Zpracování výsledků fyzikálních měření

J.Englich, LS 1999/2000

Pomocný text pro úvodní kurs zpracování výsledků fyzikálních měření pro
Fyzikální praktikum magisterského studia fyziky na MFF UK

Praha, březen 2000

Sylabus:

1. Úvod
- doporučená literatura

2. Fyzikální veličiny a jejich jednotky
- systematika fyzikálních veličin, veličiny základní, odvozené
- jednotky fyzikálních veličin
- metrologické rovnice, veličinové, jednotkové, rozměrové (rozměrová analýza)
- soustava jednotek, volba base, soustava koherentní, racionalisovaná
- soustavy CGSE, CGSM, Gaussova, SI
- realisace vybraných jednotek soustavy SI

3. Metody měření
- základní systematika metod měření
- potlačení subjektivních faktorů
- metody zvyšování citlivosti
- metody zlepšování poměru signál-šum

4. Chyby měření
- základní systematika, chyba náhodná, hrubá, systematická
- zdroje a charakter chyb u různých metod měření
- chyby měřidel, třída přesnosti
- zápis výsledků měření

5. Základní pojmy matematické statistiky
- náhodný jev, náhodná veličina, pravděpodobnost
- rozdělení pravděpodobnosti
- střední hodnota, momenty náhodné veličiny
- rozdělení pravděpodobnosti více náhodných veličin, korelace
- centrální limitní věta

6. Princip maximální pravděpodobnosti
- odhad parametrů rozdělení
- aritmetický průměr, disperse (rozptyl) náhodné veličiny
- nevychýlený odhad
- zpracování výsledků nepřímých měření, uvážení chyby měřícího přístroje

7. Metoda nejmenších čtverců
- lineární regrese s jednou proměnnou
- odhad přesnosti regresních koeficientů
- nelineární regrese s jednou proměnnou

1.Úvod

Doporučená literatura:

1. Brož J., a kol.: Základy fyzikálních měření I, SPN Praha 1967
2. Hajko V., a kol.: Fyzika v experimentech, vyd. SAV Bratislava, 1988
3. Sprušil B., Zielenicová P.: Úvod do teorie fyzikálních měření, skriptum MFF UK Praha 1986
4. Kamke D., Krämer K.: Physikalischen Grundlagen der Messeinheiten, B.G.Teubner Verl., Stuttgart 1977
   Ruský překlad: Fizičeskije osnovy jedinic izmerenija, izd. Mir, Moskva 1980
5. Hudson D.J.: Statistics, Geneva 1964 (Ruský překlad: Statistika dlja fizikov, Izd. Mir, Moskva 1967
6. Šindelář V., Smrž L.: Nová soustava jednotek, SPN Praha 1968

2.Fyzikální veličiny a jejich jednotky

2.1. Systematika fyzikálních veličin [1], [4], [6]

V technické praxi, v řadě oblastí vědy i v běžném životě se vyskytuje potřeba charakterisovat objektivní vlastnosti a stav předmětů a okolního prostředí, popsat průběh různých procesů a pod. K tomu zavádíme **systém veličin**, které uvedené vlastnosti a stav charakterisují.

Potřebnou informaci získáme stanovením kvantitativních, popřípadě kvalitativních parametrů příslušné veličiny (měření, pozorování).

Fyzikální veličina (Leonard Euler, Algebra 1766):
1. veličinou rozumíme vše to, co se může zvětšovat nebo zmenšovat, nebo to, k čemu můžeme něco přidat nebo ubrat (hmotnost, čas, délka, teplota, tlak, teplo, úhel,...).
2. existují veličiny různého druhu, jejichž studiem se zabývají různé oblasti vědy (fyziky). Každá oblast vědy má své charakteristické veličiny. Fyzika je naukou o veličinách.
3. měření je srovnávání dané veličiny s vybranou veličinou téhož druhu (jednotkou).

Moderní definice: Veličinou popisujeme objektivní vlastnost (stav) předmětu, nebo fyzikálního jevu, kterou lze kvalitativně odlišit a kvantitativně popsat.

Klasifikace veličin:
a) extensivní (množství, kvantity) - aditivní (hmotnost, náboj, teplo,..)
b) intensivní (kvality) - veličiny stavové (teplota, napětí, tlak,...)
c) protensivní (stále plynoucí) - (čas)

Veličiny:
a) základní - v daném systému nezávislé
b) odvozené - na základě vztahů mezi veličinami základními

Pojmy související:
Pozorování - studium dějů a procesů, které probíhají bez našeho zásahu (astronomická pozorování)
Pokus (experiment) - studium dějů a procesů, které iniciujeme, řídíme, volíme podmínky jejich průběhu a pod.
Pokus -kvalitativní, kvantitativní

Měření: srovnávání studované veličiny s její jednotkou. Výsledky měření zapisujeme ve tvaru:

$$\mathbf{A = (a + \varepsilon_a)\ J}\ ,$$

(např.: $l = (3.86 \pm 0.02)$ m),
kde **a** - číselná hodnota, ε_a - chyba měření, **J** - označení jednotky,
nebo:

$$\mathbf{A = (a + \varepsilon_a)\ [A]}, \ (v = (4.3 \pm 0.5)\ \text{m sec}^{-1}),$$

kde [A] – rozměr.

2.2.Jednotky fyzikálních veličin [1], [4], [6]

Jednotky měření:
Jednotky byly postupně zaváděny pro veličiny užívané v obchodně technické praxi s kritériem praktičnosti a dostupnosti (snadné realisovatelné)
Příklad: Jakob Koebel, Geometrie (16 stol., Frankfurt a/M)
střední stopa - jednotka délky, vystředovaná délka chodidla 16 náhodně vybraných osob naproti tomu např. jednotka délky - loket

Rozměr:
Vyjádření jednotky pro danou veličinu pomocí jednotek základních (base systému jednotek)

2.3.Metrologické rovnice [6]

Veličinové rovnice:
popisují přírodní zákony,
definují veličiny

Příklad:
$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}))$
$dm = \rho\, dV$, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$

Jednotkové rovnice:
Udávají vztah mezi jednotkami.
Užívají se veličinové rovnice ve zjednodušené formě (bez diferenciálních, integrálních a jiných složitějších operátorů)

Příklad:
$J_F = J_p / J_t$,.. $J_F = J_q . J_E$, ..$J_v = J_r / J_t$

Rozměrové rovnice:
jednotkové rovnice, ve kterých jsou jednotky vyjádřeny pouze jednotkami základními (v daném systému, basi)

Příklady:
$[F] = [p]/[t] \Rightarrow kgms^{-2} = kgms^{-1}/s = kgms^{-2}$
$[F] = [C].[v].[B] \Rightarrow kgms^{-2} = As.ms^{-1}.kgs^{-2}A^{-1} = kgms^{-2}$

Rozměrová analýza:
testování veličinových rovnic pomocí rovnic rozměrových

kontrola formulí:

Příklad: Moment setrvačnosti homogenního válce o poloměru R a výšce h vůči ose byl vypočten užitím definičního vztahu: $J = \int r^2\rho \, dV$.
Prověřte výsledek ve tvaru: $J = 1/2\ MR^2$ užitím rozměrové analýzy.
Řešení: Rozměr J(SI) : kgm^2
Rozměr výsledku (SI): kgm^2

stanovení stupně mocniných závislostí:

Příklad: Hledáme vztah pro dobu kmitu matematického kyvadla. Předpokládáme:

$$T \approx g^{\alpha}\, l^{\beta}\, m^{\gamma}$$

Řešení:
Rozměr levé strany: T
Rozměr pravé strany: $L^{\alpha}T^{-2\alpha}\ L^{\beta}\ M^{\gamma} \quad \rightarrow \quad 1 = -2\alpha,\ 0 = \alpha + \beta,\ 0 = \gamma$

