 \frac{dN_2}{dt}. \quad (9.4)$$

Dosazení (9.3) do (9.4) vede k diferenciální rovnici pro ΔN_i

$$\frac{d(\Delta N_i)}{dt} = 2W_b N_1 - 2W(\Delta N_i) - \frac{2}{\tau_{21}} N_2, \quad (9.5)$$

kterou s uvážením (9.2) lze upravit pro stacionární případ na algebraický tvar

$$W_b(N_\Sigma - \Delta N_i) - 2W(\Delta N_i) - \frac{1}{\tau_{21}}(N_\Sigma + \Delta N_i) = 0. \quad (9.6)$$

Rovnice (9.6) je kinetickou rovnicí pro *inverzní obsazení* ΔN_i . Kinetickou rovnici pro *změnu fotonů* v aktivní látce stimulovanými přechody $2 \rightarrow 1$ lze sestavit do tvaru

$$\frac{dN_f}{dt} = V_f W(\Delta N_i) - \frac{1}{\tau_f} N_f, \quad (9.7)$$

kde první člen pravé strany reprezentuje stimulované přechody (V_f je objem, který zaujímá základní mod TEM_{00} v aktivní látce) a druhý člen reprezentuje úbytek fotonů za jednotku času v důsledku energetických ztrát, které v laseru nastávají (τ_f je doba života fotonu v rezonátoru).

Hustota pravděpodobnost W je úměrná spektrální objemové hustotě w_ω

$$W = B w_\omega, \quad (9.8)$$

kde w_ω lze vyjádřit pomocí objemové hustoty fotonů N_f/V_f , energie jednoho fotonu $\hbar\omega$ a normované funkce spektrální čáry $g(\omega)$ vztahem

$$w_\omega = \frac{N_f}{V_f} \hbar\omega g(\omega), \quad (9.9)$$

kde ω je frekvence přechodu $2 \rightarrow 1$. Hustotu pravděpodobnost W lze pomocí vztahu (9.9) upravit na tvar

$$W = B \frac{N_f}{V_f} \hbar \omega g(\omega) \quad (9.10)$$

a zavedením konstanty $B_f = B \frac{\hbar \omega}{V_f} g(\omega)$ se pro účely této kapitoly získá vhodnější vyjádření hustoty pravděpodobnost W než které nabízí vztah (9.8):

$$W = B_f N_f. \quad (9.11)$$

(Konstanta B_f vyjadřuje rychlost stimulovaného přechodu vztaženou na jeden foton.) Dosazením výrazu (9.11) do kinetické rovnice (9.7) se získá diferenciální rovnice pro N_f

$$\frac{dN_f}{dt} = V_f B_f N_f (\Delta N_i) - \frac{1}{\tau_f} N_f, \quad (9.12)$$

kterou lze pro stacionární případ upravit na tvar

$$\left(V_f B_f \Delta N_i - \frac{1}{\tau_f} \right) N_f = 0. \quad (9.13)$$

Rovnice (9.13) spolu s mírně upravenou rovnicí (9.6)

$$W_b (N_\Sigma - \Delta N_i) - 2 B_f N_f \Delta N_i - \frac{1}{\tau_{21}} (N_\Sigma + \Delta N_i) = 0 \quad (9.14)$$

popisují *stacionární režim práce* tříhladinového laseru.

K určení konstant B_f a τ_f lze vyjít z energetické bilance laseru. Pro optickou intenzitu v zesilujícím prostředí platí Bouguerův-Lambertův-Beerův zákon, který s vyloučením ztrát má tvar

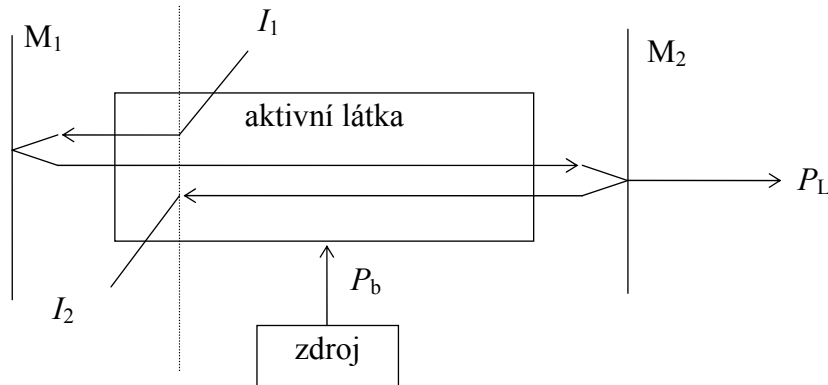
$$dI = \beta I dl, \quad (9.15)$$

kde I je optická intenzita v rezonátoru a β je koeficient zesílení aktivní látky. Předpokládejme, že v laseru se záření šíří ve směru osy rezonátoru, přičemž na zrcadlech rezonátoru se část záření odráží zpět a část vychází do volného prostoru (viz obr. 9.1).

Ztráty na zrcadlech lze vyjádřit propustnostmi T_1 , T_2 , přičemž platí

$$\begin{aligned} T_1 &= 1 - R_1, \\ T_2 &= 1 - R_2, \end{aligned} \quad (9.16)$$

kde R_1, R_2 jsou (energetické) odrazivosti zrcadel. Kromě uvedených ztrát na zrcadlech dochází v laseru ještě k difrakčním ztrátám, ztrátám absorpcí neaktivními částicemi a ztrátám rozptylem na různých nehomogenitách. Všechny tyto další ztráty se nazývají „vnitřní ztráty“ a jejich hodnota pro jeden průchod rezonátorem se značí písmenem T_i .



Obrázek 9.1: Model šíření optického záření v laseru. (M_1, M_2 – zrcadla rezonátoru, I_1, I_2 – optická intenzita na začátku a konci jednoho oběhu vlny v rezonátoru, P_b – budící optický výkon, P_L – výkon laseru)

Vztah (9.15) po integraci a zvážení všech ztrát nabude tvaru

$$I_2 = (1 - T_1)(1 - T_2)(1 - T_i)^2 I_1 e^{\beta 2l}, \quad (9.17)$$

který lze pomocí vztahu (9.16) a vztahu pro koeficient zesílení $\beta = \sigma \Delta N_i$ (σ – účinný průřez přechodu) vyjádřit:

$$I_2 = R_1 R_2 (1 - T_i)^2 I_1 e^{2\sigma \Delta N_i l}, \quad (9.18)$$

kde σ je průřez přechodu $2 \rightarrow 1$ a ΔN_i je inverzní obsazení hladin 2 a 1. (Rovnice (9.18) vystihuje vztah mezi I_1 a I_2 po dvou průchodech, resp. po jednom oběhu záření rezonátorem.)

Pro zjednodušení zápisu rovnice (9.18) se definují tzv. "logaritmické ztráty" (stručně ztráty) vztažené na jeden průchod: $\gamma_1 = -\ln(1 - T_1)$, $\gamma_2 = -\ln(1 - T_2)$, $\gamma_i = -\ln(1 - T_i)$, kde očekáváme $T_1, T_2, T_i \ll 1$, což vede k přibližným vztahům: $\gamma_1 \doteq T_1$, $\gamma_2 \doteq T_2$, $\gamma_i \doteq T_i$.

Upraví-li se nyní (9.18) podle předcházejících úvah, je

$$I_2 = I_1 \exp[-\gamma_1 - \gamma_2 - 2\gamma_i + 2\sigma \Delta N_i l]. \quad (9.19)$$

Celkové ztráty po dvou průchodech lze vyjádřit součtem $\gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_i = 2\gamma$, kde γ jsou celkové ztráty vztažené na jeden průchod:

$$\gamma = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} + \gamma_i. \quad (9.20)$$

Veličina $\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ se definuje jako střední ztráty na zrcadlech s označením $\bar{\gamma}_R$. Po dosazení do (9.20) je $\gamma = \bar{\gamma}_R + \gamma_i$.

Vyjádří-li se nyní vztah (9.19) s uvážením (9.20), je

$$I_2 = I_1 \exp[2(\sigma \Delta N_i l - \gamma)], \quad (9.21)$$

z něhož je vidět, že pro zabezpečení nerovnosti $I_2 > I_1$ je nutné, aby

$$\sigma \Delta N_i l - \gamma > 0, \quad (9.22)$$

čímž je vyjádřeno, že zesílení v laseru musí převyšovat ztráty, ke kterým v laseru dochází. Rovnice

$$\sigma \Delta N_i l = \gamma \quad (9.23)$$

vyjadřuje mezní případ podmínky laserové generace, kdy zesílení aktivní látky právě vyrovnává ztráty v laseru. Veličiny σ , l , γ jsou konstanty. Inverzní obsazení ΔN_i , které vyhovuje rovnici (9.23), se nazývá "*prahová inverze*" a platí

$$\Delta N_i = \frac{\gamma}{\sigma l} = \Delta N_i^*. \quad (9.24)$$

K určení konstant B_f a τ_f je potřebné porovnat rovnice (9.21) a (9.12). Dříve než se porovnání provede, je vhodné odečíst od levé i pravé strany rovnice (9.21) I_1 a celou rovnici podělit časem odpovídajícím dvěma průchodům vlny rezonátorem ($\Delta t = 2d/c$):

$$\frac{I_2 - I_1}{\Delta t} = I_1 \left\{ \exp[2(\sigma \Delta N_i l - \gamma)] - 1 \right\} \frac{c}{2d}. \quad (9.25)$$

S předpokladem, že $2(\sigma \Delta N_i l - \gamma) \ll 1$ lze upravit vztah (9.25) (pomocí vzorce $e^\varepsilon - 1 \doteq \varepsilon$; $\varepsilon \ll 1$) na tvar

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = 2I_1 (\sigma \Delta N_i l - \gamma) \frac{c}{2d}, \quad (9.26)$$

kde $\Delta I = I_2 - I_1$. Protože platí $\frac{\Delta I}{\Delta t} \doteq \frac{dI}{dt}$; $\frac{dI}{I_1 dt} \sim \frac{dN_f}{N_f dt}$, je možno vztahy (9.26) a (9.12) porovnat a vyjádřit

$$B_f = \frac{\sigma c}{V_f d}, \quad (9.27)$$

$$\tau_f = \frac{d}{\gamma c}. \quad (9.28)$$

Objem V_f zaujímáný základním modem záření v aktivní látce je přibližně

$$V_f \doteq \frac{1}{4} \pi w_0^2 l, \quad (9.29)$$

kde $1/4$ vyjadřuje poměr objemu V_f a objemu $V_a = \pi w_0^2 l$, který je vymezen krajem svazku a délkou aktivní látky. Čtyřnásobné zmenšení V_f vychází jednak z nerovnoměrného rozložení hustoty fotonů v modu a jednak ze samotné konfigurace stojatého vlnění modu. Označí-li se $V = \frac{1}{4} \pi w_0^2 d$ jako objem, který zaujímá základní mod v celém rezonátoru, je

$$\frac{V}{V_f} = \frac{d}{l}. \quad (9.30)$$

Pomocí (9.30) lze vztah (9.27) upravit na tvar

$$B_f = \frac{\sigma c}{V}. \quad (9.31)$$

Nyní se lze vrátit k rovnici (9.14) a s uvážením $N_f = 0$ (laserová generace neprobíhá) vyjádřit mezní hodnotu buzení W_b . Úpravou (9.14) je

$$W_b = \frac{N_\Sigma + \Delta N_i}{N_\Sigma - \Delta N_i} \frac{1}{\tau_{21}}, \quad (9.32)$$

$$\Delta N_i = N_\Sigma \frac{\tau_{21} W_b - 1}{\tau_{21} W_b + 1}$$

Pro $\Delta N_i = 0$ vychází

$$W_b^{\min} = \frac{1}{\tau_{21}}, \quad (9.33)$$

což je *minimální hodnota rychlosti buzení* potřebná k dosažení inverzního obsazení. Pro $\Delta N_i = \Delta N_i^*$, je

$$W_b^* = \frac{N_\Sigma + \Delta N_i^*}{N_\Sigma - \Delta N_i^*} \frac{1}{\tau_{21}}, \quad (9.34)$$

což je *prahová hodnota rychlosti buzení* potřebná k dosažení laserové generace. (Platí $\Delta N_i^* \ll N_\Sigma$; $W_b^* \doteq W_b^{\min} = 1/\tau_{21}$.)

Nyní lze objasnit *kontinuální stacionární režim* laseru ($W_b > W_b^*$; $N_f \neq 0$; $dN_f/dt = 0$). Z rovnice (9.13) plyne, že hodnota inverzního obsazení při laserové generaci ($N_f \neq 0$) je rovna konstantě:

$$\Delta N_i = \frac{1}{V_f B_f \tau_f} = \frac{\gamma}{\sigma l} = \Delta N_i^*. \quad (9.35)$$

Počet fotonů v rezonátoru při laserové generaci se vyjádří pomocí rovnice (9.14). S uvažováním konstantní hodnoty inverzního obsazení ΔN_i^* vychází

$$N_f = \frac{1}{2B_f \Delta N_i^*} \left[W_b (N_\Sigma - \Delta N_i^*) - \frac{1}{\tau_{21}} (N_\Sigma + \Delta N_i^*) \right]. \quad (9.36)$$

Použitím vztahů (9.27), (9.28), (9.30) a (9.34) lze udělat úpravu a vztah (9.36) získá tvar

$$N_f = \frac{Vl}{2\gamma c} \left[\frac{W_b}{W_b^*} - 1 \right] \frac{N_\Sigma + \Delta N_i^*}{\tau_{21}}, \quad (9.37)$$

z něhož vyplývá následující závislost počtu fotonů v rezonátoru na rychlosti buzení:

$$N_f \propto \left(\frac{W_b}{W_b^*} - 1 \right) \text{ pro } W_b > W_b^* \text{ a} \quad (9.38)$$

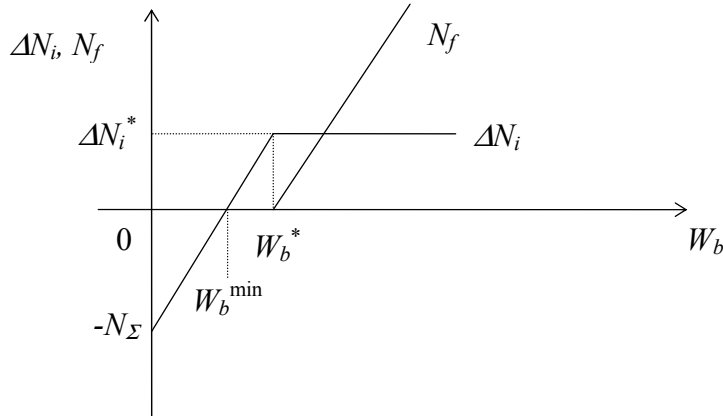
$$N_f = 0 \text{ pro } W_b \leq W_b^*.$$

Na obr. 9.2 jsou znázorněny grafické závislosti inverzního obsazení ΔN_i a počtu fotonů v rezonátoru N_f na rychlosti buzení W_b .

Výkon laseru Φ_L lze vyjádřit rovnicí

$$\Phi_L = \frac{N_f \hbar \omega_{12}}{\tau_2}, \quad (9.39)$$

kde výraz N_f/τ_2 reprezentuje rychlost ztrát fotonů, způsobených propustností výstupního zrcadla (např. T_2). Volbou indexů frekvence ω se rozlišují přechody, ke kterým se frekvence vztahuje.



Obrázek 9.2: Znázornění funkcí $\Delta N_i = \Delta N_i(W_b)$ a $N_f = N_f(W_b)$.

Mezi celkovou dobou života fotonů v rezonátoru τ_f a celkovými ztrátami γ platí vztah (9.28), který lze upravit na tvar

$$\frac{1}{\tau_f} = \frac{c}{d} \gamma. \quad (9.40)$$

Rozdělí-li se γ podle (9.20) na dvě části, získá se výraz

$$\frac{1}{\tau_f} = \frac{c\bar{\gamma}_R}{d} + \frac{c\gamma_i}{d} = \frac{1}{\tau_R} + \frac{c\gamma_i}{d}, \quad (9.41)$$

který ukazuje souvislost mezi celkovou dobou života fotonů τ_f a „dobou“ τ_R , vztahující se ke středním ztrátám způsobeným propustnostmi oběma zrcadly. S uvažováním, že $\bar{\gamma}_R = (\gamma_1 + \gamma_2)/2$, platí $\frac{1}{\tau_R} = \frac{c}{2d}(\gamma_1 + \gamma_2)$, kde γ_1, γ_2 jsou ztráty na jednotlivých zrcadlech. Pro výraz $1/\tau_2$ vychází

$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{c}{2d} \gamma_2. \quad (9.42)$$

Dosadí-li se do rovnice (9.39) příslušné výrazy za N_f a τ_2 , získá se pro výkon laseru Φ_L výstupním zrcadlem (s propustností T_2) výraz

$$\Phi_L = \frac{V_f(N_\Sigma + \Delta N_i^*)\hbar\omega_{12}}{4\tau_{21}} \frac{\gamma_2}{\gamma} \left(\frac{W_b}{W_b^*} - 1 \right), \quad (9.43)$$

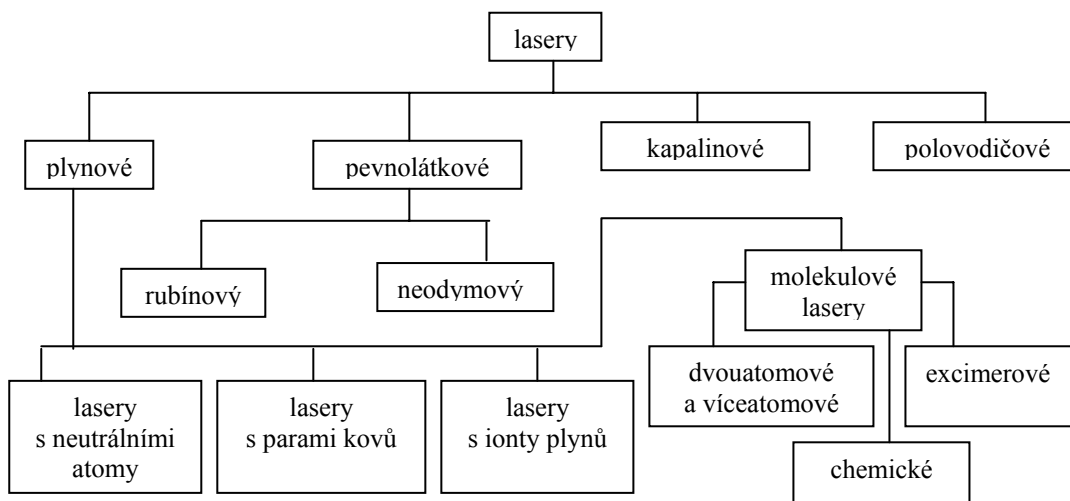
kde $V_f = Vl/d$.

9.2 Druhy laserů a jejich aplikace

Lasery lze rozdělit podle různých hledisek, např.:

- podle aktivního prostředí
- podle druhu buzení
- podle úrovně výkonu
- podle vlnové délky vyzařované vlny
- podle režimu práce (kontinuální, impulsní)

Dělení laserů podle aktivního prostředí je uvedeno v následující tabulce.



Nyní bude stručně pojednáno o vybraných plynových laserech. Do první skupiny plynových laserů lze zařadit:

- lasery s neutrálními atomy (He-Ne; He-Xe; atd.)
- lasery s parami kovů (He-Cd; He-Cu; atd.)
- lasery s ionty plynů (Ar^+ ; Kr^+ ; atd.)

Mezi nejznámější plynový laser patří He-Ne laser. Výkon He-Ne laseru bývá (podle určení) řádově 10^{-1} mW až 10^2 mW. He-Ne lasery se používají zejména ke spektroskopickým nebo interferenčním měřením, k zaměřování objektů, v holografii, ke světelným efektům, k měření vzdálenosti a pod. Účinnost laseru je přibližně 1%. V případě použití Brewsterových okének bude laserové záření lineárně polarizované. Lasery pracují v kontinuálním režimu na mnoha vlnových délkách. Velmi časté je použití vlnové délky 633 nm (červená barva).

Pro relativně krátkou délku vlny se používá He-Cd laser. Typické délky vlny tohoto laseru jsou: 325 nm (UV) a 441,6 nm (modrá). He-Cd lasery se používají zejména při vědeckých experimentech (výzkum interakce záření s látkou). Kontinuální režim u tohoto laseru je možný. Výkon může být řádově několik stovek mW. V případě použití Brewsterových okének bude záření lineárně polarizované.

Značného výkonu se dosahuje u Argonových laserů. Jde o lasery, u nichž bylo dosaženo ve viditelné oblasti spektra v kontinuálním režimu výkonů až 500 W! Účinnost tohoto laseru je však malá (0,1%). Uvedený laser může pracovat na vlnových délkách: 488 nm (modrá) nebo 514,5 nm (zelená). Podobně jako argonové (Ar^+) lasery pracují lasery kryptonové (Kr^+). Použití těchto laserů je významné při buzení kapalinových barvivových laserů, při vědeckých experimenty (výzkum atmosféry) a v lékařství (chirurgie).

V následující tabulce je přehled základních parametrů dosud uvedených laserů:

He-Ne	He-Cd	Ar ⁺
Výkon: 10 mW	Výkon: 100 mW	Výkon: 500 W
Typická délka vlny: 633 nm (červená)	Typická délka vlny: 441,6 nm (modrá)	Typická délka vlny: 514,5 nm (zelená)

Do druhé skupiny plynových laserů lze zařadit:

- dvouatomové (N₂; H₂; atd.)
- víceatomové (CO₂; atd.)
- excimerové (Xe₂, XeF; KrF; atd.)
- chemické (HCl; atd.)

Snadnou konstrukci v důsledku relativně vysokého koeficientu zesílení má N₂ laser. Protože u tohoto laseru není splněna podmínka kontinuálního režimu, bude tento laser pracovat pouze v impulsním režimu. Impulsní výkon laseru je řádu 1 MW; při délce impulsu přibližně 10 ns. Opakovací frekvence bývá 100 Hz. N₂ laser se vzhledem ke své „zajímavé“ vlnové délce (337,1 nm) používá při buzení jiných laserů. Podobně jako N₂ laser pracuje H₂ laser s délkou vlny 116 nm. Jedná se o nejkratší pracovní vlnovou délku dosaženou u běžných typů laserů.

K víceatomovým plynovým laserům patří CO₂ lasery. U těchto laserů se používají různé konstrukce podle druhu buzení a druhu provozu. Lasery mohou pracovat jak v kontinuálním, tak v impulsním provozu. Pracovní vlnové délky jsou 9,6 μm nebo 10,6 μm. Lasery mohou být buzeny buď výbojem v plynu (podélně nebo příčně) nebo dynamicky (rychlým ochlazením stlačeného přehřátého plynu). Při kontinuálním režimu se dosahuje výkonu až 10 kW. V impulsním režimu u příčně buzených (TEA CO₂ lasery) nebo dynamických CO₂ laserů lze dosáhnout výkonu až 1 GW při šířce impulsu 5 ns. Účinnost CO₂ laserů je relativně vysoká 10% až 30%. CO₂ lasery se používají v dálkoměrech, v lidarech, ve spektroskopii, v technologických aplikacích a také při výzkumu termojaderné syntézy.

Významnou skupinu laserů tvoří přeladitelné výkonové excimerové lasery. Excimerové lasery mohou pracovat pouze v impulsním režimu. Impulsní výkon je přibližně 100 W při šířce impulsu 10 ns a opakovací frekvenci 1 kHz. Účinnost laseru je asi 16%. Tyto lasery se používají v lékařské (oční) chirurgii, při dělení izotopů, k buzení barvivových laserů a také při výzkumu termojaderné syntézy.

Přehled vlnových délek excimerových laserů je uveden v následující tabulce:

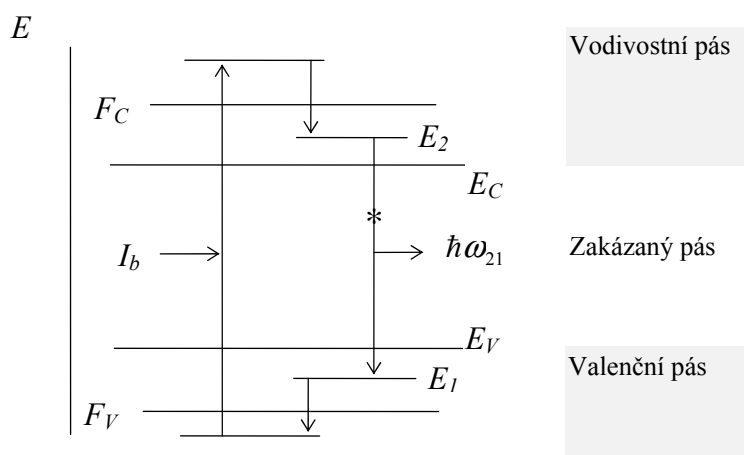
excimer	střední vlnová délka
ArF	193 nm
Xe ₂	173 nm
KrF	248 nm
XeCl	308 nm
XeF	351 nm

10 Polovodičová optoelektronika

10.1 Polovodičový laser

Aktivní látka: GaAs; Zn (pro získání polovodiče typu „P“); Te (pro získání polovodiče typu „N“);

Energetické spektrum aktivní látky má pásovou strukturu (viz obr. 10.1)



Obrázek 10.1: Energetické spektrum aktivní látky polovodičového laseru (E - energie; F_C - Fermiho hladina pro vodivostní pás; F_V - Fermiho hladina pro valenční pás; E_C - nejnížší hladina vodivostního pásu; E_V - nejvyšší hladina valenčního pásu; E_2, E_1 - horní a spodní hladina laserového přechodu; I_b - budící proud)

V každém pásu nastane v relativně krátkém čase (10^{-13} s) termodynamická rovnováha, proto lze každý pás považovat za relativně samostatný termodynamický systém s vlastní „kvazifermiho“ hladinou.

Nyní se odvodí podmínka získání inverzního obsazení. Pro obsazení hladin E_1 a E_2 platí Fermiovo - Diracovo rozdělení, proto

$$N_1 = f_V = \frac{1}{e^{\frac{E_1 - F_V}{kT}} + 1} \quad (10.1)$$

$$N_2 = f_C = \frac{1}{e^{\frac{E_2 - F_C}{kT}} + 1} \quad (10.2)$$

kde f_V, f_C jsou pravděpodobnosti obsazení příslušné energetické hladiny jedním elektronem a $(1 - f_V), (1 - f_C)$ jsou pravděpodobnosti neobsazení příslušné energetické hladiny.

Kinetická rovnice pro stimulovaně emitované fotony je

$$\left(\frac{dN_f}{dt}\right) = B_f N_f [f_C(1-f_V) - f_V(1-f_C)] \times (1 \text{ částice}); \quad (10.3)$$

Pro zjednodušení zápisu označme

$$B_f N_f [f_C(1-f_V) - f_V(1-f_C)] = W_{gen}, \quad (10.4)$$

$$\frac{dN_f}{dt} > 0 \Leftrightarrow \Delta N_i > 0; \Delta N_i \propto W_{gen}, \quad (10.5)$$

kde W_{gen} je hustota pravděpodobnosti přechodů vedoucích k laserové generaci.

Pro rychlost absorpce (úbytek fotonů v důsledku absorpce za 1s) platí

$$\left(\frac{dN_f}{dt}\right)_{abs} = B_f N_f [f_V(1-f_C)], \quad (10.6)$$

kde $[f_V(1-f_C)]$ je pravděpodobnost přechodu elektronu z pásma „V“ do pásma „C“. Pro rychlost stimulované emise (přírůstek fotonů v důsledku stimulované emise za 1s) platí

$$\left(\frac{dN_f}{dt}\right)_{st} = B_f N_f [f_C(1-f_V)], \quad (10.7)$$

kde $[f_C(1-f_V)]$ je pravděpodobnost přechodu elektronu z pásma „C“ do pásma „V“.

Podmínka inverzního obsazení je vyjádřena nerovností ($\Delta N_i > 0$). Po dosazení je

$$\left(\frac{dN_f}{dt}\right)_{st} > \left(\frac{dN_f}{dt}\right)_{abs}, \quad (10.8)$$

tedy

$$B_f N_f [f_C(1-f_V) - f_V(1-f_C)] > 0. \quad (10.9)$$

Pokud je $B_f N_f \neq 0$, je $f_C(1-f_V) > f_V(1-f_C)$, z čehož lze odvodit, že $f_C > f_V$. Po dosazení je

$$\frac{1}{e^{\frac{E_2-F_C}{kT}} + 1} > \frac{1}{e^{\frac{E_1-F_V}{kT}} + 1} \quad (10.10)$$

a nakonec:

$$F_C - F_V > E_2 - E_1, \quad (10.11)$$

což je podmínka získání inverzního obsazení u polovodičových laserů.

Kinetickou rovnici pro elektrony (časově jednotkovou změnu počtu elektronů v procesu interakce záření a látky) je možno napsat ve tvaru

$$\frac{dN_e}{dt} = (W_{st} - W_{abs}) + W_{sp} + W_{nezář} + W_{sum}, \quad (10.12)$$

kde N_e je počet elektronů a W_{st} , W_{abs} , W_{sp} , $W_{nezář}$, W_{sum} jsou hustoty pravděpodobnosti stimulované emise, absorpce, spontánní emise, nezářivých přechodů a ostatních přechodů vyvolávajících šumy.

Zápis se zjednoduší označením

$$W_{st} - W_{abs} = W_{gen}, \quad (10.13)$$

$$W_{sp} + W_{nezář} + W_{sum} = W_{\Sigma}. \quad (10.14)$$

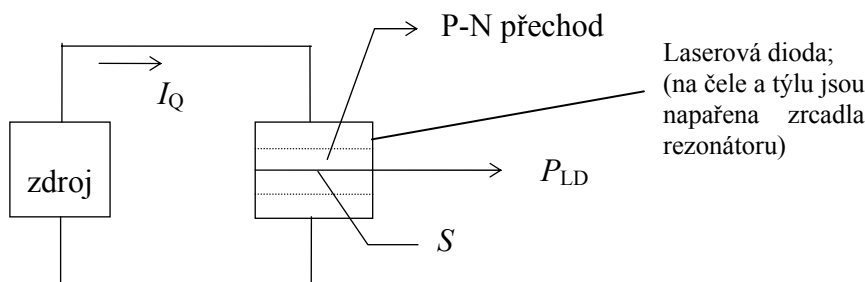
Po dosazení lze jednoduše vyjádřit:

$$\frac{dN_e}{dt} = W_{gen} + W_{\Sigma}. \quad (10.15)$$

Nyní je třeba se zaměřit na vyjádření vztahu proudové hustoty a hustoty pravděpodobnosti laserové generace. Platí (viz také obr. 10.2):

$$\frac{dN_e}{dt} = \frac{I_Q}{e} \eta_b = \frac{JS}{e} \eta_b; \quad \eta_b = \frac{I_e}{I_Q}, \quad (10.16)$$

kde I_Q je proud v obvodu, e je náboj elektronu, η_b je účinnost budícího proudu, S je aktivní plocha PN přechodu a I_e je proud přímo vyvolávající buzení látky.