Řešení soustavy rovnic: $\alpha = -1/2,\ \beta = 1/2,\ \gamma = 0$

Potom: $T \approx (l/g)^{1/2}$

Příklad: V mezeře magnetu s uzavřeným jádrem je homogenní magnetická indukce B, plocha pólových nástavců je S. Očekáváme, že síla, kterou na sebe působí nástavce magnetu je úměrná permeabilitě, indukci a ploše nástavců.
Očekáváme: $F \approx \mu_0^{\alpha}.B^{\beta}.S^{\gamma}$

Řešení:
Levá strana: MLT^{-2}
Pravá strana: $M^{\alpha}L^{\alpha}T^{-2\alpha}A^{-2\alpha}\ M^{\beta}T^{-2\beta}A^{-\beta}\ L^{2\gamma} \quad \rightarrow \quad 1 = \alpha + \beta,\ 1 = \alpha + 2\gamma,\ -2 = -2\alpha - 2\beta,\ 0 = -2\alpha - \beta$

Řešením soustavy je: $\alpha = -1,\ \beta = 2,\ \gamma = 1$
Potom: $F \approx B^2 S / \mu_0$

Seminární úloha 1:
Těleso hmotnosti m se pohybuje rovnoměrně zrychleně, přímočaře. Počáteční rychlost je nulová. Zrychlení tělesa je a. Jakou má těleso rychlost po uražení dráhy x?
Předpokládáme $v \approx a^{\alpha} x^{\beta}$.

Seminární úloha 2:
Odvoďte vztah pro rychlost zvuku v plyném prostředí o hustotě ρ.
Předpokládáme: $v \approx \rho, p, T$; platí stavová rovnice, → $v \approx \rho^{\alpha} . p^{\beta}$

Seminární úloha 3.:
Odvoďte vztah pro odpor prostředí, působící na automobil, pohybující se rovnoměrně. Maximální plocha příčného průřezu automobilu je S, aerodynamické efekty zanedbejte.
Předpoklad: odporová síla $F \sim \rho^{\alpha} v^{\beta} S^{\gamma}$.

Seminární úloha 4.:
Stanovte vztah pro odporovou sílu působící na kuličku poloměru r pohybující se rychlostí v ve viskosní kapalině popsané dynamickou viskozitou η.
Předpokládáme: $F \approx r^{\alpha} \eta^{\beta} v^{\gamma}$

Seminární úloha 5.:
Stanovte vzorec pro dobu oběhu planety v gravitačním poli slunce.
Předpoklad: $T \approx \kappa^{\alpha} R^{\beta} m_s^{\gamma}$.

Seminární úloha 6.:
Stanovte vztah pro střední kvadratickou výchylku lineárního harmonického oscilátoru.
Předpokládáme: $\langle x^2 \rangle \approx h^{\alpha} m^{\beta} \omega^{\gamma}$

2.4.Soustavy jednotek [1], [4], [6]

Soustava koherentní — definiční vztahy odvozených veličin vystupují bez číselných koeficientů

Soustava racionalisovaná — v definičních vztazích, které vyhovují kulové symetrii se zavádějí faktory 4π s cílem odstranit násobky π z prakticky užívaných formulí.

Příklad:

- Definujeme-li jednotku náboje Coulombovým zákonem ve vakuu ve tvaru: $F = k\, q^2/r^2$, dostaneme pro kapacitu deskového kondensátoru (ve vakuu) vzorec: $C = S/4\pi kd$.

Volba base:

A) Mechanika

1) tříjednotková base mechanických veličin

veličina	def.vztah	konstanta	rozměr	jednotka	rozměr	SI
čas				T	T	sec
délka				L	L	m
hmotnost				M	M	kg
rychlost	$v=k_v\, s/t$	$k_v=1$	1		LT^{-1}	$msec^{-1}$
zrychlení	$a=k_a\, v/t$	$k_a=1$	1		LT^{-2}	$msec^{-2}$
síla	$F=k_N\, ma$	$k_N=1$	1		MLT^{-2}	N
energie	$A=k_A\, F.s$	$k_A=1$	1		$ML^2\, T^{-2}$	J

Jiné zákony:

N.G.Z. $F = k_G\, m^2 /r^2$ $k_G \equiv \kappa = \kappa_o\, [\kappa]$, $\kappa_o \neq 1$, $[\kappa] = M^{-1}L^3T^{-2}$
Konstanta κ_o závisí na volbě základních jednotek a musí být stanovena měřením. Například v SI: $\kappa = \kappa_o\, [\kappa] = 6.67.10^{-11}\ kg^{-1}m^3\ sec^{-2}$

Planckův z. $E = k_P\, \nu$ $k_P \equiv h = h_o\, [h]$, $h_o \neq 1$, $[h] = ML^2T^{-1}$
Konstanta h_o závisí na volbě základních jednotek a musí být stanovena měřením. Například v SI: $h = h_o\, [h] = 6.6\ .\ 10^{-34}\ kgm^2sec^{-1}$

Einst.vztah $E = k_E\, m$ $k_E = k_{Eo}\, [k_E]$, $k_{Eo} \neq 1$, $[k_E] = L^2T^{-2}$
Konstanta k_{Eo} závisí na volbě základních jednotek a musí být stanovena měřením. Například v SI: $k_E = k_{Eo}\, [k_E] \cong 9.\ 10^{16}\ m^2sec^{-2} \cong c_o^{\ 2}\, [c]^2$, c je rychlost světla ve vakuu.

2) čtyřjednotková base mechanických veličin

Veličina	def.vztah	konstanta	rozměr	jednotka	rozměr
Čas				T	T
Délka				L	L
Hmotnost				M	M
Síla				Φ	Φ
Rychlost	$v=k_v\, s/t$	$k_a=1$	1	-	LT^{-1}
Zrychlení	$a=k_a\, v/t$	$k_a=1$	1	-	LT^{-2}
Energie	$A=k_A\, Fs$	$k_A=1$	1	-	ΦL

Jiné zákony:

2.N.Z. $F = k_N\, ma$ $k_N = k_{No}\, [k_N]$, $k_{No} \neq 1$, $[k_N] = \Phi M^{-1}L^{-1}T^2$, Konstanta k_{No} závisí na volbě základních jednotek a musí být stanovena měřením. Například v „rozšířené soustavě SI“, platí-li $\Phi = G\,.[N]$, je $k_{No} = 1/G$

N.G.Z. $F = k_G\, m^2/r^2$ $k_G = k_{Go}\,[k_G]$, $k_{Go} \neq 1$, $[k_G] = \Phi M^{-2} L^2$,
Konstanta k_{Go} závisí na volbě základních jednotek a musí být stanovena měřením. Například ve výše zavedené „rozšířené soustavě SI“ je:
$k_{Go} = \kappa_o.k_{No}$

Planckův z. $E = k_P\, \nu$ $k_P = k_{Po}\,[k_P]$, $k_{Po} \neq 1$, $[k_P] = \Phi LT$
Konstanta k_{Po} závisí na volbě základních jednotek a musí být stanovena měřením. Například ve výše zavedené „rozšířené soustavě SI“ je:
$k_{Po} = h_o.k_{No}$

Einst.vztah $E = k_E\, m$ $k_E = k_{Eo}\,[k_E]$, $k_{Eo} \neq 1$, $[k_E] = \Phi LM^{-1}$
Konstanta k_{Eo} závisí na volbě základních jednotek a musí být stanovena měřením. Například ve výše zavedené „rozšířené soustavě SI“ je:
$k_{Eo} = c_o^{\,2}.k_{No}$

!!Důsledkem zvětšení počtu základních jednotek je zvětšení počtu univerzálních konstant!!

!!Velikost a rozměr nových univerzálních konstant závisí na volbě dalších základních jednotek!!