Obrázek 10.2: Buzení laserové diody (P_{LD} je optický výkon laserové diody)

Dosazením (10.15) do (10.16) vychází

$$\frac{JS}{e} \eta_b = W_{gen} + W_{\Sigma} \quad (10.17)$$

a po úpravě

$$J = \frac{e}{\eta_b S} (W_{gen} + W_{\Sigma}). \quad (10.18)$$

Prahová proudová hustota se získá úpravou vztahu (10.18) s uvažováním: $W_{gen} = 0 \Leftrightarrow J \leq J^*$. Vychází

$$J^* = \frac{e}{\eta_b S} W_{\Sigma}. \quad (10.19)$$

Zavede-li se nyní do (10.18) prahová proudová hustota, získá se vztah

$$J = \frac{e}{\eta_b S} W_{gen} + J^*, \quad (10.20)$$

který po úpravě dává konečný výraz vztahu proudové hustoty a hustoty pravděpodobnosti laserové generace:

$$W_{gen} = \frac{\eta_b S}{e} (J - J^*); \text{ pro } J > J^*. \quad (10.21)$$

Lze usoudit, že pro $J > J^*$ platí: $J \propto W_{gen} \propto \Delta N_i \propto \beta$; (β je koeficient zesílení aktivní látky). Koeficient zesílení β je tedy úměrný budicí proudové hustotě J a platí $\beta = gJ$ a také $\beta^* = gJ^*$, kde konstanta $g \cong 10^{-2} \text{ mm.A}^{-1}$. Pomocí úvah z předcházející kapitoly (viz vztahy 9.15 až 9.24) lze prahovou proudovou hustotu vyjádřit ve tvaru

$$J^* = \frac{\beta^*}{g} = \frac{\gamma}{gl} = \frac{1}{gl} (\bar{\gamma}_R + \gamma_i); (J^* \cong 400 \text{ A.mm}^{-2}). \quad (10.22)$$

Optický výkon polovodičového laseru lze nyní vyjádřit následujícím způsobem:

$$P_{LD} = W_{gen} \hbar \omega_{21} \frac{\bar{\gamma}_R}{\bar{\gamma}_R + \gamma_i} \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{\eta_b S \hbar \omega_{21}}{e} \cdot \frac{\gamma_2}{2(\bar{\gamma}_R + \gamma_i)} (J - J^*); \text{ pro } J \geq J^*, \quad (10.23)$$

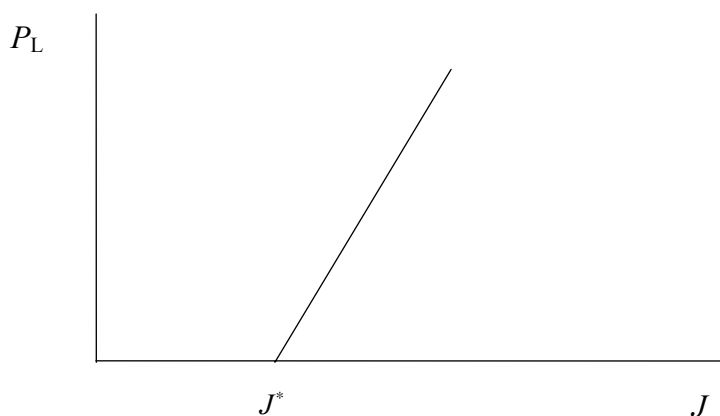
kde $\bar{\gamma}_R = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ jsou střední ztráty na zrcadlech; γ_1, γ_2 jsou dílčí ztráty na předním a zadním zrcadle rezonátoru, γ_i jsou ostatní (např. difrakční) ztráty a $\hbar\omega_{21}$ je energie jednoho fotonu. Označí-li se

$$P_{LD,0} = \frac{\eta_b S \hbar \omega_{21}}{e} \cdot \frac{\gamma_2}{2(\bar{\gamma}_R + \gamma_i)}, \quad (10.24)$$

lze výsledný tvar zapsat

$$P_{LD} = P_{LD,0} J^* \left(\frac{J}{J^*} - 1 \right); \text{ pro } J > J^*. \quad (10.25)$$

Graficky je výkonová charakteristika laseru uvedena na obr. 10.3.



Obrázek 10.3: Výkonová charakteristika polovodičového laseru

Laserové diody vyzařují optický výkon z relativně malé plošky eliptického tvaru. Lineární rozměry této plošky jsou řádu 10^{-6} m a poměr hlavní a vedlejší poloosy bývá 4:1. Vyzařovaný svazek má eliptickou stopu s různou úhlovou šířkou svazku v rovině hlavní a vedlejší poloosy. V rovině vedlejší poloosy je úhlová šířka svazku větší než v rovině hlavní poloosy a je rovna přibližně 30° . Kruhová symetrie svazku se dosahuje speciální vysílací optickou soustavou.

Polovodičové lasery (laserové diody, LD) jsou na optickém výstupu pouzdra opatřeny buď okénkem (pro záření do volného prostoru) nebo (jsou-li určeny pro záření do vlákna) tzv. „pigtailem“ – kouskem optického vlákna, do kterého je výkon LD s určitými ztrátami zaveden. LD mohou pracovat v kontinuálním nebo impulsním režimu. Pracuje-li LD v kontinuálním režimu, bývá hodnota optického výkonu 0,1 mW až 100 mW při. V impulsním režimu lze dosáhnout výkonu řádové hodnoty 100 W při šířce impulsu 100 ns. Prahová hodnota budícího proudu např. u kontinuálně pracující LD s optickým výkonem 10 mW je přibližně 40 mA. Doba náběhu komunikačních LD bývá menší než 1 ns.

Použití LD je velmi rozsáhlé. V některých případech slouží jako optické budící zdroje jiných pevnolátkových laserů. Známé je použití LD v laserových tiskárnách, čtečkách čárového kódu apod. Velmi významné je použití LD v komunikacích. Doba náběhu

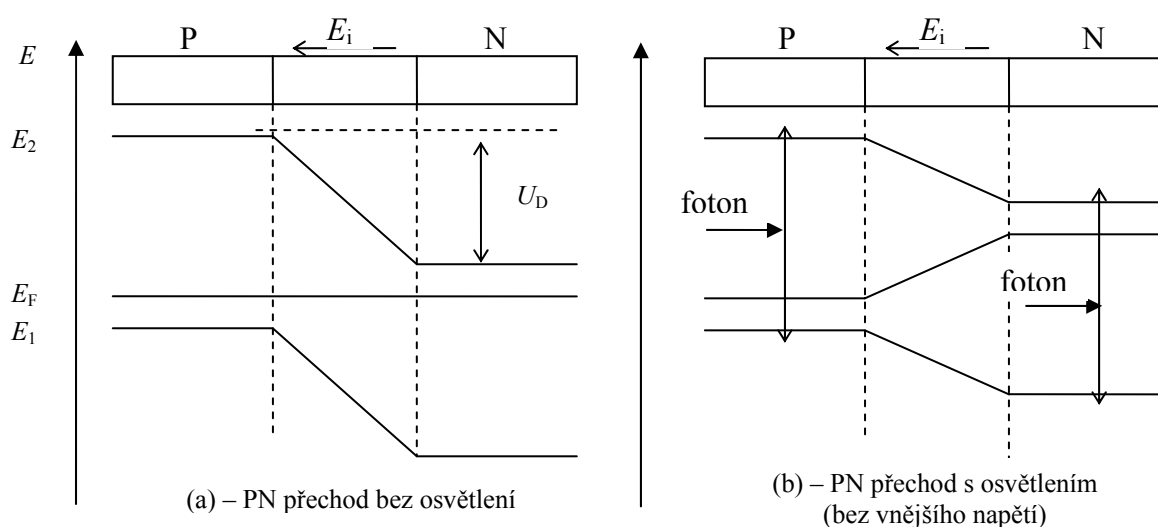
komunikačních LD je menší než 1 ns. LD pracují v typických spektrálních oknech: 850 nm, 1300 nm a 1550 nm.

Hlavní výhody LD spočívají v jejich snadném přímé modulaci budícím proudem. Šířka pásma přenosu může dosáhnout řádové hodnoty několik GHz. LD mají malé rozměry (lineární rozměry pouzdra obvykle nejsou větší než několik mm). Dobrá cenová dostupnost je nabízena u LD pracujících ve spektrálním okně 850 nm.

10.2 Fotodiody

Existují dva základní typy fotodiod: *fotodiody PIN a lavinové fotodiody (APD)*. Materiál: (AlGaAs/GaAs - 850 nm; InGaAs/InP - 1300 nm až 1550 nm; HgCdTe/CdTe - 3000 nm až 17000 nm; InGaAsP/InP a GaAlAsSb/GaSb - 920 nm až 1700 nm)

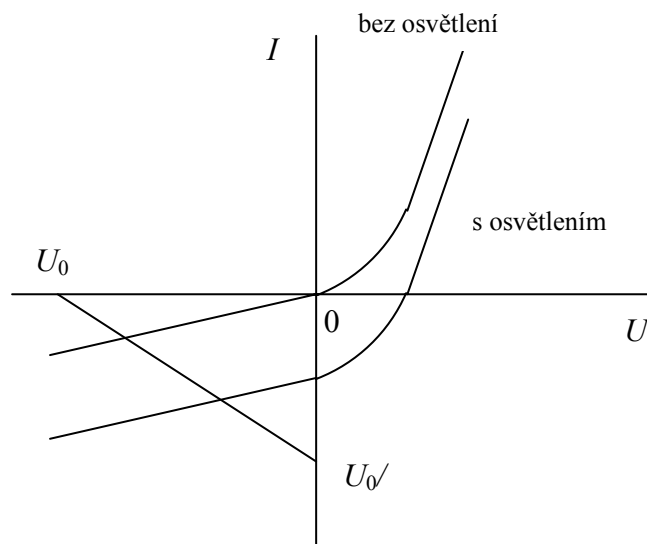
Po osvětlení P-N přechodu vznikají v polovodičích typu P i N minoritní nositelé náboje (elektrony v „P“; díry v „N“). Množství minoritních nábojů se mění v závislosti na intenzitě osvětlení. Minoritní náboje se difúzně přemísťují na opačnou stranu P-N přechodu (elektrony do „N“; díry do „P“), kde se stávají majoritními nositeli náboje. Dochází k částečné neutralizaci prostorově rozloženého náboje v P-N přechodu a důsledkem je změna úrovně Fermiho hladiny. Na P-N přechodu vznikne rozdíl potenciálů závislý na intenzitě osvětlení a odporu vnějšího obvodu.



Obrázek 10.4: Znázornění energetických hladin P-N přechodu fotodiody a vzniku minoritních nositelů náboje (U_D – napětí vnitřní potenciálové bariéry; E_F – Fermiho hladina)

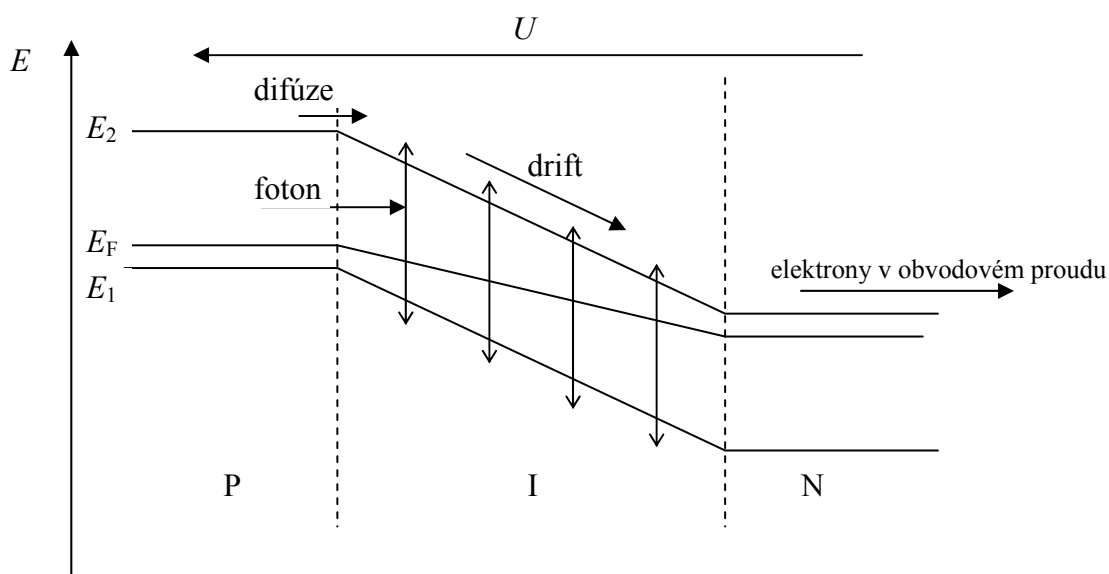
Difúze elektronů probíhá ve směru od „P“ k „N“. Díry difundují v opačném směru. Vnitřní elektrické pole E_i má směr od „N“ k „P“.

Na obr. 10.5 je V-A charakteristika fotodiody. Fotodioda se zapojuje v nepropustném směru. Zatěžovací odpor je značen R a napětí zdroje U_0 .



Obrázek 10.5: V-A charakteristika fotodiody
(U – napětí na fotodiodě, I – proud fotodiodou)

U fotodiody PIN se mezi polovodič typu „P“ a „N“ vkládá vrstva izolantu „I“. Vrstvou „I“ se rozšiřuje oblast interakce fotonů s látkou. Po osvětlení aktivní plochy fotodiody vznikají volné nositelé náboje, které se vlivem vnějšího pole rychle přemístí (drift) k přechodům „P-I“ a „I-N“. Zařazením vrstvy „I“ se dosahuje vyšší citlivost. Na obr. 10.6 jsou znázorněny energetické hladiny a přechody fotodiody PIN s přiloženým napětím.



Obrázek 10.6: Znázornění energetických hladin P-N přechodu fotodiody PIN s přiloženým napětím U ; ($U = 10 \text{ V}$)

Časová konstanta fotodiody PIN je vyjádřena vztahem

$$\tau = \frac{w}{v_T} \approx 10^{-10} \text{ s}, \quad (10.26)$$

kde w je tloušťka vrstvy „I“ a v_T je rychlost nositelů náboje. Kapacita fotodiody je daná vztahem

$$C = \varepsilon \frac{S}{w}, \quad (10.27)$$

kde S je plocha přechodu a ε je permitivita prostředí.

Proudová citlivost fotodiody se definuje jako proud na jejím výstupu I vztažený k jednotce optického výkonu, který na fotodiodu dopadá:

$$S_I = \frac{dI}{dP}. \quad (10.28)$$

Citlivost fotodiody je spektrálně závislá. Např. u křemíkových PIN fotodiod se dosahuje maximální citlivosti ($0,6 \text{ A.W}^{-1}$) pro délku vlny 900 nm. Podobně je definovaná napěťová citlivost jako napětí U na výstupu fotodiody vztažené k jednotce optického výkonu, který na fotodiodu dopadá:

$$S_U = \frac{dU}{dP}. \quad (10.29)$$

Další zvýšení citlivosti fotodiod se dosáhlo rozšířením vrstvy „I“ a zvýšením přiloženého napětí U . U fotodiody takovéto konstrukce dochází k vnitřnímu zesílení ($G_{FD} = 100$), které je způsobené lavinovým jevem. Uvolněné elektrony po interakci s fotony jsou urychlovány relativně vysokým přiloženým napětím ($U = 100 \text{ V}$) a strhávají k uvolnění další elektrony. Fotodioda této konstrukce se nazývá *lavinová fotodioda* (APD).

Podobně jako polovodičové lasery jsou i fotodiody na optickém vstupu pouzdra opatřeny buď okénkem (pro příjem optického výkonu z volného prostoru) nebo (jsou-li určeny pro detekci výkonu z vlákna) tzv. „pigtailem“.

Důležitým parametrem fotodiody je elektrická kapacita P-N přechodu. Tato veličina je závislá na velikosti aktivní plochy. Typická hodnota je 10 pF. Velikost aktivní plochy bývá tvaru kruhu s průměrem od 0,1 mm do 3 mm (i více). Čím větší je aktivní plocha fotodiody, tím větší výkon přijímá, ale zvyšuje se časová konstanta τ .

Šumové vlastnosti fotodiod jsou definovány veličinou „výkon ekvivalentní šumu“ (NEP). NEP určuje střední výkon harmonicky modulovaného optického výkonu, při kterém je střední hodnota napětí na fotodiodě rovna standardní odchylce šumového napětí. Uvedenou definici lze vyjádřit zápisem:

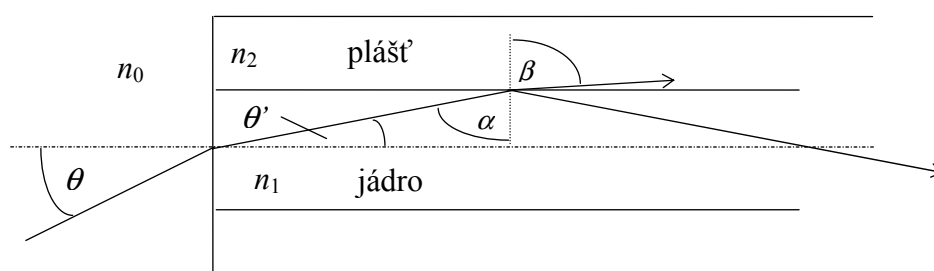
$$NEP = \frac{\sqrt{\langle \Delta u_s \rangle^2}}{S_U}. \quad (10.30)$$

Veličina NEP se často vztahuje na jednotku šířky pásma přenosu B_m . Protože výkon šumu je přímo úměrný $\sqrt{B_m}$, definuje se $NEP_1 = \frac{\sqrt{\langle \Delta u_s \rangle^2}}{S_U \sqrt{B_m}} [\text{W} \cdot \sqrt{\text{Hz}}]$.

11 Optická vlákna

11.1 Princip šíření světla v optických vláknech

První, kdo demonstroval totální vnitřní odraz jako základ optiky vedených vln, byl Tyndall (1820 - 1893). Vlnovou teorii (teorii LP módů) rozpracoval Gloge (1971). V této kapitole bude objasněn princip šíření světla ve vláknech podle teorie totálního odrazu. Předpokládejme optické vlákno (OV) se skokovým profilem indexu lomu (SI).



Obrázek 11.1: Šíření světla v optickém vláknu typu SI
 (n_0 – index lomu vzduchu, n_1 – index lomu jádra, n_2 – index lomu pláště,
 θ – úhel dopadu světla na čelo vlákna, θ' – úhel lomu světla v jádru,
 α – úhel dopadu světla na rozhraní jádro/plášť, β – úhel lomu světla v plášti)

Pro rozhraní vzduch/jádro platí Snellův zákon

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{n_1}{n_0} \quad (11.1)$$

a podobně pro rozhraní jádro/plášť platí

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (11.2)$$

Podmínkou šíření světla ve vláknu je vznik totálního odrazu na rozhraní jádro/plášť. Předně musí být splněna nerovnost: $n_1 > n_2$. Největší úhel dopadu na rozhraní jádro/plášť, při kterém dochází k totálnímu odrazu označme α_{\max} . (Při totálním odrazu je $\beta = \frac{\pi}{2}$ a $\sin \beta = 1$.) Platí:

$$\sin \alpha_{\max} = \cos \theta'_{\max} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (11.3)$$

$$\sin \theta'_{\max} = \sqrt{1 - \cos^2 \theta'_{\max}}, \quad (11.4)$$

$$\sin \theta_{\max} = \frac{n_1}{n_0} \sqrt{1 - \cos^2 \theta'_{\max}} = \frac{n_1}{n_0} \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} \approx \left(n_1^2 - n_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \approx (2n_1 \Delta)^{\frac{1}{2}}, \quad (11.5)$$

kde $\Delta = n_1 - n_2$ je rozdíl v indexech lomu jádra a pláště, přičemž $n_1 \approx n_2$; $\Delta \ll 1$; θ_{\max} je tzv. aperturní (příjmový) úhel vlákna.

Veličina $\sin \theta_{\max}$ se definuje jako numerická apertura (NA) optického vlákna a je mírou schopnosti vlákna přijmout optický výkon.

Podle technologie výroby a provozu optických vláken se vlákna dělí na:

- mnohomodová se skokovou změnou indexu lomu (SI)
- gradientní s postupnou změnou indexu lomu (GI)
- jednomodová (SM)

Gradientní vlákna umožňují šíření více modům, ale speciální rozložení indexu lomu umožňuje rychlejší šíření modům neležícím v ose vůči modům v ose vlákna, proto u těchto vláken dochází ke značné redukci disperze při zachování NA.

Jednomodová vlákna jsou vyrobena tak, aby bylo umožněno šíření pouze osovým modům. Průměr jádra jednomodových vláken je relativně malý (řádově několik μm), disperze je malá, ale malá je též NA, což signalizuje určité nároky při zavádění optického výkonu do vlákna.

V následující tabulce 11.1 jsou uvedeny přehledně hodnoty numerické apertury pro jednotlivé druhy optických vláken.

Tabulka 11.1: Tabulka typických hodnot NA jednotlivých druhů vláken

typ vlákna	NA
SI	0,3
GI	0,3
SM	0,055

Počet vedených modů M (u vláken typu SI a GI) lze vypočítat pomocí určitého parametru vlákna V („normované frekvence“), který je objasněn ve vlnové teorii vláken

$$V = 2\pi \frac{a}{\lambda_0} (NA), \quad (11.6)$$

kde a je poloměr jádra a λ_0 je vlnová délka ve vakuu. Pro $V \gg 1$ je

$$M \approx \frac{V^2}{2} \text{ (pro SI) a } M \approx \frac{V^2}{4} \text{ (pro GI).} \quad (11.7)$$

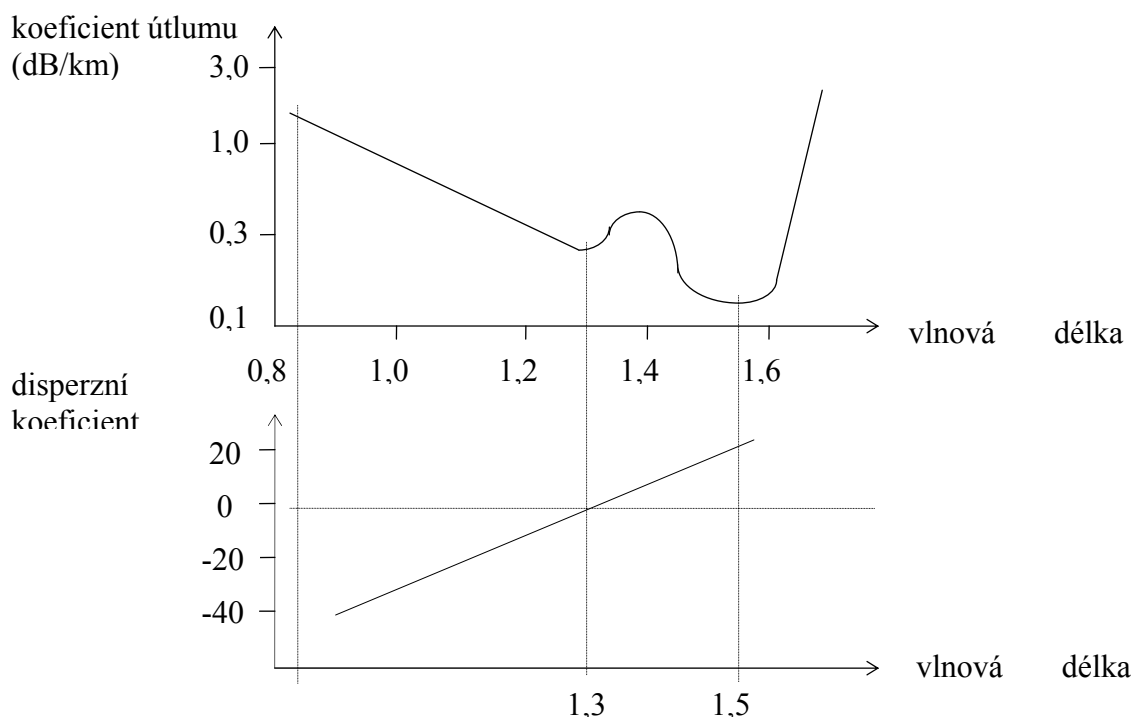
Z modové teorie optických vláken plyne také podmínka jednomodovosti. Pro OV typu SI se jednomodovost zabezpečí při $V < 2,405$. Lze pak odvodit podmínku pro průměr jádra:

$$2a < 0,38 \frac{\lambda_0}{(NA)} . \quad (11.8)$$

11.2 Útlum a disperze optických vláken

Světlovodná vlákna se vyrábějí z křemenného skla, jehož vlastnosti lze charakterizovat *koeficientem útlumu* a *koeficientem disperze* (viz obr. 11.2). Na grafech je vidět spektrální závislost obou uvedených koeficientů. Významná jsou tři okna propustnosti: 850 nm, 1300 nm a 1550 nm. Spektrální okno 850 nm nemá z hlediska útlumu ani z hlediska disperze významné pozitivní vlastnosti, ale je charakteristické dobrou cenovou dostupností příslušných pasivních i aktivních prvků. Spektrální okno 1300 nm je charakteristické nejnižším dosažitelným koeficientem disperze; spektrální okno 1550 nm je charakteristické nejnižším dosažitelným koeficientem útlumu. V obou oknech 1300 nm i 1550 nm se používají hlavně jednomodová vlákna, pro okno 850 nm je typické použití mnohomodových vláken.

Příčiny útlumu jsou: Rayleighův rozptyl v oblasti kratších vlnových délek, rezonanční absorpce na OH skupinách a infračervená (IČ) absorpce v oblasti delších vlnových délek. (Rozlišuje se útlum absorpcí a útlum rozptylem.)

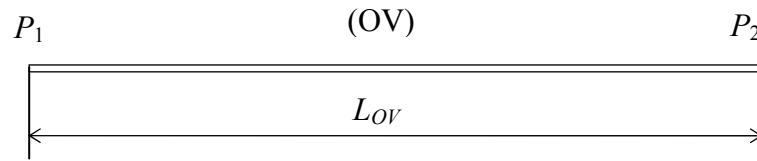


Obrázek 11.2: Spektrální závislost koeficientu útlumu a koeficientu materiálové disperze

Koeficient útlumu $\alpha_{1,ov}$ je definovaný (v [dB.km⁻¹]):

$$\alpha_{1,ov} = \frac{-1}{L_{ov}} 10 \log \frac{P_2}{P_1} ; (\alpha_{1,ov} \text{ je veličinou kladnou}), \quad (11.9)$$

kde L_{OV} je délka vlákna v km, P_1 je optický výkon na vstupu vlákna a P_2 je optický výkon na vstupu vlákna (viz obr. 11.3).



Obrázek 11.3: K definici koeficientu útlumu

Někdy je koeficient útlumu udán v $[\text{km}^{-1}]$. Značí se $\tilde{\alpha}_{1,OV}$ a definuje se:

$$\tilde{\alpha}_{1,OV} = \frac{-1}{L_{OV}} \ln \frac{P_2}{P_1}. \quad (11.10)$$

Vztah mezi oběma koeficienty útlumu je

$$\tilde{\alpha}_{1,OV} = 0,23\alpha_{1,OV}. \quad (11.11)$$

Útlum optických vláken klade na optické spoje tzv. *útlumové omezení*. Při analýze útlumového omezení se v decibelové míře porovnávají příslušné výkony a útlumy, přičemž platí (absolutní výkony jsou v dBm):

$$P_V - \alpha_V - \rho - \alpha_{1,OV} L_{\max,OV} = P_{0,P}, \quad (11.12)$$

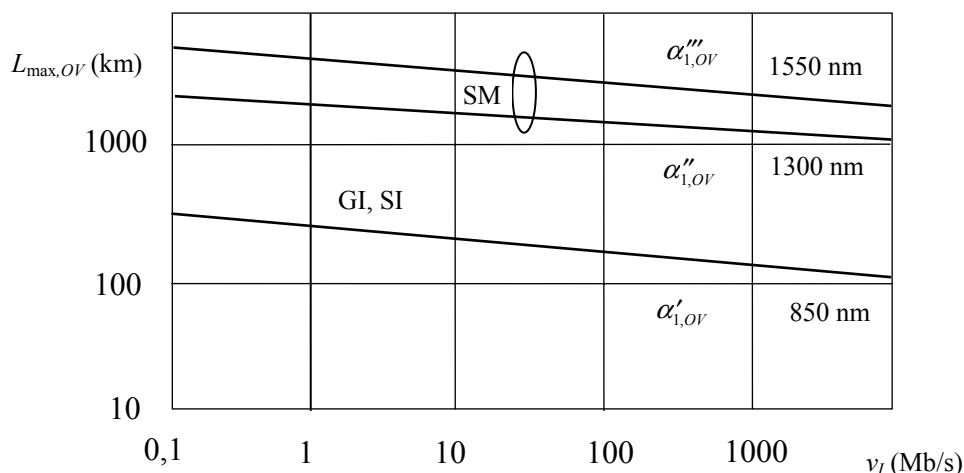
kde P_V – výkon vysílače, α_V - je součet útlumů všech vazeb, ρ - součet všech rezerv nebo zisků a $P_{0,P}$ – citlivost přijímače. Výsledkem bilance je maximální (z hlediska útlumového omezení) délka vlákna $L_{\max,OV}$.

Citlivost přijímače se definuje středním počtem fotonů na jeden bit \bar{n}_0 nebo odpovídajícím výkonem

$$P_{0,P} = \hbar \omega \bar{n}_0 \nu_I \quad (11.13)$$

nutným k dosažení požadované chybovosti BER (obvykle 10^{-9}). Při dané modulační technice (např. IM/OOK) odpovídá požadované chybovosti BER určitá hodnota poměru signálu k šumu SNR_0 . (Hodnotě BER = 10^{-9} odpovídá hodnota $SNR_0 = 15,6$ dB.)

Závislost maximální délky vybraných typů vláken na přenosové rychlosti při provozu optické trasy pouze s útlumovým omezením je uvedena na obr. 11.4.



Obrázek 11.4: Závislost maximální délky vybraných typů vláken na přenosové rychlosti při provozu optické trasy pouze s útlumovým omezením

$$\begin{aligned}
 \alpha'_{1,OV} &= 2,5 \text{ dB.km}^{-1} @ \lambda_0 = 850 \text{ nm}; \\
 \alpha''_{1,OV} &= 0,35 \text{ dB.km}^{-1} @ \lambda_0 = 1300 \text{ nm}; \\
 \alpha'''_{1,OV} &= 0,16 \text{ dB.km}^{-1} @ \lambda_0 = 1550 \text{ nm}.
 \end{aligned}
 \tag{11.14}$$

Kromě útlumu nastává v optických vláknech jev disperze. *Příčiny disperze jsou:* mnohomodovost (mnohosměrovost šíření), spektrální závislost grupové rychlosti šíření jednotlivých modů, spektrální závislost indexu lomu, závislost indexu lomu na optické intenzitě. Rozlišuje se: modová, vlnovodná, materiálová a nelineární disperze. (Společný projev materiálové a vlnovodné disperze se označuje jako chromatická disperze.)