3)dvoujednotková base mechanických veličin

veličina	**def.vztah**	**konstanta**	**rozměr**	**jednotka**	**rozměr**
čas				T	T
délka				L	L
rychlost	$v=k_v\, s/t$	$k_v = 1$	1	-	LT^{-1}
zrychlení	$a=k_a\, v/t$	$k_a = 1$	1	-	LT^{-2}
hmotnost	$m=k_m a r^2$	$k_m = 1$	1	-	$L^3\,T^{-2}$
síla	$F=k_N\, ma$	$k_N = 1$	1	-	L^4T^{-4}
energie	$A=k_A\, Fs$	$k_A = 1$	1	-	L^5T^{-4}

Jiné zákony:

N.G.Z. $F = k_G\, m^2/r^2$, $k_G = k_{Go}\,[k_G]$, $k_{Go} = 1$, $[k_G] = 1$,
bez ohledu na velikost základních jednotek času a délky

Planckův z. $E = k_P\, \nu$ $k_P = k_{Po}\,[k_P]$, $k_{Po} \neq 1$, $[k_P] = L^5T^{-3}$

Konstanta k_{Po} závisí na volbě základních jednotek a musí být stanovena měřením. Například ve výše zmíněné „zjednodušené soustavě SI (m, sec)“ je $k_{Po} = h_o.\kappa_o$

Einst.vztah $E = k_E\ m$ $k_E = k_{Eo}\,[k_E]$, $k_{Eo} \neq 1$, $[k_E] = L^2T^{-2}$
Konstanta k_{Eo} závisí na volbě základních jednotek a musí být stanovena měřením. Například ve výše zmíněné „zjednodušené soustavě SI (m, sec)“ je $k_{Eo} = c_o^2$

!!!Důsledkem snížení počtu základních jednotek je snížení počtu univerzálních konstant.!!!

Zároveň se však ztrácí praktičnost velikosti odvozených jednotek:
např. je-li: L,T ≡ m, sec → $J_m = 1/\kappa\, J_a\, J_r^2 = 1/6.67\ 10^{11}$ kg
a zhoršují se podmínky pro rozměrovou analýzu , řada jednotek má stejný rozměr, snižuje se počet veličin ve veličinových rovnicích.

4) jednojednotková base základních veličin

veličina	**def.vztah**	**Konstanta**	**rozměr**	**jednotka**	**rozměr**
čas				T	T
délka	$s=c\ t$	$c=1$	1	-	T
rychlost	$v=k_v\ s/t$	$k_v=1$	1	-	1
zrychlení	$a=k_a\ v/t$	$k_a=1$	1	-	T^{-1}
hmotnost	$m=k_m a r^2$	$k_m=1$	1	-	T
síla	$F=k_N\ ma$	$k_N=1$	1	-	1
energie	$A=k_A\ Fs$	$k_A=1$	1	-	T

Jiné zákony:

N.G.Z $F = k_G\ m^2/r^2$, $k_G = k_{Go}\,[k_G]$, $k_{Go} = 1$, $[k_G] = 1$,
opět bez ohledu na velikost základní jednotky času

Planckův z. $E = k_P\ \nu$ $k_P = k_{Po}\,[k_P]$, $k_{Po} \neq 1$, $[k_P] = T^2$
Konstanta k_{Po} závisí na volbě základní jednotky času a musí být stanovena měřením. Například ve výše zmíněné „dvakrát zjednodušené soustavě SI (sec)“ je $k_{Po} = h_o.\kappa_o / c_o^5$

Einst.vztah $E = k_E\ m$ $k_E = k_{Eo}\,[k_E]$, $k_{Eo} = 1$, $[k_E] = 1$
Konstanta k_{Eo} nezávisí na volbě základní jednotky času a je v takto konstruované jednotkové soustavě vždy rovna jedné a bezrozměrná (položili jsme c=1, podobně jako výše u dvoujednotkové soustavy κ_o=1).

B) veličiny elektrické a magnetické

Systém CGSE - tříjednotková base jednotek mechanických veličin

veličina	def.vztah	konstanta	rozměr	jednotka	rozměr
čas				sec	T
délka				cm	L
hmotnost				g	M
rychlost	$v=k_v\ s/t$	$k_v=1$	1	-	LT^{-1}
zrychlení	$a=k_a\ v/t$	$k_a=1$	1	-	LT^{-2}
síla	$F=k_N\ ma$	$k_N=1$	1	-	MLT^{-2}
energie	$A=k_A\ Fs$	$k_A=1$	1	-	$ML^2\ T^{-2}$
elektrické veličiny					
náboj	$F = k_C\ q^2 / r^2$	$k_C= 1$	1	sC	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$
proud	$I = k_I\ q / t$	$k_I = 1$	1	sA	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-2}$
int.el.pole	$E = k_E\ F / q$	$k_E = 1$	1	-	$M^{1/2}\ L^{1/2}T^{1}$
magnetické veličiny					
int.mag.pole	$H = k_H\ 2\ I / a$	$k_H = 1$	1	-	$M^{1/2}L^{1/2}T^{-2}$
magn.množ.	$H = k_m\ F / m$	$k_m = 1$	1	-	$M^{1/2}L^{1/2}$
magn.moment	$\mu = k_\mu.m.l$	$k_\mu = 1$	1	-	$M^{1/2}L^{3/2}$

(Coulombův)

další zákony:

interakce magn. množství:

$F = k\ m^2 / r^2$ $\quad k = k_o\,[k],\quad k_o \neq 1,\quad [k] = L^2T^{-2}$

Konstanta k_o závisí na volbě základních jednotek a musí být stanovena měřením. Bylo nalezeno $k_o = c_o^2$

magn. moment. proudové smyčky (Ampérův):

$\mu = k\ I\ S \quad k = k_o\,[k],\quad k_o \neq 1,\quad [k] = L^{-2}T^2$

Konstanta k_o závisí na volbě základních jednotek a musí být stanovena měřením. Bylo nalezeno $k_o = c_o^2$

Síla mezi vodiči protékanými proudem:

$F = k\ 2\ I^2\ .l / a \quad k = k_o\,[k],\quad k_o \neq 1,\quad [k] = L^{-2}T^2$

Konstanta k_o závisí na volbě základních jednotek a lze ji snadno stanovit měřením. Bylo nalezeno $k_o = c_o^2$

Systém CGSM - tříjednotková base jednotek mechanických veličin

veličina	def.vztah	konstanta	rozměr	jednotka	rozměr
čas				sec	T
délka				cm	L
hmotnost				g	M
rychlost	$v=k_v\ s/t$	$k_v=1$	1	-	LT^{-1}
zrychlení	$a=k_a\ v/t$	$k_a=1$	1	-	LT^{-2}
síla	$F=k_N\ ma$	$k_N=1$	1	-	MLT^{-2}
energie	$A=k_A\ Fs$	$k_A=1$	1	-	$ML^2\ T^{-2}$

magnetické veličiny:

Mag. množ	$F = k_m\ m^2 / r^2$	$k_m = 1$	1	-	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$
Int.mag.pole	$H = k_H\ F / m$	$k_H = 1$	1	Oe	$M^{1/2}\,L^{-1/2}T^{-1}$
Magn.moment (Coulombův)	$\mu = k_\mu.m.l$	$k_\mu = 1$	1	-	$M^{1/2}L^{5/2}T^{-1}$

elektrické veličiny:

Proud	$H = k_I\ 2\ I / a$	$k_I = 1$	1	aA	$M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}$
Náboj	$I = k_C\ q / t$	$k_C = 1$	1	aC	$M^{1/2}L^{1/2}$
Int.el.pole	$E = k_E\ F / q$	$k_E = 1$	1	-	$M^{1/2}\,L^{1/2}T^{-2}$

další zákony:

Coulombův zákon:

$F = k_C\ q^2 / r^2$ $\quad k_C = k_{Co}\,[k_C],$ $\quad k_{Co} \neq 1,$ $\quad [k_C] = L^2T^{-2}$

Konstanta k_{Co} závisí na volbě základních jednotek a musí být stanovena měřením. Bylo nalezeno $k_{Co} = c_o^2$

Síla mezi rovnoběžnými vodiči protékanými proudem:

$F = k\ 2\ I^2\ .l / a$ $\quad k = k_o\,[k],$ $\quad k_o = 1,$ $\quad [k] = 1$

Protéká-li vodiči proud 1 aA, působí na sebe silou 2 jednotek síly.

V soustavě CGS je jednotkou síly dyn = g cm $sec^{-2} = 10^{-5}$ kg m sec^{-2} = = 10^{-5} N

Srovnejme :

Coulombův zákon v CGSE:

$$F = q^2 / r^2 \quad \Rightarrow \quad (sC)^2/cm^2 = 1\ dyn$$

Coulombův zákon v CGSM:

$$F = c^2\ q^2 / r^2 \Rightarrow\ c^2\ (aC)^2/cm^2 = c^2\ dyn$$

Co do velikosti je tedy **aC = c sC** (abychom dostali sílu 1 dyn musíme vzít náboj o velikosti aC/c)

Stejný poměr platí i pro jednotky proudu **aA = c sA**

Soustava GAUSSOVA - tříjednotková base jednotek mechanických veličin

Veličina	**def.vztah**	**konstanta**	**rozměr**	**jednotka**	**rozměr**
Čas				sec	T
Délka				cm	L
Hmotnost				g	M
Rychlost	$v=k_v\ s/t$	$k_v=1$	1	-	LT^{-1}
Zrychlení	$a=k_a\ v/t$	$k_a=1$	1	-	LT^{-2}
Síla	$F=k_N\ ma$	$k_N=1$	1	-	MLT^{-2}
Energie	$A=k_A\ Fs$	$k_A=1$	1	-	$ML^2\ T^{-2}$

elektrické veličiny:

Náboj	$F = k_C\ q^2 / r^2$	$k_C = 1$	1	sC	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$
Proud	$I = k_I\ q / t$	$k_I = 1$	1	sA	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-2}$
Int.el.pole	$E = k_E\ F / q$	$k_E = 1$	1	-	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}$

magnetické veličiny:

Mag.množ.	$F = k_m\ m^2 / r^2$	$k_m = 1$	1	-	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$
Int.mag.pole	$H = k_H\ F / m$	$k_H = 1$	1	Oe	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}$
Magn.mom.	$\mu = k_\mu.m.l$	$k_\mu = 1$	1	-	$M^{1/2}L^{5/2}T^{-1}$

další zákony:

B.-S. zákon: $H = k_B\ 2\ I / a$, $k_B = k_{Bo}\ [k_B]$, $k_{Bo} \neq 1$, $[k_B] = L^{-1}T$

Konstanta k_{Bo} závisí na volbě základních jednotek a musí být stanovena měřením. Bylo nalezeno $k_{Bo} = c_o^{-1}$

Soustava SI - čtyřjednotková, racionalizovaná (nedůsledně NGZ)

Veličina	**def.vztah**	**konstanta**	**rozměr**	**jednotka**	**rozměr**
Čas				sec	T
Délka				m	L
Hmotnost				kg	M
Proud				A	A
Rychlost	$v=k_v\ s/t$	$k_v=1$	1	-	LT^{-1}
Zrychlení	$a=k_a\ v/t$	$k_a=1$	1	-	LT^{-2}
Síla	$F=k_N\ ma$	$k_N=1$	1	-	MLT^{-2}
Energie	$A=k_A\ Fs$	$k_A=1$	1	-	$ML^2\ T^{-2}$

elektrické veličiny:

Náboj	$I = k_q\ q / t$	$k_q = 1$	1	C	AT
Int.el.pole	$E = k_E\ F / q$	$k_E = 1$	1	-	$MLT^{-3}A$

magnetické veličiny

Int.mag.pole	$H = k_H\, 2I/a$	$k_H = 1$	1	-	AL^{-1}
Magn.indukce	$F = k_B\, q\, v\, B$	$k_B = 1$	1	T	$MT^{-2}A^{-1}$

Praktická jednotka proudu 1A = 0.1 aA

Síla mezi dvěma rovnob. vodiči délky l ve vzdál. a protékanými proudem I:

$$F = k\,.2.\,I^2\,.l\,/\,a$$

Použijeme-li dříve (historicky) definovanou jednotku proudu 1A = 0.1 aA působí na sebe vodiče silou (viz soustavu CGSM): 2.10^{-2} dyn $= 2.10^{-7}$ N
Konstanta k musí mít tedy hodnotu: $k = 10^{-7}\ N\ A^{-2}$

Požadujeme-li dále v duch racionalizace, aby vzorec pro sílu měl v důsledku válcové symetrie problému tvar:

$$F = k'/2\pi\ \ I^2\,.l/a$$

Máme pro konstanty úměrnosti: $2.k = 2.\ 10^{-7} = k'/2\pi$

A konečně: $k' \equiv \mu_0 = 4\ \pi\ 10^{-7}\ MLT^{-2}A^{-2}$

Další univerzální konstanta (μ_0) je důsledkem další (čtvrté) základní jednotky (A).

Další zákony:

Coulombův zákon:

$F = k_C\, q^2\ /\ \ 4\ \pi\, r^2\quad k_C = k_{Co}\,[k_C],\qquad k_{Co} \neq 1,\qquad [k_C] = ML^3T^{-4}A^{-2}$

Konstanta k_{Co} závisí na volbě základních jednotek a musí být stanovena měřením. Bylo nalezeno $k_{Co} = 4\ \pi\ .\ 9\ 10^9$

Označme: $k_C \equiv 1/\ \varepsilon_0$

Potom platí:

$\mu_0\ .\ \varepsilon_0 = 4\ \pi\ 10^{-7}\ [MLT^{-2}A^{-2}]\ /\ 4\ \pi\ 9\ 10^9\ [ML^3T^{-4}A^{-2}] = (\ 9\ 10^{16}\ L^2T^{-2})^{-1}$

$$\boldsymbol{\mu_0\ .\ \varepsilon_0 = 1\ /c^2}$$

Seminární úloha 7.:
Napište zákon alektromagnetické indukce ($U \approx -\ d\Phi/dt$) v soustavách jednotek CGSE, CGSM, Gaussově a SI.
Řešení: využijte výsledků rozměrové analýzy (viz [1], tab. 2, str.510).

CGSE $\qquad [U] = L^{1/2}\ M^{\ 1/2}\ T^{-1}$

$\qquad [d\Phi/dt] = L^{1/2}\ M^{\ 1/2}\ T^{-1}\ \Rightarrow\ U = -\ d\Phi/dt$

CGSM	$[U] = L^{3/2} M^{1/2} T^{-2}$
	$[d\Phi/dt] = L^{3/2} M^{1/2} T^{-2} \Rightarrow U = - d\Phi/dt$
Gaussova	$[U] = L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$
	$[d\Phi/dt] = L^{3/2} M^{1/2} T^{-2} =[U]\ [v] \Rightarrow U = - 1/c\ d\Phi/dt$
SI	$[U] = L^{2} M^{1} T^{-3} A^{-1}$
	$d\Phi/dt] = L^{2} M^{1} T^{-3} A^{-1} \Rightarrow U = - d\Phi/dt$

Seminární úloha 8.:
Napište vzorec pro Lorentzovu sílu $\mathbf{F} \approx q\ (\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}))$ v soustavách jednotek CGSE, CGSM, Gaussově a SI.
Návod: Využijte výsledků rozměrové analýzy.

Seminární úloha 9.:
Napište vztah pro magnetický moment proudové smyčky ($\mu \approx I\ S$) v soustavách jednotek CGSE, CGSM, Gaussově a SI.
Návod: Vyžijte výsledků rozměrové analýzy.

Seminární úloha 10.:
Určete poměr mezi jednotkou magnetické indukce v soustavách Gaussově (CGSM) a SI.
Návod: Využijte výsledků rozměrové analýzy např. v Lorentzově vztahu a známých vztahů mezi velikostmi jednotek proudu.