Koeficientem disperze je celková střední kvadratická šířka (rms) výsledného impulsu (obálky) vztažená na jednotku délky OV. Pro *modovou disperzi* je

$$\begin{aligned}
 \sigma_{1,T} &= \frac{\sigma_T}{L_{OV}} = \frac{\Delta n_1}{2c_0} \approx 20 \text{ ns/km@SI} \\
 \sigma_{1,T} &= \frac{\sigma_T}{L_{OV}} = \frac{\Delta^2 n_1}{4c_0} \approx 0,2 \text{ ns/km@GI} \\
 \sigma_{1,T} &= 0 \text{ ns/km@SM}
 \end{aligned}
 \tag{11.15}$$

Uvedené vztahy plynou z vlnové teorie. V případě SI vlákna lze udělat přibližný výpočet pomocí následující úvahy: Optický impuls zavedený do vlákna se v mnohomodovém vláknu rozdělí na více složek a každá složka odpovídá jednomu modu. Pro řádový odhad koeficientu disperze postačí zvažovat šíření pouze dvou složek. Jedna se „šíří po paprsku“ jdoucím osou vlákna a druhá „po paprsku“ odkloněném od osy o úhel θ'_{\max} . Časový rozdíl Δt mezi oběma složkami na konci vlákna bude odpovídat rozdílu drah odpovídajícímu vybraným složkám a lze jej vyjádřit:

$$\Delta t = \frac{n_1}{c_0} \frac{L_{OV}}{\cos \theta'_{\max}} - \frac{n_1}{c_0} L_{OV} = \frac{n_1}{c_0} L_{OV} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) = \frac{L_{OV}}{c_0} \frac{n_1 \Delta}{n_2}. \quad (11.16)$$

Získaný výraz lze porovnat s prvním vztahem uvedeným v rámci (11.15), protože platí $\Delta t = \sigma_T$. Po dosazení je patrná řádová shoda mezi oběma výsledky.

V případě SM vláken se ovšem modová disperze neprojeví a v tomto případě se posuzuje *materiálová disperze*. Pro materiálovou disperzi z vlnové teorie pro SM vlákna plyne

$$\sigma_{1,T} = \frac{\lambda_0 \Delta \lambda}{c_0} \frac{d^2 n_1}{d \lambda_0^2} \quad (11.17)$$

kde λ_0 - délka vlny ve vakuu a $\Delta \lambda$ - šířka spektrální čáry LD. Například:

$$\sigma_{1,T} \approx 0,002 \text{ ns.km}^{-1} @ \text{LD} (\lambda = 1300 \text{ nm}; \Delta \lambda = 2 \text{ nm}) \quad (11.18)$$

Disperze optických vláken klade na optické spoje tzv. *disperzní omezení*. Při analýze disperzního omezení se porovnávají časový interval jednoho bitu a přenosová rychlost. Překročí-li σ_T hodnotu časového intervalu jednoho bitu $T = v_I^{-1}$; (v_I je přenosová rychlost v bit/s), dojde k mezisymbolové interferenci. Volí se $\sigma_T = \frac{T}{4} = \frac{1}{4v_I}$. Po dosazení je

$$L_{OV} v_I = \frac{c_0}{2n_1 \Delta} \approx 10 \text{ km.Mb.s}^{-1} @ \text{SI} \quad (11.19)$$

$$L_{OV} v_I = \frac{c_0}{n_1 \Delta^2} \approx 2 \text{ km.Gb.s}^{-1} @ \text{GI} \quad (11.20)$$

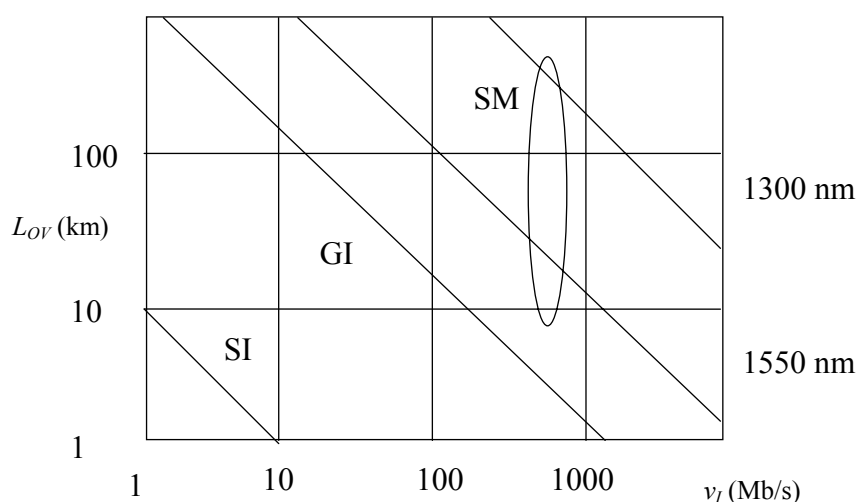
Parametr „ $L_{OV} v_I$ ” je základním parametrem při posuzování přenosových vlastností vláken. Na konkrétních hodnotách „ $L_{OV} v_I$ ” parametru je vidět kvalita vláken GI, které se hodnotou parametru „ $L_{OV} v_I$ ” příliš neliší od SM vláken pracujících v oknu 1550 nm (viz výraz (11.22)).

Pro jednomodový laser se šířkou spektrální čáry 1 nm je

$$L_{OV} v_I \approx 250 \text{ km.Gb.s}^{-1} @ \text{SM} (\lambda = 1300 \text{ nm}) \quad (11.21)$$

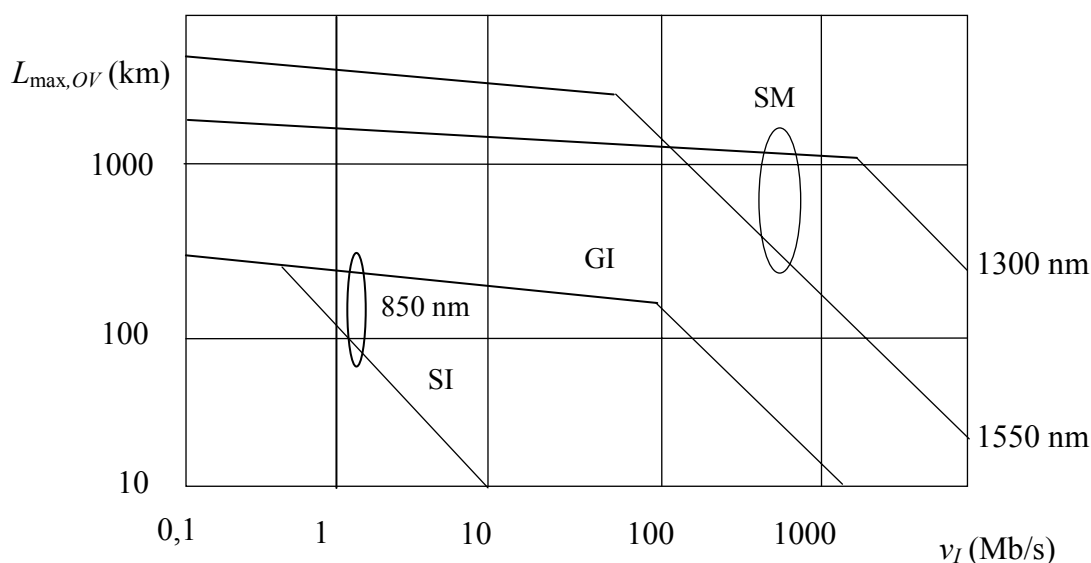
$$L_{OV} v_I \approx 15 \text{ km.Gb.s}^{-1} @ \text{SM} (\lambda = 1550 \text{ nm}) \quad (11.22)$$

Na obr. 11.5 je ukázána závislost maximální délky vybraných typů vláken na přenosové rychlosti při provozu optické trasy pouze s disperzním omezením



Obrázek 11.5: Závislost maximální délky vybraných typů vláken na přenosové rychlosti při provozu optické trasy pouze s disperzním omezením

Na závěr lze ukázat (viz obr. 11.6) omezení maximální délky vlákna jak útlumem, tak disperzí. Při menších přenosových rychlostech převládá útlumové omezení, při vyšších přenosových rychlostech má dominantní význam disperzní omezení.



Obrázek 11.6: Závislost maximální délky vybraných typů vláken na přenosové rychlosti při provozu optické trasy jak s disperzním, tak s útlumovým omezením pouze s disperzním omezením

12 Optické bezkabelové spoje

12.1 Atmosférické přenosové prostředí

Optickým bezkabelovým spojem (OBS) se zde rozumí plně duplexní spoj, který k přenosu informace v *atmosférickém přenosovém prostředí* (APP) využívá optickou nosnou vlnu obsahující jeden nebo více vlnově dělených kanálů, jejichž optický výkon je soustředěn do jednoho nebo více úzkých svazků. V nejjednodušším případě je spoj navržen pro přenos signálu s digitální intenzitní modulací (IM/OOK). Jedná se optické spoje provozované jak v uzavřené místnosti, tak ve volném ovzduší (troposféře) nebo v kosmickém prostoru.

APP má značný vliv na kvalitu přenosu. APP je prostředím obecně *nestacionárním a nehomogenním* (předpokládá se, že také dielektrickým, lineárním, nedisperzním, izotropním) a jeho vliv na kvalitativní parametry přenosového kanálu má náhodný charakter.

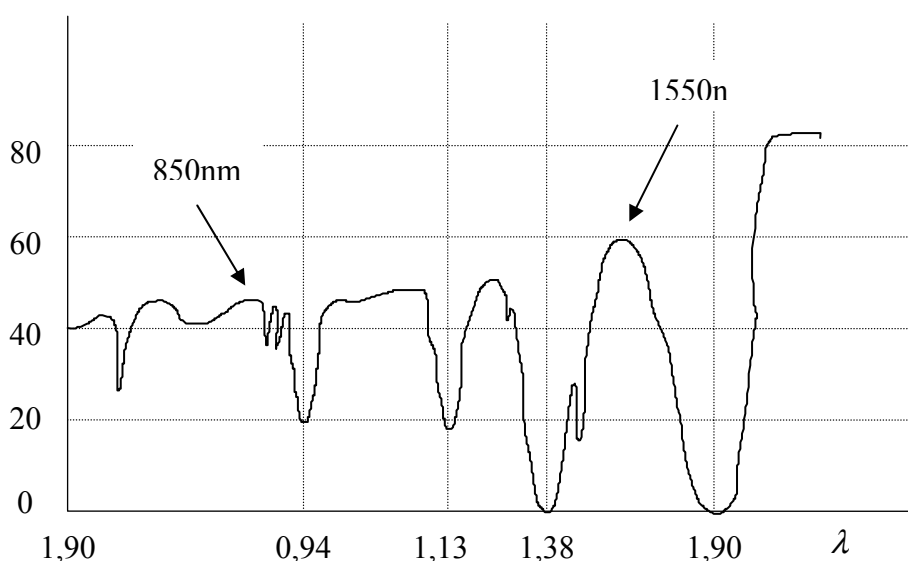
Základními veličinami pro modelování vlivu APP na kvalitu přenosu OBS jsou koeficient extinkce α a index lomu prostředí n . Obě veličiny jsou obecně závislé na souřadnicích prostoru, na času a na délce optické vlny. Statistický charakter koeficientu extinkce (zeslabení) je vyjádřen variací σ_α^2 a střední hodnotou $\bar{\alpha}$. Statistický charakter indexu lomu se vyjadřuje strukturním parametrem indexu lomu C_n^2 a střední hodnotou \bar{n} .

$$\alpha = \alpha(\vec{r}, t, \lambda); \bar{\alpha}; \sigma_\alpha^2 \quad (12.1)$$

$$n = n(\vec{r}, t, \lambda); \bar{n}; C_n^2 \quad (12.2)$$

Na obr. 12.1 je uvedena spektrální závislost propustnosti „čisté“ a „klidné“ atmosféry. OBS pracují v oknech 850 nm a 1550 nm.

propustnost atmosféry



Obrázek 12.1: Spektrální závislost propustnosti „čisté“ a „klidné“ atmosféry

Pro ohodnocení extinkce v APP se vychází z Bouguerova zákona

$$dI(\lambda) = -\alpha(\lambda)I(\lambda)dz, \quad (12.3)$$

kde $dI(\lambda)$ je zeslabení optické intenzity na spektrální složce λ při průchodu záření vrstvou atmosféry o tloušťce dz . $\alpha(\lambda)$ je koeficient zeslabení v $[\text{m}^{-1}]$. Integrací se dostane

$$I_2(\lambda) = I_1(\lambda)\exp[-\alpha(\lambda)\Delta z], \quad (12.4)$$

kde I_1 je optická intenzita na začátku vrstvy a I_2 je optická intenzita na konci vrstvy tloušťky Δz . Předpokladem je konstantní hodnota extinkce na celé vrstvě Δz . Spektrální propustnost $T_\lambda(\lambda)$ se definuje vztahem

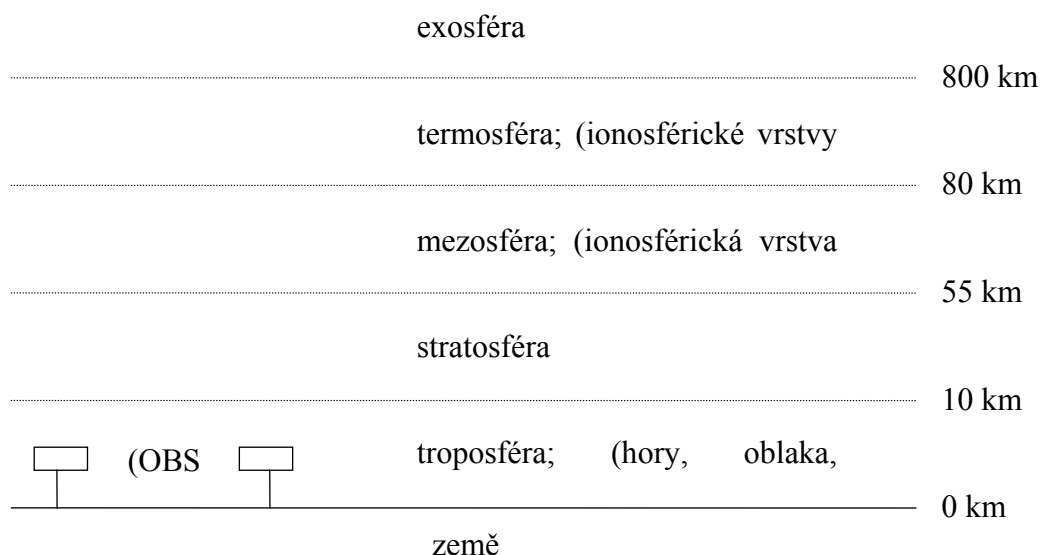
$$T_\lambda(\lambda) = \frac{I_2(\lambda)}{I_1(\lambda)}. \quad (12.5)$$

Spektrálně střední hodnota propustnosti je

$$T \approx \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} T_\lambda(\lambda) d\lambda \approx \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \exp[-\alpha(\lambda)\Delta z] d\lambda. \quad (12.6)$$

Pokud je navíc $\alpha(\lambda) = \alpha = \text{konst}$ na intervalu $(\lambda_1 \div \lambda_2)$, je $T = e^{-\alpha\Delta z}$.

Zemská atmosféra se skládá z několika charakteristických vrstev. Svislý řez atmosférou se znázorněním zemského povrchu a hlavních vrstev atmosféry je uveden na obr. 12.2.



Obrázek 12.2: Atmosférické vrstvy se znázorněním zemského povrchu a oblastí práce OBS

Z obrázku je patrné, že APP je součástí *troposféry*, která je charakteristická tím, že vodní pára zde podléhá kondenzaci, tvoří se zde mlhy a oblaka, projevuje se déšť a sníh, vznikají bouřky, větry a větrné víry (turbulence).

Teplotní gradient nebo mechanické působení způsobují, že lokální *teplota a tlak* ovzduší se mění v prostoru i čase a důsledkem toho je, že index lomu APP je náhodnou funkcí souřadnic prostoru a času. Optický svazek procházející takovým prostředím podléhá energetickým i tvarovým změnám. Změny tvaru svazku (jeho rozšíření nebo odklon) mohou vyvolat změny úrovně přijímaného výkonu.