Definice vybraných jednotek SI – základních (viz [6])

veličina	**jednotka**	**Definice**
čas	sec	Jednotka času je definovaná frekvencí kvantového přechodu mezi hladinami hyperjemného štěpení ve spektru základního stavu $^{2}S_{1/2}$ atomu ^{133}Cs, F=4, m_F=0 $\rightarrow$ F=3, m_F=0. Tato frekvence je 9,192631770 GHz
délka	m	Jeden metr je dráha, kterou urazí světlo ve vakuu za dobu:(1/299 792 458) sec
hmotnost	kg	Etalon z platinoiridiové slitiny v mez. ústavu pro míry a váhy (reprodukovatelnost řádu 2.10^{-8})
el. proud	A	Proud, který vyvolává mezi dvěma paralelními nekonečně dlouhými vodiči vzdálenými 1m sílu 2.10^{-7} N na jeden metr délky
tepl. stupeň	K	237,16 - tá část termodynamické teploty trojného bodu vody
mol. množ	mol	je látkové množství, které obsahuje tolik strukturních elementů, kolik je atomů v 0.012 kg uhlíku $^{12}C_6$
svítivost	cd	Svítivost 1/600 000 m^2 plochy absolutně černého tělesa ve směru normály při teplotě tuhnutí platiny při normálním tlaku (101 325 Pa)

3. Metody měření

V průběhu experimentu (pozorování) lze obvykle rozlišit tři fáze

- příprava
- měření
- zpracování

Příprava	studium teorie, výběr metody měření, odhad výsledku, výběr přístrojů (odhad citlivosti a přesnosti, cejchování, rozbor vnějších vlivů), příprava vzorků, organizační opatření (výběr spolupracovníků, materiální zabezpečení – astronomické expedice, experimenty jaderné fyziky).	
Měření	Objektivní	registrace výsledků pomocí čidel a detektorů
	subjektivní-využití smyslů-	čtení na stupnicích odhad maxim rezonančních křivek odhad maximálního zaostření a pod
Zpracování výsledků	Předzpracování v průběhu experimentu Využití výpočetní techniky	

Klasifikace měřících metod - rozlišení podle různých hledisek

- metody
  - přímé - měření přímým srovnáváním s jednotkou měřené veličiny
    - *například: měření délky, vážení*
  - nepřímé - využití definičních vztahů, fyzikálních zákonů
    - *například: měření rychlosti střely ze zákona zachování energie a hybnosti ([1] kap. 2.2.1.2.), měření specifického náboje elektronu z charakteristiky pohybu v mg. poli ([1] kap. 8.2.7.3.) a pod.*

    sporné !! - např. měření hustoty, měření proudu, měření odporu (měření odporu metodou přímou)
  - statické -měřená hodnota se určuje z experimentu s časově nepromĕnnými charakteristikami
    - *například: statické měření modulu pružnosti ve smyku z torze tyčí ([1] kap. 2.3.2.1.*
  - dynamické -měřená veličina se určuje z experimentu s časově proměnnými charakteristikami
    - *například: dynamická metoda měření modulu pružnosti ve smyku torzním kyvadlem ([1] kap. 2.3.2.2.)*
  - absolutní - stanovení hodnoty vůči jednotce
  - relativní - stanovení hodnoty vůči normálu, standartu, etalonu, maximální hodnotě

- substituční
  - *například: měření odporu ([1] kap. 4.3.5.2.)*
- kompenzační -nulové metody, nezávislé na absolutní kalibraci indikačního přístroje, snadná automatizace
  - *například: vážení ([1] kap. 2.2.1.2.), můstkové metody ([1] kap. 4.3.5.4.)*

3.2. Možnosti potlačování subjektivních faktorů

- interpolace (uvnitř dělení stupnice)
  - - ručkové přístroje (metoda zrcátkových stupnic), délková měřidla (nonia)
- individuální vjem
  - - vjem ostrosti (optika, uvážení intervalu ostrosti)
- využití registračních přístrojů –
  - měření doby kyvu kyvadla
    - (subjektivně, objektivně - např. optické čidlo)
- využití elektronických zařízení
  - A/D převodník
  - měření napětí osciloskopem
- využití výpočetní techniky
  - např. fitace maxim rezonanční křivky

3.3. Metody zvyšování citlivosti měřících zařízení

citlivost zařízení (metody) na změnu sledované veličiny p:

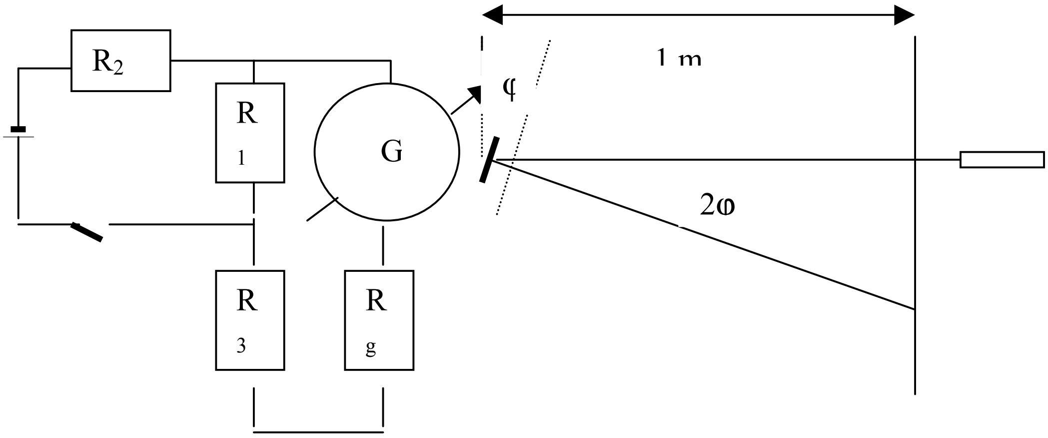
$$\mathbf{c_p = d\alpha/dp,}$$

kde: $d\alpha$ - změna veličiny registrované (úhel, délka, a pod.)
dp - změna veličiny studované.

a) mechanické

- metoda zrcátka a škály ($\varphi = s/R$, $2\varphi = S/L \rightarrow S\ (2L/R).s$)
- využití mikrometrických posuvů, pákových převodů (S = (L/R).s)

Seminární úloha 11:
Galvanoměr se zrcátkem je zapojen v obvodu podle obrázku. Při zapnutí klíče se světelný index na stupnici vzdálené 1m vychýlí o 10 cm. Jaká je proudová a napěťová citlivost galvanometru.



Obr.: schema zapojení

$R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 10^3\Omega$, $R_3 = 600\ \Omega$, $R_g = 120\ \Omega$, $U = 6$ V

$c_I = dS / dI$, $dS = 0.01$ m (při vzdálenosti stupnice 1 m a užití metody zrcátka a škály)

$dI = 6 . R_1 / ((R_1+R_3) R_2 + R_1R_3) = 8.3 .10^{-6}$ A

$c_I = 1.2 . 10^3$ m/m/A = $1.2\ 10^6$ mm/m/A

$c_U = dS / dU = dS / R_g\, dI = c_I / R_g = 1 . 10^{-8}$ mm/m/V

Seminární úloha 12

Stanovte proudovou citlivost Wheatsonova můstku v rovnováze ($X_0 = R_3(R_1/R_2)$, $c_I = (dI_g / dX)_{Xo}$)

b) elektrické
- využití zesilovačů, střídavé zesilovače (přerušování optických signálů)

b) využití proudových a napěťových svorek pro měření malých odporů

b) zvýšení rozlišení optických soustav
- geometrie (omezení ohybových jevů, interference více svazků, hranolový kontra mřížkový spektrometr)
- zúžení šířky čáry - vlastní šířka čáry, Doplerovské rozšíření (snížení teploty)

3.4. Metody zlepšování poměru signál/šum

a) omezení zdrojů šumu (fluktuací)
- mechanické vibrace (mechanická pevnost) šum elektrických zařízení - $u_n^2 = 4\ kT\ R\ \Delta\nu$ (přizpůsobení stupňů v zesilovačích, využití vhodných součástek (s menším šumovým číslem), snížení teploty, snížení odporu)

b) <u>omezení šířky pásma</u>

- přerušovaný signál, synchronní detektor

c) <u>využití číslicové techniky</u>

- metoda koherentní sumace

4. Chyby měření

4.1. Základní pojmy

Systematika chyb:	<u>Chyby hrubé</u>	- vznikají hrubým zásahem do procesu měření, jejich velikost významně převyšuje rozptyl chyby statistické
	<u>Systematické</u>	- vznikají v důsledku chybných kalibrací, interpretací a pod., zatěžují stejným způsobem výsledek každého měření
	<u>Statistické</u>	- jsou důsledkem náhodných fluktuací, které se popisují metodami matematické statistiky

<u>Formální zápis výsledku měření:</u>

$$A = (\widetilde{A} \pm \varepsilon_{\widetilde{A}}) \, [A]$$

měřená veličina	A
výsledek měření	$\widetilde{A}$
absolutní chyba	$\varepsilon_{\widetilde{A}}$
relativní chyba	$\eta_{\widetilde{A}} = \widetilde{A} / \varepsilon_{\widetilde{A}}$
označení jednotky (rozměr	[A]

Symboly: $\widetilde{A}$, $\varepsilon_{\widetilde{A}}$ **jsou čísla**

<u>Formát čísel</u>: $\widetilde{A}$, $\varepsilon_{\widetilde{A}}$

<u>Platná číslice</u>: Platnými číslicemi se nazývají všechny číslice zaokrouhleného čísla s vyjímkou nul na začátku přibližné hodnoty.

Příklad: a = 0.001234 $\rightarrow$ 4 platné číslice
a = 0.607012 $\rightarrow$ 6 platných číslic

<u>Zásady pro formu zápisu výsledků měření</u>:

a) chybu měření uvádíme na <u>nejvýše dvě platné číslice</u>

b) ve výsledku zaokrouhlujeme <u>v řádu poslední platné číslice chyby</u>

Příklady: $v = (3.86 + 0.03)\ msec^{-1}$
$I = (2.3 + 0.1)\ 10^{-3}\ A$
$P = (8.706 + 0.054)\ mW$
$B = 4.56(5)\ T$

Poznámka: Pokud se chyba měření ve výsledku neudává, předpokládá se implicitně, že je menší, než polovina řádu za poslední platnou číslicí výsledku:

$$v = 3.5\ msec^{-1} \equiv (3.45 \le v \le 3.55)\ msec^{-1}$$

Pozor na zaokrouhlovací chybu ! $c = (2.9979150 + 0.0000001).10^5\ kmsec^{-1}$
$c = 2.99792.10^5\ kmsec^{-1}$ - správně
$c = 300\,000\ kmsec^{-1}$ - špatně, protože chyba zaokrouhlení: $\varepsilon(c) = 210\ kmsec^{-1} > 5.10^{-1}\ kmsec^{-1}$

4.2. Základní pravidla pro práci s neúplnými čísly

<u>metoda mezí, maximální odhad</u>: nechť: $a = a \pm \varepsilon_a$, $b = b \pm \varepsilon_b$

<u>Součet:</u>
$$S = a + b = (a + b) \pm (\varepsilon_a + \varepsilon_b),$$
$$\varepsilon_S = (\varepsilon_a + \varepsilon_b),$$
$$\eta_S = (\varepsilon_a + \varepsilon_b) / (a + b)$$

Rozdíl:
$$R = a - b = (a - b) \pm (\varepsilon_a + \varepsilon_b),$$
$$\varepsilon_R = (\varepsilon_a + \varepsilon_b),$$
$$\eta_R = (\varepsilon_a + \varepsilon_b) / (a - b),$$

Pozor: na možnost **enormního zvýšení** relativní chyby při rozdílu téměř stejných hodnot!

Součin:
$$N = a.b = a.b \pm (b.\varepsilon_a + a.\varepsilon_b),$$
$$\varepsilon_N = (b.\varepsilon_a + a.\varepsilon_b),$$

Podíl:
$$P = a/b = a / b \pm (\varepsilon_a/ b + a.\varepsilon_b/ b),$$
$$\varepsilon_P = \varepsilon_a/ b^2 + a.\varepsilon_b/ b^2,$$
$$\eta_P = \eta_a + \eta_b,$$

Seminární úloha 13:
Dokažte výše uvedené vztahy pro maximální absolutní a relativní chybu součtu, rozdílu, součinu, podílu a mocniny.

4.3. Chyby měřidel

Třída přesnosti: třída přesnosti ručkových měřících přístrojů p(%) se udává v procentech a stanovuje absolutní chybu měření na daném rozsahu R podle vztahu:

$$\boldsymbol{\varepsilon = p.R}$$

Příklad: rozsah ampérmetru je R = 3 A , třída přesnosti je 1.5%.

Absolutní chyba měření proudu na tomto rozsahu

$$\varepsilon(I) = 1.5.10^{-2}.\ 3 = 0.045\ A$$

Poznámka: je zřejmé, že z důvodů minimalisace relativní chyby měření je nutno měřit v horní polovině stupnice ručkového měřícího přístroje

Třída přesnosti je údajem výrobce, který je získán statistickým šetřením na seriích hotových výrobků (měřících přístrojů). Chybu měření stanovenou z třídy přesnosti je nutno srovnat s chybou stanovenou statistickým zpracováním. V tomto případě se s ní zachází jako s chybou stanovenou odhadem a skládá se s chybou statistickou (viz dále).
Pojem třídy přesnosti je možno zobecnit i na jiné měřící přístroje. Někdy je možno odhadnout absolutní chybu měření z dělení stupnice.

Seminární úloha 14:
Měření odporu metodou přímou (viz schema) bylo proveden s přístroji třídy přesnosti 1. Byly naměřeny následující hodnoty: I = 210 mA (rozsah 0.3 A), U = 18.5 V rozsah 30 V). Vnitřní odpor voltmetru je $10^5\ \Omega$ a vnitřní odpor ampérmetru je 7 Ω. Stanovte velikost měřeného odporu a chybu měření. Diskutujte možné alternativy zapojení a nutné korekce s ohledem na chybu měření.

***Značení přístrojů*: Značení některých typů elektrických měřících přístrojů (viz [1])**

5. Vybrané základní pojmy matematické statistiky

5.1. Náhodný jev, pravděpodobnost

Experiment (E) - je definován předpisem, který specifikuje množinu možných výsledků $\{V(E)\}$.