Hlavními jevy, ke kterým během šíření svazku dochází jsou:

- extinkce optické intenzity vlivem absorpce a/nebo rozptylu na molekulách a/nebo aerosolech
- extinkce optické intenzity vlivem turbulence troposféry
- fluktuace optické intenzity vlivem turbulence troposféry
- fluktuace optické intenzity působením deště nebo sněhu
- fluktuace optické intenzity vlivem deformace tvaru svazku
- přerušování svazku letícím ptákem

Je nutno podotknout, že uvedené jevy působí společně a že fluktuace optické intenzity vyvolávají současně extinkci intenzity. Stručně lze uvedené jevy dělit na extinkci optické intenzity, turbulenci optické intenzity a přerušování svazku.

Střední koeficient extinkce lze vyjádřit jako součet

$$\alpha = \alpha_{abs} + \alpha_{r,m} + \alpha_{r,\epsilon} + \alpha_{fluk}, \quad (12.7)$$

kde α_{abs} je člen odpovídající absorpci na molekulách, $\alpha_{r,m}$ je člen odpovídající rozptylu na molekulách (Rayleighův rozptyl), $\alpha_{r,\epsilon}$ je člen odpovídající rozptylu na částicích (Mieův rozptyl) a α_{fluk} je člen odpovídající střednímu zeslabení intenzity vlivem fluktuací. Pro energetickou bilanci spoje lze každý člen extinkce vyjádřit konkrétním způsobem.

Praktické použití má veličina *meteorologické viditelnosti*, která je definovaná jako vzdálenost, při níž propustnost nabývá hodnoty $T = 0,02 = 2\%$ (při $\lambda = 555$ nm). Odvození vztahu mezi meteorologickou viditelností V_M a koeficientem extinkce α je následující:

Platí: $\frac{I_2}{I_1} = T = e^{-\alpha \Delta z}$ a definuje se $\Delta z = V_M$, je-li $I_2 = 0,02 I_1$. Proto

$$0,02 = e^{-\alpha V_M},$$

$$\ln 0,02 = -\alpha V_M \text{ a konečně}$$

$$\alpha = \frac{3,91}{V_M}; (\lambda = 555 \text{ nm}). \quad (12.8)$$

Obecněji pro „libovolnou“ délku vlny platí

$$\alpha(\lambda) \approx \frac{3,91}{V_M \left(\frac{555}{\lambda} \right)^q}; [\text{km}^{-1}; \text{km}, \text{nm}], \quad (12.9)$$

kde $q = 0,585V_M^{\frac{1}{3}}$; pro $V_M \leq 6$ km. Např. pro $V_M = 2$ km je $q = 1,26$ a je-li $\lambda = 1000$ nm, je $\alpha = \frac{1,84}{V_M}$.

Útlum optické intenzity v APP je možno stanovit také pomocí koeficientu útlumu, který byl již definován v (11.9), jen místo délky vlákna je třeba dosadit délku trasy svazku v atmosféře. Pro koeficient útlumu v APP platí

$$\alpha_{1,APP} = \frac{-1}{L_{APP}} 10 \log \frac{I_2}{I_1}. \quad (12.10)$$

Vztah mezi koeficientem extinkce v $[\text{km}^{-1}]$ definovaným ve (12.3) a koeficientem útlumu definovaným v (12.10) v $[\text{dB/km}]$ je

$$\alpha^{[\text{km}^{-1}]} = 0,23 \alpha_{1,APP}^{[\text{dB/km}]}. \quad (12.11)$$

V tabulce 12.1 je uveden přehled hodnocení stavu APP podle hodnot koeficientu extinkce a meteorologickou viditelnost.

Tabulka 12.1: Tabulka stavů APP

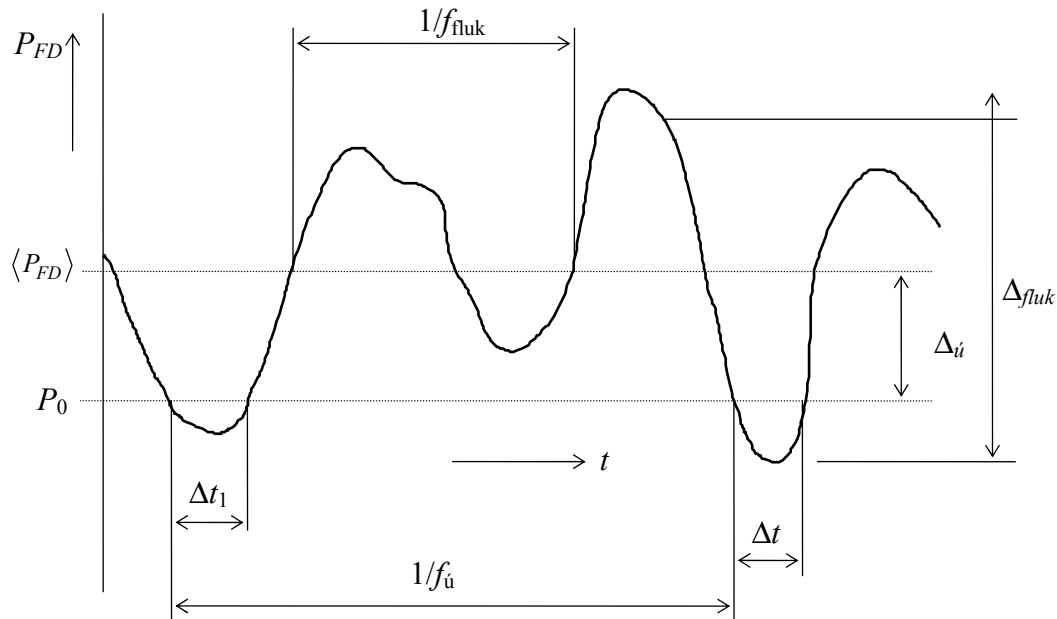
V_M [km]	α [km^{-1}]	stav atmosféry
více než 63	méně než 0,062	velmi čistá
63 až 26	0,062 až 0,15	čistá
26 až 1,3	0,15 až 3,07	opar
1,3 až 0,06	3,07 až 61,1	mlha
méně než 0,06	více než 61,1	silná mlha

Kromě útlumu nastává v APP *jev turbulence*, který se projevuje zejména fluktuací přijímaného optického výkonu. Tyto fluktuace mají různou frekvenci a amplitudu. Teplotní turbulence troposféry mohou vyvolat změny přijímaného výkonu o frekvenci řádově stovky Hz. Ostatní činitelé (nástup mlhy nebo odsměrování svazku) působí s typickými časovými periodami změn 20 min. nebo 24 hod. Uvedené změny mohou vyvolat pokles přijímaného výkonu pod stanovenou minimální úroveň (citlivost přijímače). V takovém případě se jedná o tzv. *únik*. Parametry úniků jsou objasněny na obr. 12.3.

Při statistickém ohodnocování spoje se uvádí relativní časový interval (procento času) p (v %), během něhož došlo k únikům:

$$p = \frac{\sum_i \Delta t_i}{T} 100, \quad (12.12)$$

kde T je celkový časový interval měření (obvykle jeden rok).



Obrázek 12.3: Parametry úniků

(P_{FD} – optický výkon na fotodiodě přijímače, P_0 – citlivost přijímače, f_{fluk} – frekvence fluktuací, f_u – frekvence úniků, Δ_{fluk} – dynamika fluktuací, Δ_u – hloubka úniků, t – čas, Δt_1 – časové intervaly, kdy úroveň optického výkonu na fotodiodě byla menší než požadovaná)

Pomalé změny přijímaného výkonu vyvolané mlhou nelze analyticky vyjádřit. Vyhodnocení takového procesu se dělá empiricky. Analytický model existuje pouze pro rychlé fluktuace vyvolané deštěm, sněhem nebo vzdušnou turbulencí. Pro modelování vzdušných turbulencí (jinak čisté atmosféry) se používá následující postup:

V atmosféře se předpokládá existence vzdušných vírů (nehomogenit indexu lomu) ve tvaru koulí o průměru $l \in (l_0; L_0)$. Vlastnosti atmosféry dovolují jen určité rozměry vzdušných vírů (řádově od mm do km). V takové atmosféře platí Kolmogorův zákon „dvou třetin“ (1961)

$$\left\langle [n(A, t) - n(B, t)]^2 \right\rangle_{\text{čas}} = C_n^2 \rho^{\frac{2}{3}}, \quad (12.13)$$

kde výraz na levé straně se nazývá „strukturní funkce indexu lomu“; A, B jsou body prostoru; t je čas; ρ je vzdálenost bodů AB ; C_n^2 je strukturní parametr indexu lomu [$\text{m}^{-2/3}$].

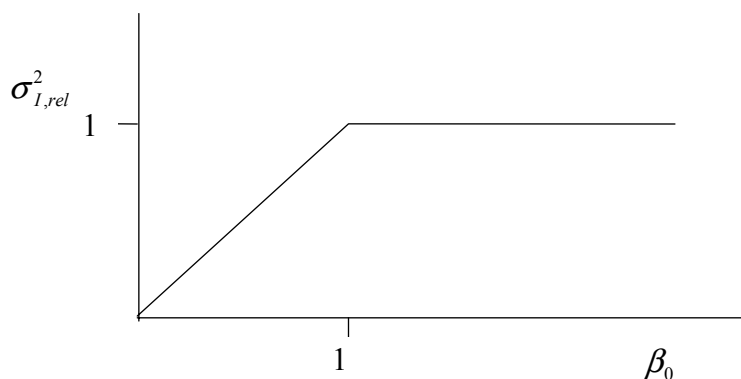
Náhodné nehomogenity indexu lomu vyvolávají fluktuace fáze i amplitudy procházející vlny. S předpokladem homogenity a stacionarity APP lze pro relativní disperzi optické intenzity odvodit výraz

$$\sigma_{I,rel}^2 = KC_n^2 k^{\frac{7}{6}} L^{\frac{11}{6}}, \quad (12.14)$$

kde K je konstanta:

$$\begin{aligned} K &= 1,23 \text{ (pro rovinnou vlnu)} \\ K &= 0,50 \text{ (pro sférickou vlnu)} \end{aligned} \quad (12.15)$$

k je vlnové číslo a L je délka trasy optického svazku v APP. Relativní disperze optické intenzity je definovaná $\sigma_{I,rel}^2 = \frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I \rangle^2}$, kde I je optická intenzita. Pro $\sigma_{I,rel}^2 \rightarrow 1$ dochází k jevu nasycení a relativní disperze optické intenzity dále neroste. Na obr. 12.4 je graficky znázorněná přibližná závislost relativní disperze optické intenzity na parametru $\beta_0 = KC_n^2 k^{\frac{7}{6}} L^{\frac{11}{6}}$



Obrázek 12.4: Závislost relativní disperze optické intenzity na parametru β_0

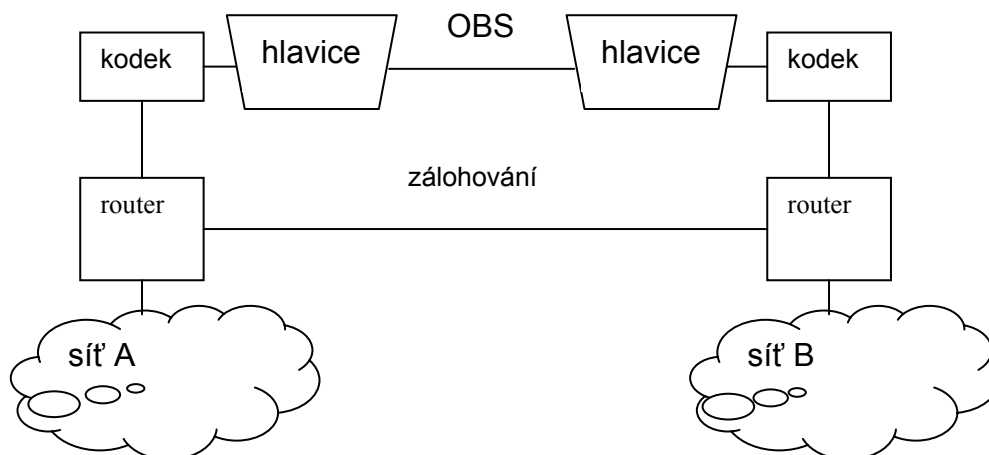
V tabulce 12.2 je uveden přehled hodnocení stavu APP podle hodnot strukturního parametru indexu lomu.

Tabulka 12.2: Tabulka stavů APP podle míry turbulence

C_n^2 [$\text{m}^{-2/3}$]	míra turbulence
10^{-16}	slabá
10^{-15}	střední
10^{-14}	silná

12.2 Skladba a energetická bilance spoje

OBS se skládá ze dvou hlavic pracujících mezi sebou duplexním způsobem. Každá hlavička je připojena („duplexně“) k osobnímu počítači, serveru nebo ústředně. Hlavičky jsou vybaveny vysílacím a přijímacím systémem (VS a PS) pro komunikaci mezi sebou v APP a vysílacím a přijímacím systémem pro komunikaci mezi hlavicí a nejbližším síťovým počítačem. Tato komunikace se uskutečňuje v optickém vlákně nebo metalickém kabelu. Příklad zařazení OBS do komunikační sítě je uveden na obr. 12.5.



Obrázek 12.5: Příklad zařazení OBS do komunikační sítě („kodek“ je zařízení pro kódování a dekodování signálu; „router“ je směrovač, kterým se volí optimální cesta signálu; zálohování spoje je uskutečňováno mikrovlnnou technologií)

Dělení OBS podle dosahu je uvedeno v tabulce 12.3.

Tabulka 12.3: Dělení OBS podle dosahu.

charakter dosahu	vzdálenost hlavic
velmi krátký	(0 - 10) m
krátký	(10 - 100) m
střední	(100 - 1000) m
dlouhý	více než 1 km

Podle druhu přenášeného signálu se rozlišují analogové a digitální spoje. Podle způsobu přenosu se rozlišují spoje s koherentní nebo nekoherentní metodou přenosu. V dalším textu jsou rozebírány pouze digitální duplexní nekoherentní OBS umístěné v troposféře s intenzitní modulací (IM/on-off keying, OOK) a přímou detekcí. Dělení OBS podle přenosové rychlosti je uvedeno v tabulce 12.4.

Tabulka 12.4: Dělení OBS podle přenosové rychlosti.

charakter rychlosti	přenosová rychlost
nízká	nižší než 1 Mbit/s
střední	(1 - 10) Mbit/s
vysoká	více než 10 Mbit/s

Vysílací systém OBS je část hlavice, která tvaruje vyzařovaný svazek a zabezpečuje jeho modulaci. Hlavními bloky vysílacího systému (VS) jsou: modulátor budič optického

zdroje, laserová dioda (LD), zaměřovací systém, elektronický blok zaměřovacího systému a vysílací optická soustava (VOS).

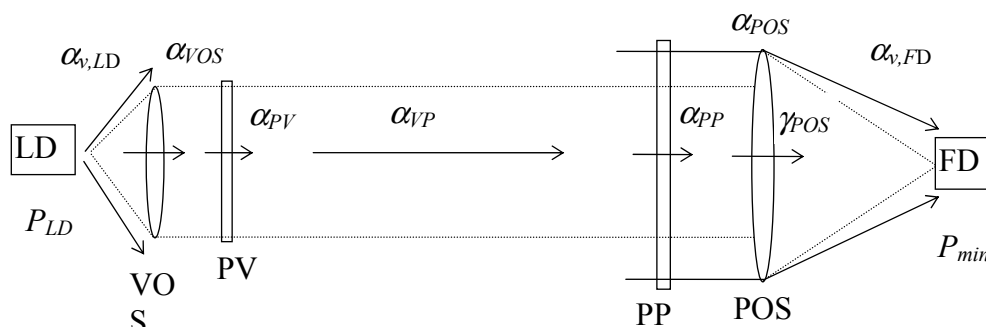
Prostorové tvarování optického svazku vystupujícího z LD zabezpečuje vysílací optická soustava (povrstvený plankonvexní dublet). Svazek prochází optickým průzorem (PV), sloužícím jako ochrana proti nečistotám přítomným v atmosféře. Optický průzor nesmí vyvolat deformaci svazku nebo jeho nadměrný útlum. Směrování optické osy VS zabezpečuje směrovací systém ovládaný mechanicky nebo elektronicky. K hrubému nastavení směru slouží dalekohled pevně spojený s VS. Součástí pouzdra LD je snímací fotodioda, která je zde použita k proudové stabilizaci optického výkonu. Účinnost stabilizace optického výkonu lze zvýšit teplotní stabilizací s využitím Peltierova chladiče.

Pro potřeby OBS není nutné provádět kruhovou symetrizaci svazku a svazek je tvarován (kolimován) osově symetrickou optickou soustavou. Při energetické bilanci se přiřazuje původnímu svazku tzv. „energeticky ekvivalentní svazek“ definovaný jako symetrický Gaussův svazek, který má na ose svazku stejnou intenzitu jako původní svazek a v jehož kruhové stopě je obsažen stejný výkon jako v eliptické stopě původního svazku.

Přijímací systém je část hlavičky, která prostřednictvím přijímací optické soustavy (POS) soustřeďuje přijatý optický svazek na aktivní plochu fotodiody (FD). Hlavními bloky přijímacího systému (PS) jsou: přijímací optická soustava (POS), fotodioda (FD), předzesilovač a demodulátor. Předpokládá se, že v přijímacím systému je použita fotodioda PIN, která přímo převádí dopadající optický výkon na fotoproud.

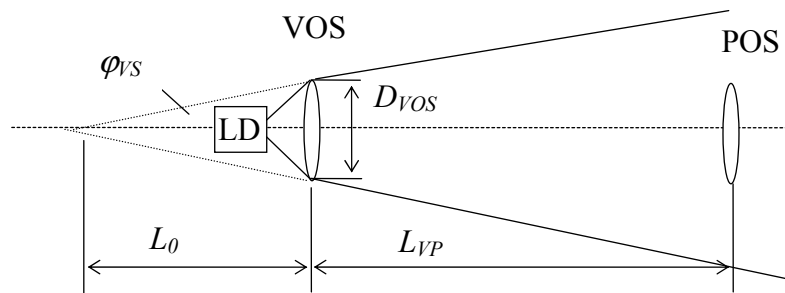
Svazek prochází dopadající na PS prochází optickým průzorem (PP). Soustředění optického svazku přicházejícího z VS protější hlavičky zabezpečuje přijímací optická soustava POS (povrstvený plankonvexní dublet nebo Fresnelova čočka). Směrování optické osy PS zabezpečuje zaměřovací systém ovládaný mechanicky nebo elektronicky. Součástí zaměřovacího zařízení je dalekohled pevně spojený s PS. Ke snížení vlivu záření pozadí je v PS použit interferenční filtr navržený s ohledem na vlnovou délku záření.

Energetická bilance OBS zahrnuje (viz obr. 12.6): výkon laserové diody P_{LD} , účinnost vazby „laserová dioda-vysílací optická soustava“ $\alpha_{v,LD}$, propustnosti vysílací a přijímací optické soustavy α_{VOS} a α_{POS} , propustnost optických průzorů α_{PV} a α_{PP} , útlum šířením α_{VP} , zesílení přijímací optické soustavy γ_{POS} , účinnost vazby „přijímací optická soustava-fotodioda“ $\alpha_{v,FD}$, útlum vyvolaný nedokonalostí vzájemného zamíření hlavic spoje α_z , rezervu spoje na atmosférické přenosové prostředí ρ_{atm} , minimální hodnotu poměru signálu k šumu SNR_0 , minimální detekovatelný výkon fotodiody P_{min} , citlivost přijímacího systému P_0 a úroveň přijímaného výkonu, při které dochází k saturaci přijímače P_{max} .



Obrázek 12.6: Místa útlumu a zesílení v energetické bilanci OBS

Účinnost vazby $\alpha_{v,LD}$ závisí na úhlové šířce a rozložení svazku vyzařovaném LD a na numerické apertuře vysílací optické soustavy. V decibelové míře se $\alpha_{v,LD}$ vyjádří $\alpha_{v,LD} = \left| 10 \log \frac{P_{VOS}}{P_{LD}} \right|$, kde P_{VOS} je výkon dopadající na aperturu vysílací optické soustavy. V praxi je možno předpokládat, že útlum vazby $\alpha_{v,LD}$ je přibližně 1,5 dB. Útlum šířením je určen výrazem $\alpha_{VP} = \left| 20 \log \frac{L_0}{L_0 + L_{VP}} \right|$, kde L_{VP} je vzdálenost mezi hlavicemi spoje a L_0 je tzv. pomocná délka (viz obr. 12.7). K vyjádření L_0 je třeba znát průměr vysílací optické soustavy D_{VOS} a úhlovou šířku vysílaného svazku φ_{VS} : $L_0 \approx \frac{D_{VOS}}{\varphi_{VS}}$.



Obrázek 12.7: Znázornění významu veličiny L_0 (pomocné délky)

Zesílení přijímací optické soustavy je dáno poměrem ploch přijímací a vysílací apertury, rozložením intenzity v Gaussovu svazku a umístěním středu přijímací apertury v ose Gaussova svazku. V decibelové míře je $\gamma_{POS} = \left| 20 \log \frac{D_{POS}}{D_{VOS}} \right| + 3 \text{ dB}$.

Účinnost vazby „přijímací optická soustava-fotodiody“ $\alpha_{v,FD}$ závisí (za předpokladu konstantního ozáření přijímací apertury) na poměru aktivní plochy fotodiody A_{FD} a velikosti skvrny A_{spot} , kterou v ohniskové rovině přijímací optické soustavy vytváří přijaté světlo. Pro $A_{FD} \geq A_{spot}$ je $\alpha_{v,FD} = 0 \text{ dB}$.

Rezervu spoje na atmosférické přenosové prostředí ρ_{atm} lze odvodit z dlouhodobého měření útlumu atmosférického přenosového prostředí (APP). Například je možno zvolit $\rho_{l,atm} \cong 6 \text{ dB/km}$.

Minimální hodnota SNR_0 se stanovuje v závislosti na typu modulace a požadované chybovosti BER . Pro intenzitní modulaci typu OOK a chybovost spoje $BER = 10^{-6}$ je $SNR_0 = 13,5 \text{ dB}$. Minimální detekovatelný výkon přijímače P_{min} závisí na přenosové rychlosti, typu použité fotodiody a šumových parametrech předzesilovače. Pro fotodiodu PIN a přenosovou rychlost $v_I = 10 \text{ Mbit/s}$ bývá hodnota minimálního detekovatelného výkonu přijímače $P_{min} \cong -43 \text{ dBm}$. Citlivost přijímacího systému je definována jako minimální úroveň přijatého optického výkonu P_0 , která je nutná k dosažení stanovené hodnoty SNR_0 a vyjádří se $P_0 = P_{min} + SNR_0$.

Posledním důležitým parametrem energetické bilance OSS je úroveň přijímaného výkonu, při které dochází k saturaci přijímače P_{max} . Oblast dynamiky přijímacího systému Δ_P je pak definována výrazem $\Delta_P = P_{max} - P_0$. Oblast dynamiky přijímacího systému je vzhledem

k vysoké míře fluktuací přijímaného výkonu (vliv šumu APP) významnou veličinou. Její hodnota v decibelové míře bývá $\Delta_p \cong 30$ dB.

Útlum vyvolaný nedokonalostí vzájemného zamíření hlavic spoje α_z je způsoben různými vlivy: nezkušeností obsluhy při zaměřování, mechanickými deformacemi úchytu hlavice při aretaci, teplotními deformacemi konzol a pod. Empiricky bylo zjištěno, že útlum α_z nepřevyšuje hodnotu 1,5 dB.

Počítačové zpracování útlumového diagramu usnadňuje návrh celého spoje. Na závěr je uveden příklad energetické bilance spoje řešené pomocí počítače.

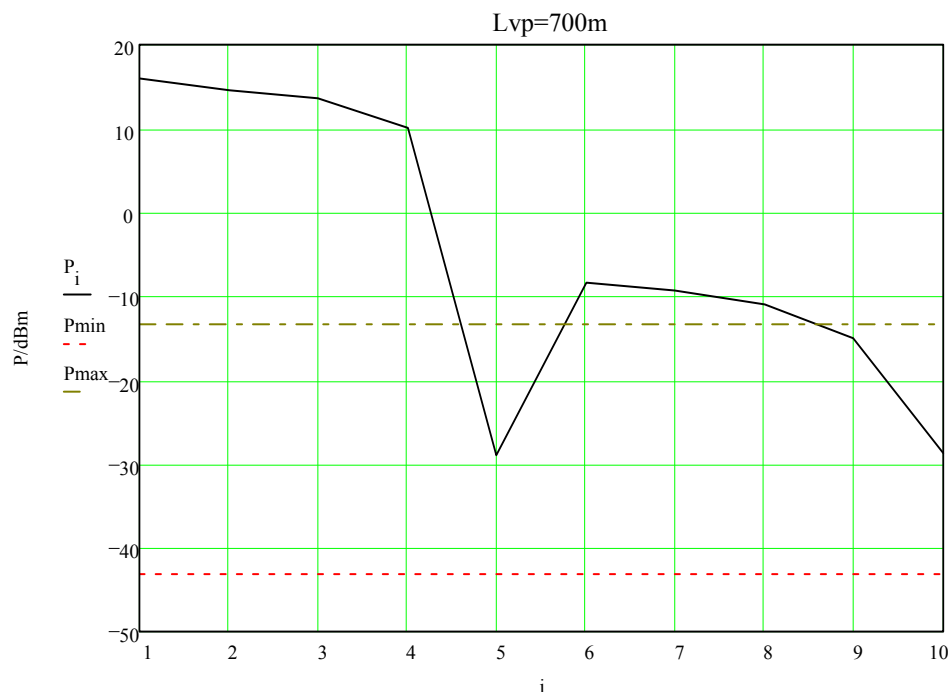
$P_d := 40$ mW	výkon vysílací laserové diody v mW
$P_{vd} := 10 \cdot \log(P_d)$ dBm	
$P_{vd} = 16.021$ dBm	výkon vysílací laserové diody v dBm
$\alpha_{vdvc} := -1.5$ dB	útlum vazby LD/VOS
$\alpha_{vc} := -1$ dB	útlum na VOS
$\alpha_{kk} := -3.5$ dB	utlum na krycích sklech a interferenčním filtru
$D_{avc} := 20$ mm	průměr VOS
$\phi_{sv} := 2.5$ mrad	uhlová šířka svazku
$L_o := \frac{D_{avc}}{\phi_{sv}}$ m	
$L_o = 8$ m	pomocná délka
$L_{vp} := 700$ m	vzdálenost hlavic
$\alpha_{vp} := 20 \cdot \log \left[\frac{L_o}{(L_o + L_{vp})} \right]$ dB	
$\alpha_{vp} = -38.939$ dB	útlum šířením
$D_{apc} := 150$ mm	průměr POS
$\gamma_{pc} := 3 + 10 \cdot \log \left[\left(\frac{D_{apc}}{D_{avc}} \right)^2 \right]$ dB	
$\gamma_{pc} = 20.501$ dB	zisk POS
$\alpha_{pc} := -1$ dB	utlum na POS
$\alpha_z := -1.5$ dB	rezerva na zaměřování
$\rho_{atm} := -L_{vp} \cdot 6 \cdot 10^{-3}$ m, dB/m	
$\rho_{atm} = -4.2$ dB	rezerva na atmosféru
$\rho_{BER} := -13.5$ dB	rezerva na chybovost (BER=10 ⁻⁶)
$P_{min} := -43$ dBm	minimální detekovatelný výkon
$D_{rx} := 30$ dB	dynamika přijímače
$P_{max} := P_{min} + D_{rx}$ dBm	
$P_{max} = -13$ dBm	maximální detekovatelný výkon

Útlumový diagram spoje:

$$\begin{aligned} P_1 &:= P_{vd} & P_2 &:= P_1 + \alpha_{vdvc} & P_3 &:= P_2 + \alpha_{vc} & P_4 &:= P_3 + \alpha_{kk} & P_5 &:= P_4 + \alpha_{vp} \\ P_6 &:= P_5 + \gamma_{pc} & P_7 &:= P_6 + \alpha_{pc} & P_8 &:= P_7 + \alpha_z & P_9 &:= P_8 + \rho_{atm} & P_{10} &:= P_9 + \rho_{BER} \end{aligned}$$

$$i := 1..10$$

$$\rho_s := P_{10} - P_{min} \quad \rho_s = 14.383 \quad \text{systémová rezerva [dB]}$$



$$i := 1..9$$

$$\Delta_i := P_{i+1} - P_i \quad P_{max} = -13 \text{ dBm} \quad P_{min} = -43 \text{ dBm}$$

i	P _i	Δ _i
1	16.021	-1.5
2	14.521	-1
3	13.521	-3.5
4	10.021	-38.939
5	-28.918	20.501
6	-8.417	-1
7	-9.417	-1.5
8	-10.917	-4.2
9	-15.117	-13.5

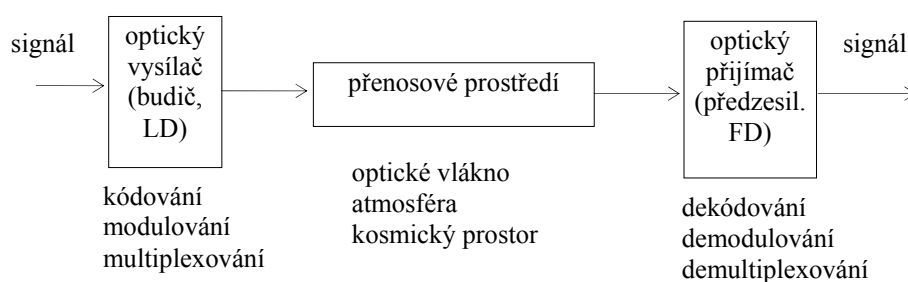
Počítačový návrh byl proved pomocí programu MATHCAD.

Zásadními výhodami OBS oproti jiným (radiovým) spojům jsou: vysoce směrový svazek (vysoká prostorová selektivita; nehrozí interference s jinými spoji); vysoká přenosová rychlost (možnost nasazení ve všech typech počítačových sítí); absence legislativních překážek (urychlení rozvoje sítí; optické pásmo nosné vlny leží mimo oblast působnosti ČTU); není nutné zakopávat do země nebo zavěšovat nad zemí optický kabel.