Výsledek experimentu $v \in \{V\}$

Příklad: kostka $\{V(E)\} \equiv$ {. , : , :. , :: , :.: , :::}
vážení $\{V(E)\} \equiv$ {(hmotnosti) }

Pozn.: definice pouze požaduje, aby $v \in \{V(E)\}$, nikoliv, aby každý prvek $\{V\}$ nastal

Náhodný jev A na experimentu E (A(E)): je zadán pravidlem, které určuje, zda jev nastal, či nenastal

A(E) - je určen množinou pozitivních výsledků

Příklad: $E \equiv$ házení kostkou
$A(E) \equiv$ {. ,: , :.} , $B(E) \equiv$ {:: , :.: ,:::}

Náhodná proměnná x na experimentu E (x(E)): je určena pravidlem, které výsledku experimentu přiřazuje číslo jako hodnotu náhodné proměnné

Příklad: 1) $E \equiv$ házení kostkou
$x \equiv n \equiv$ počet bodů, **diskretní náhodná proměnná,**
$x \in \{1,2,...,6\}$
2) $E \equiv$ vážení
$x \equiv m \equiv$ hmotnost (SI), **spojitá náhodná proměnná**
$x \in \{0 , \infty \}$

Specielně**:** **náhodný výběr (N)** - experiment, jehož množina výsledků je konečná a realisace žádného z nich není upřednostněna

Příklad: házení kostkou $E \equiv N$
$x (N) \equiv \{1,2,...,6\}$

Definice: Nechť A_i (E) jsou jevy na experimentu E potom:

1) jev **non A (E)** $\equiv$ jev A nenastane

2) jev $\bigcup_{i=1}^{n} A_i(E)$ $\equiv$ nastane alespoň jeden z jevů A_I

3) jev $\bigcap_{i=1}^{n} A_i(E)$ $\equiv$ nastane každý z jevů A_i

Specielně: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i(E)$ $\equiv \varnothing$ (prázdná množina výsledků) $\equiv$ jevy **disjunktní**

Definice pravděpodobnosti (teorie míry)**:**

Nechť je experiment E zadán množinou {V(E)}. Na experimentu E nechť jsou dále zadány jevy A(E) a B(E) svými množinami výsledků {V(A)} a {V(B)}, {V(A)},{V(B)} $\in$ {V(E)}.

Definujeme: **pravděpodobnost jevů A, B jako míru podmnožin {V(A)},{V(B)}** následujícími pravidly:

1) $p(A) \geq 0$
2) $p(V) = 1$
3) $p(A \cup B) \equiv p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Příklad: experiment (E) $\equiv$ házení kostkou $\equiv$ náhodný výběr
{x(N)} $\equiv$ {1,2,..,6},
nechť jevy $A_i \equiv \{i\}$, i = 1,...,6 , disjunktní a zároveň:
$A \equiv \cup A_i \equiv \{1,..,6\} \equiv \{V(N)\}$

$p(A) = 1 = \sum_{1}^{6} p(A_i)$, zároveň $p(A_i) = p(A_k) = p$; (i,k = 1,..,6)

Potom $1 = \sum_{1}^{6} p(A_i) = \sum_{1}^{6} p = 6\,p \Rightarrow p = 1/6$;

Pro **náhodný výběr** platí: $\mathbf{p(A) = n_i / n}$,

kde n_i je počet prvků množiny $\{V(A_i)\}$ a n je počet prvků množiny {V(N)} –

p(A) - redukovaná velikost podmnožiny.

Příklad: experiment (E) $\equiv$ házení kostkou
Nechť: A(N) je definován {V(A)} $\equiv$ {1,2,3,4}
a B(N) množinou výsledků {V(B)} $\equiv$ {4,5,6}
{V(A)} $\cup$ {V(B)} $\equiv$ {V(N)}
$p(A \cup B) = 4/6 + 3/6 - 1/6 = 1$

Jev opačný: Nechť: A $\equiv$ {V(A)}, nonA $\equiv$ {V(nonA)}

Platí: $\{V(A)\} \cup \{V(nonA)\} \equiv \{V(E)\}$,
a dále: $\{V(A)\} \cap \{V(nonA)\} \equiv \varnothing$, jevy disjunktní

Potom: $p(A \cup nonA) = p(A) + p(nonA) = 1$
tedy: $\mathbf{p(nonA) = 1 - p(A)}$

Podmíněná pravděpodobnost (náhodný výběr*):*

Nechť: $\{V(N)\}$ má $\underline{n}$ prvků ,
$\{V(A)\}$ má $\underline{n_A}$ prvků ,
$\{V(B)\}$ má $\underline{n_B}$ prvků ,
$\{V(A)\} \cap \{V(B)\}$ má n_{AB} prvků ,

potom:

$$p(A \cap B) = n_{AB} / n = (n_{AB} / n_B).(n_B / n) = p(A/B).p(B)$$

$$\mathbf{p(A / B) = p(A \cap B) / p(B)}$$

Poznámka: Dá se ukázat, že odvozený vztah platí obecně, nejen pro experimenty typu náhodný výběr

Příklad: $N \equiv \{1,2,..,6\}$, $\{V(A)\} \equiv \{1,2,3,4\}$, $\{V(B)\} \equiv \{4,5,6\}$
$p(A/B) = (1/6) / (3/6) = 1/3$ Nastal-li jev B, potom s pravděpodobností $p(A/B) = 1/3$ nastane i jev B

Definice: Experiment E, který je **spojením experimentů E_i, (i = 1,..,n)** má za množinu výsledků **kartézský součin množin $\{V(E_i)\}$**, kde $\{V(E_i)\}$ jsou množiny výsledků experimentů E_i .

$$\mathbf{E \equiv E_1 . E_2 . E_3 ... E_n} ,$$

$$\mathbf{\{V(E)\} \equiv \{V(E_1)\}x\{V(E_2)\}x\{V(E_3)\}x.....x\{V(E_n)\}}$$

Poznámka: Kartézský součin $\equiv$ uspořádaná n -tice

Příklad: Současné házení dvěma kostkami
$N_1 \equiv \{1,2,...,6\}$, $N_2 \equiv \{1,2,...,6\}$
$E \equiv N_1. N_2$,
$\{V(E)\} \equiv \{(1,1) , (1,2) ,.., (1,6) , (2,1) , (2,2) ,.., (6,6)\}$,
$n_E = 36$

Definice: Experimenty jsou **nezávislé,** pokud provedení (výsledek) jednoho nezávisí na provedení (výsledku) druhého. Pravděpodobnosti jevů na nezávislých experimentech jsou pak také nezávislé

Definice: **náhodný jev** na **spojení experimentů** je definován množinou výsledků:

$$\{V(A)\} \equiv \{V(A_1)\} x \{V(A_2)\} x \{V(A_3)\} x \ldots x \{V(A_n)\}$$

Definice: jevy jsou **nezávislé**, jsou-li definovány **na nezávislých experimentech**

Pro **náhodný jev** na **spojení nezávislých experimentů** platí**:**

$$p(A) = \prod_{i=1}^{n} p(A_i)$$

Příklad: pro nezávislé náhodné výběry platí:

$p(A) = n_A / N$, kde $n_A = \prod_{i=1}^{n} n_{A_i}$, $N = \prod_{i=1}^{n} n_i$

potom: $p(A) = \prod_{i=1}^{n} n_{Ai} / \prod_{i=1}^{n} n_i = \prod_{i=1}^{n} p(A_i)$

Příklad: házení dvěma kostkami - i = 2
jev A_1 na N_1: $\{V(A_1)\} \equiv \{1, 2\}$, $p(A_1) = 2 / 6$
jev A_2 na N_2: $\{V(A_2)\} \equiv \{3, 4, 6\}$, $p(A_2) = 3 / 6$
$A = A_1 . A_2$, $\{V(A)\} \equiv \{V(A_1)\} x \{V(A_2)\}$
$\{V(N_1.N_2)\}$ má 36 prvků, $\{V(A)\}$ má 6 prvků
$p(A) = 6 / 36 = p(A_1) . p(A_2)$ $\Rightarrow$ jevy nezávislé

Příklad: tažení z balíčku karet (bez Jokera) -
$E_1 \equiv N_1$, $\{V(N_1)\} \equiv \{2,3,4,\ldots,E\} \Rightarrow n_1 = 13$
$E_2 \equiv N_2$, $\{V(N_2)\} \equiv \{S,K,T,P\} \Rightarrow n_2 = 4$
$A_1 \equiv \{10\}$, $A_2 \equiv \{S\}$, $A \equiv A_1 . A_2$
$\{V(A)\} \equiv \{(10,S)\} \Rightarrow n_A = 1$, $N = 4.13 = 52 \Rightarrow p(A) = 1/52$,
zkusíme: $p(A) = p(A_1) . p(A_2) = (1 /13) . (1 / 4) = 1 / 52$, $\Rightarrow$
A_1 , A_2 experimenty nezávislé