13 Optické sítě

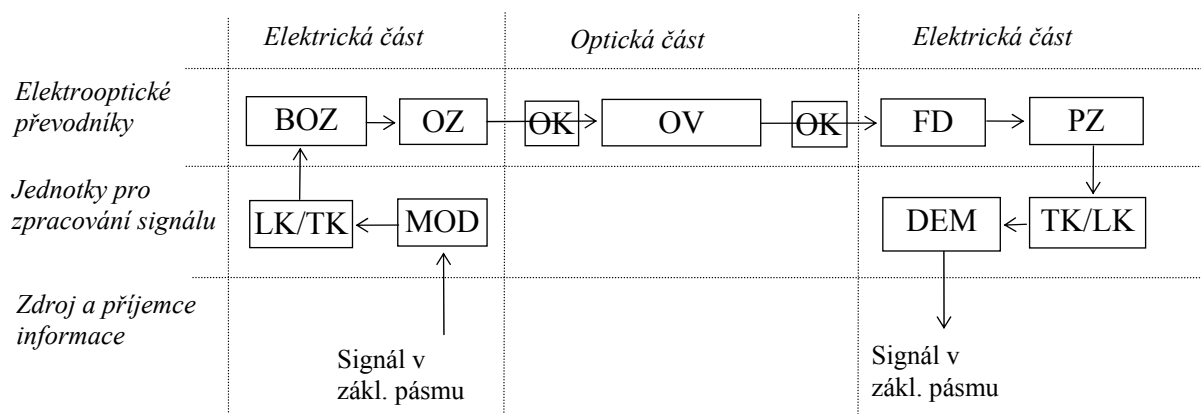
13.1 Optický komunikační systém

Optický komunikační systém (viz obr. 13.1) je zařízení určené k přenosu a zpracování informace pomocí optické nosné vlny, která může být energeticky nebo vlnově dělena do několika optických kanálů. Skládá se ze tří základních částí: optického vysílače, přenosového prostředí a optického přijímače. Optický komunikační systém zahrnuje řadu speciálních členů: modulátory, demodulátory, kodéry, dekodéry, multiplexory, demultiplexory, vazební členy a pod.



Obrázek 13.1: Základní představa optického komunikačního systému

Podrobnější blokové schéma optického komunikačního systému je uvedeno na obr. 13.2.



Obrázek 13.2: Blokové schéma optického komunikačního systému
 (MOD - modulátor, LK/TK - převaděč kódu, BOZ - budič optického zdroje, OZ - optický zdroj, OK - optický konektor, OV - optické vlákno, FD - fotodioda, PZ - předzesilovač, DEM - demodulátor.)

Druhy přenášených signálů v optických komunikačních systémech lze rozdělit podle několika hledisek:

- podle fyzikální veličiny: elektrický, optický
- podle zpracování signálu: analogový, digitální
- podle nároků služby, kterou zabezpečují: úzkopásmový, širokopásmový

U optických komunikací se podle *způsobu modulace* rozlišují dvě skupiny systémů:

- systémy s intenzitní modulací (IM) a
- systémy s modulací pole (koherentní systémy).

Systémy s modulací pole lze dále dělit na:

- systémy s amplitudovou modulací (AM),
- systémy s frekvenční modulací (FM) a
- systémy s fázovou modulací (PM).

Převod analogového signálu na digitální se uskutečňuje kódovou pulsní modulací (PCM). Jejím výsledkem je posloupnost bitů. Při dvouúrovňové digitální IM, kdy dvěma různým bitům odpovídají dvě různé úrovně intenzity, se hovoří o *klíčování přerušováním nosné* (OOK - „on-off“ keying). V případě FM nebo PM jsou různé bity reprezentovány různými hodnotami frekvence nebo fáze. Hovoří se o klíčování frekvenčním nebo fázovým posuvem (FSK nebo PSK).

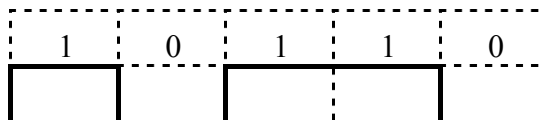
Je možné zvolit *přenos na „subnosné“ vlně* (Subnosná vlna je pomocná harmonická vlna, kterou je primárně modulována optická intenzita. Sekundárně se pak subnosná vlna moduluje signálem podle některého zvoleného způsobu).

Kódy používané v optických komunikacích lze rozdělit do dvou skupin:

- kódy linkové (LK) a
- kódy transportní (TK).

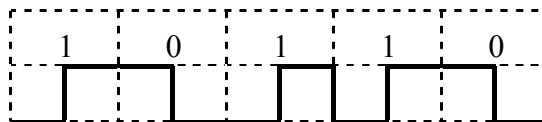
Linkového kódu (např. NRZ) se používá v části spoje určené ke zpracování signálu. Linkové kódy musí vyhovovat především danému typu rozhraní mezi uživatelem a jednotkou pro zpracování signálu.

Příklad linkového kódu (NRZ):



Před přenosem optickou trasou je vhodné převést linkový kód na některý *kód transportní* (např. Manchester).

Příklad transportního kódu (Manchester):



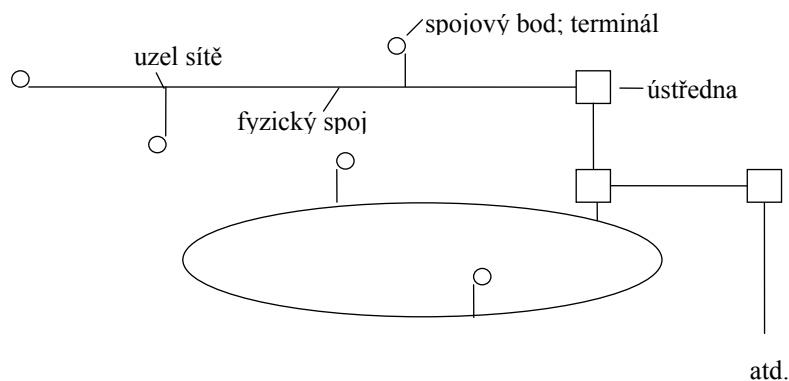
V optických komunikacích se rozlišují tři typy *multiplexů*:

- frekvenční multiplex (FDM),
- časový multiplex (TDM) a
- vlnový multiplex (WDM).

13.2 Model optické sítě

Komunikační síť je propojení několika *komunikačních (spojových) bodů*, které jsou zdrojem nebo příjemcem přenášené informace.

Příklad *fyzického propojení* v síti je uveden na obr. 13.3. Základní parametry (fyzické) sítě jsou: rozlehlost (lineární rozměr oblasti působení), velikost (počet jednotlivých linek), přenosová rychlost, chybovost a další (časové zpoždění, složitost, cena). Dělení sítí podle rozlehlosti je v tabulce 13.1



Obrázek 13.3: Příklad fyzického propojení komunikačních bodů v rámci sítě

Tabulka 13.1: Dělení sítí podle rozlehlosti:

Označení	Charakteristika	lineární rozměr
mikrosít'	spoje mezi čipy mikroelektronických obvodů	do 1 mm
sít' přístroje nebo dílčího zařízení	spoje mezi deskami přístroje; spoje mezi bloky zařízení	do 10 m
LAN	spoje v letounu, automobilu, lodi, laboratoři, budovy, areálu;	10 m až 1 km
MAN	spojení několika LAN v rámci města	1 km až 100 km
WAN	propojení několika LAN v rámci státu nebo kontinentu	100 km až 1000 km
Globální síť	spojení sítí mezi kontinenty (podmořské kabely)	1000 km až 10 000 km

Pro modelování funkce sítě byl vypracován *sedmivrstvý model* (Open Systems Interconnection Reference Model - OSIRM). Sít' i její terminály jsou charakterizovány sedmi logickými vrstvami, přičemž nižší vrstva vždy slouží vrstvě vyšší. Přehled vrstev a jejich funkcí v OSIRM modelu sítě je uveden v tabulce 13.2.

Tabulka 13.2: Přehled vrstev a jejich funkcí v OSIRM modelu sítě

7. aplikační vrstva	zabezpečení komunikace mezi člověkem a strojem (PC)	7. aplikační vrstva
6. prezentační	přenos informace mezi aplikační a relační vrstvou (umožňuje komunikaci mezi nekompatibilními zařízeními)	6. prezentační
5. relační (session)	zřizování spojení mezi uživateli a jeho typ (plně duplexní, poloduplexní)	5. relační (session)
4. transportní	řízení multiplexování	4. transportní
3. síťová	směrování signálu, monitorování a řízení provozu sítě, vytváří se virtuální okruh	3. síťová
2. spojová (data link)	formátování signálu (rámec, pakety), oprava chyb v přenosu	2. spojová (data link)
1. fyzická (přenosové medium)	kódování, fyzický přenos signálů, vytváří se reálný okruh	1. fyzická (přenosové medium)

13.3 Architektura optické sítě

Rozlišuje se architektura fyzická a funkční.

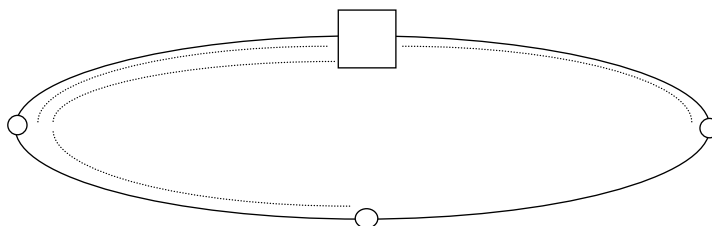
a) *Fyzická architektura* je určena přenosovými vlastnostmi prostředků, kterými se přenášejí signály bez ohledu na jejich informační obsah. Fyzická architektura je dána:

- topologií (fyzickou/logickou strukturou sítě)
- charakterem a formátem přenášených signálů (elektrický/optický signál, druh kódu, metoda multiplexování)
- způsobem manipulace se signály v uzlech a terminálech (přepojování okruhů/paketů, přepojování signálů v prostoru, čase, frekvenci)

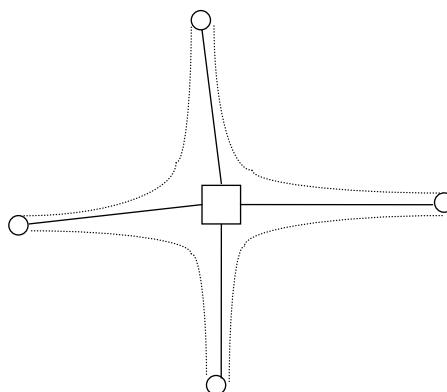
b) *Funkční architektura* určuje chování sítě jako systému z hlediska uživatele; je nadstavbou fyzické architektury; určuje množství a kvalitu poskytovaných služeb.

Topologie sítě:

a) fyzický kruh/logická hvězda



b) fyzická hvězda/logický kruh



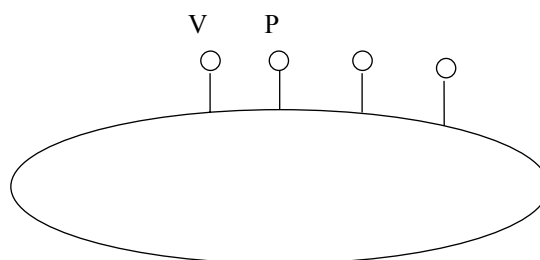
Architektura sítě musí zabezpečit, aby signál kteréhokoli vysílače mohl být přijatý kterýmkoliv přijímačem a aby každý přijímač mohl přijmout signál kteréhokoli vysílače. Tento požadavek je řešen dvěma způsoby:

a) *Přepínáním paketů* (signály všech vysílačů jsou směřovány do všech přijímačů a rozliší se použitím některé techniky mnohonásobného přístupu WDM, FDM, TDM, CDM).

b) *Přepínáním okruhů* (v daném časovém intervalu periodicky nebo řízením se vytvoří přímá linka mezi určitým vysílačem a daným přijímačem).

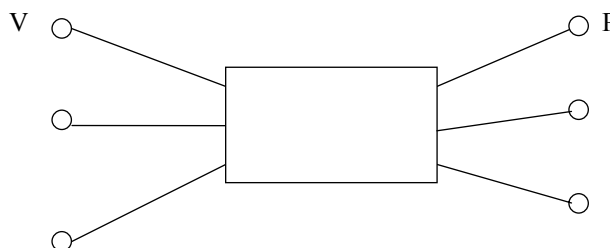
Podrobněji k přepínání paketů:

a) Sběrnice



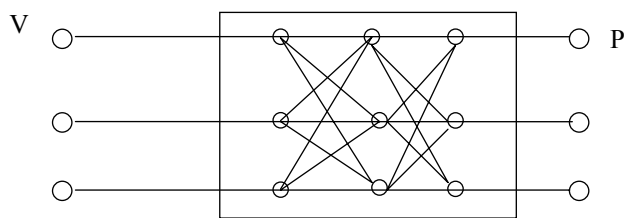
Společné optické vlákno (sběrnice) propojuje všechny vysílače a přijímače. Každý vysílač vysílá do vlákna své modulované pole a každý přijímač odvádí ze sběrnice své pole podle techniky mnohonásobného přístupu.

b) Hvězda



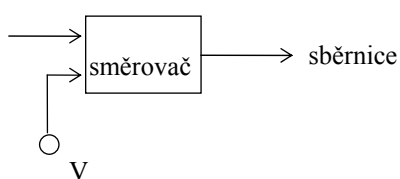
Každý přijímač je spojen se všemi vysílači. Opět podle techniky mnohonásobného přístupu se identifikuje správný signál.

Sběrnice i hvězda se všeobecně používají v sítích LAN. V sítích WAN se používá síť s *rozvrstvenými uzly* (uzly nalézají svá data po přečtení hlavičky paketu a směrují je dále):

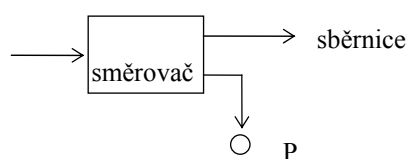


Realizace sběrnicové sítě (použití směrovače):

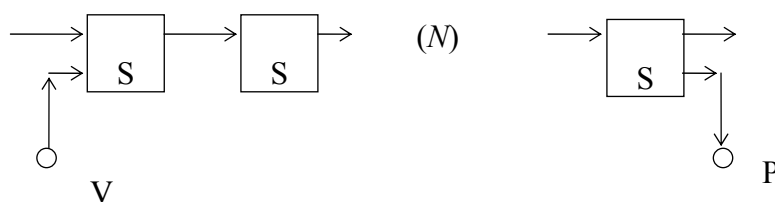
a) Vysílač



b) Přijímač



Provedení sítě:



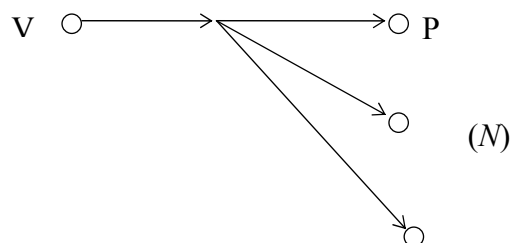
Výhody:

- jednoduchost
- jedno OV spojí všechny uzly

Nevýhody:

- nekonstantní výkon signálu podél sběrnice
- ztráty s počtem uzlů N vzrůstají (počet uzlů bývá 10 až 20)

Realizace hvězdy (použití děliče N -tého řádu):



Výhody:

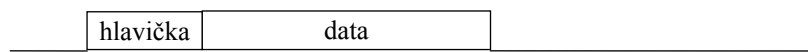
- relativně menší ztráty
- výkon je rovnoměrně distribuovaný

Nevýhody:

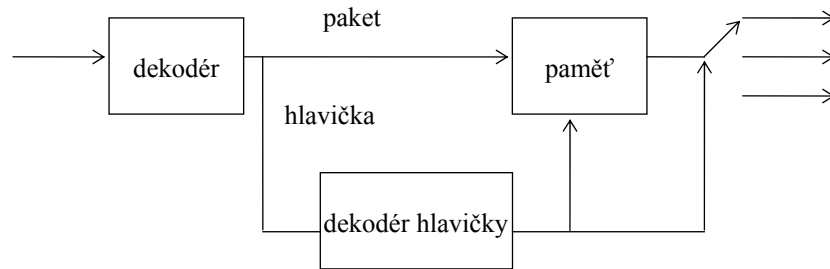
- požaduje se relativně větší délka OV

Realizace distribuovaného uzlového systému:

Pakety:



Procesor uzlu:



Výhody:

- výkonová regenerace
- dynamické směrování (výběr)

Nevýhody:

- citlivost na kolizi paketů v uzlu
- relativně větší zpoždění v uzlu
- nárůst chybovosti při dekódování