Příklad: tažení z balíčku karet (s přidáním Jokera)
E_1 - $\{V_1\} \equiv \{2,3,4,\ldots,A,J\}$ - 14 prvků
E_2 - $\{V_2\} \equiv \{S,K,T,P,J\}$- 5 prvků
E_1, E_2 nejsou experimenty typu náhodný výběr (např. realizace symbolů 2, 3, ... A je upřednostněna proti symbolu J)

$p(J) = 1/ 53$, $p(10) = 4/ 53$, $p(S) = 12/ 53$, $P(J) = 1/53$
$p(10,S) = 1/53$ x $p(10).p(S) = (4/53).(12/53) = 48/ 532$
$\Rightarrow$ experimenty nejsou nezávislé

Definice: Označme: $\mathbf{E_n \equiv (E.E \ldots E)_n}$, **n-krát opakovaný experiment E**

a dále: {V(E)} množinu výsledků experimentu E
Potom: $\mathbf{E_n \equiv \{\{V(E)\} \times \{V(E) \times ....\times \{V(E)\}\}_n}$

Definice: Je-li definován jev A(E) svoji množinou výsledků {V(A)}, potom: **jev na opakování experimentu** $A_n(E_n)$ je definován množinou výsledků: $\mathbf{\{V(A_n)\} \equiv \{\{V(A)\} \times \{V(A)\} \times ... \times \{V(A)\}\}_n}$,

Alternativní definice pravděpodobnosti: Využitím pojmu **relativní četnosti** při nezávislém opakování experimentu. Není omezena na experimenty typu náhodný výběr.

Definice: Označme n_A počet realisací jevu A na experimentu E při n-násobném nezávislém opakování experimentu E. Jako **pravděpodobnost jevu A** potom označíme:

$$p_A = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n_A}{n}\right)$$

Příklad užití: integrace metodou Monte-Carlo

5.2. Rozdělení pravděpodobnosti

Definice: **Rozdělením pravděpodobnosti** nazýváme funkci, která hodnotám náhodné proměnné přiřazuje jejich pravděpodobnost

a) diskrétní náhodná proměnná

Rovnoměrné rozdělení:

Definice: Mějme na experimentu E jevy A_i , i= (1, ..., n) . Je-li rozdělením pravděpodobnosti každému z těchto jevů přiřazena stejná pravděpodobnost hovoříme o **rovnoměrném rozdělení pravděpodobnosti:**

p(Ai) = p , pro i = (1,..,n).

Jsou-li jevy A_i disjunktní:

Užitím normovací podmínky: $1 = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) = \sum_{i=1}^{n} p = n.p$

dostaneme:

$\mathbf{p(A_i) = 1 / n}$;

Příklad: experiment házení kostkou n = 6, p = 1 / 6;

Binomické rozdělení:

Definice: Mějme jev s pravděpodobností p. Pravděpodobnost, že při N-násobném nezávislém opakování nastane jev s pravděpodobností p právě k-krát, k = (0,1,2,...,N) je dána Binomickým rozdělením ve tvaru:

$$\mathbf{P(k)} = \binom{N}{k}\ \mathbf{p^k\ (1-p)^{N-k}}$$

k - diskrétní náhodná proměnná, p a N jsou parametry.

Platí: Pravděpodobnost jevu na nezávislém opakování experimentu:

$$P(k) = C_k\, p^k\, (1-p)^{N-k}$$

Normovací podmínka: $1 = \Sigma\, C_k\, p^k\, (1-p)^{N-k} \Rightarrow C_k = \binom{N}{k}$

Poissonovo rozdělení:

Uvažujme náhodný jev, který se realizuje v určitém intervalu (počet emisí γ-kvant v časovém intervalu (0,t), počet překlepů na stránce textu).
Za předpokladu, že:

i) realisace náhodného jevu jsou navzájem nezávislé,
ii) pravděpodobnost realisace jevu v malé části uvažovaného intervalu je úměrná velikosti tohoto intervalu: $P(t,t+dt) = \mu\,.dt$
iii) pravděpodobnost současné realisace (též místně) dvou jevů je nulová.

Nechť $P_k(t)$ je pravděpodobnost, že určitý jev (emise γ-kvanta) nastane v časovém intervalu (0,t) k-krát.

1) k = 0, ? $P_0(t+dt)$

$$P_0(t+dt)=P_0(t).(1-\mu.dt)$$

Z toho:

$$dP_0(t)/dt = -\mu\, P_0 \Rightarrow P_0(t) = C\exp(-\mu.t)$$

Z okrajové podmínky: $t \to 0 \Rightarrow P_0(t) \to 1 \Rightarrow C = 1$

Tedy: $P_0(t) = \exp(-\mu.t)$

2) k=1, ? $P_1(t+dt)$

$$P_1(t+dt)=P_0(t).\mu dt + P_1(t).(1-\mu\, dt) \quad \rightarrow$$

$$dP_1(t)/dt = -\mu\, P_1(t) + \mu.\exp(-\mu t) \qquad (*)$$

a dále: $P_1(t) = \mu t.\ \exp(-\mu t)$

3) pro obecné k (srovnej vztah (*)):

$dP_k(t)/dt = -\mu\ P_k(t) + \mu.P_{k-1}(t)$

a dále: $P_k(t) = (\mu t)^k/k!\ \exp(-\mu t)$

Prověřme podmínku normování:

$\Sigma\ P_k(t) = \exp(-\mu t).\ \Sigma(\mu t)^k / k! = \exp(-\mu t).\ \exp(\mu t) = 1$

Obecně je interval (0,t) jednotkový, potom:

Definice: Poissonovým rozdělením nazýváme rozdělení pravděpodobnosti ve tvaru:

$$\mathbf{P_k = (\mu)^k/k!\ \exp(-\mu)}$$

b) spojitá náhodná proměnná

Množina možných výsledků experimentu je spojitá - interval, plocha, objem

Definice: Pravděpodobnost realizace náhodné proměnné v intervalu (x, x+dx) je úměrná velikosti intervalu <u>dx</u> :

$$\mathbf{P(x,x+dx) = p(x)dx}$$

Funkci p(x) nazýváme **hustotou pravděpodobnosti**.

Normování:
$$\int_x p(x)dx = 1$$

Rovnoměrné rozdělení:

Definice: Je-li náhodná proměnná definovaná <u>x</u> na intervalu <a,b> a platí-li pro všechna $x \in <a,b>$:

$$\mathbf{p(x) = konst}\ ,$$

hovoříme o **rovnoměrném rozdělení** pravděpohobnosti.

Užitím normovací podmínky:

$$\int_a^b p(x)dx = konst \int_a^b dx = konst(b-a) = 1$$

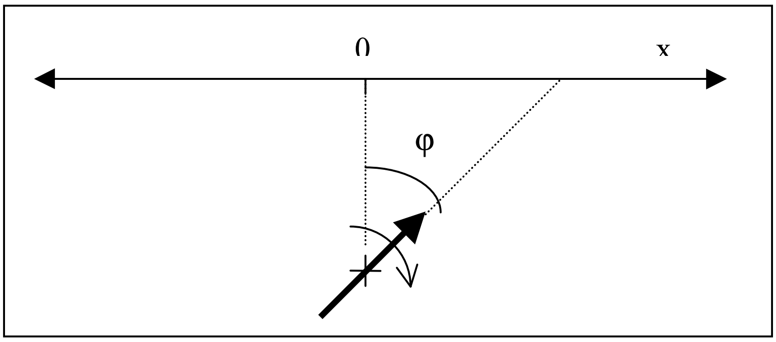
Dostaneme:

$$\mathbf{p(x)} = \frac{1}{(b-a)}$$

Cauchyho rozdělení:

Mějme rovnoměrné rozdělení pro náhodnou proměnnou (úhel φ) v intervalu
$\varphi \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$.

Příklad: rovnoměrně se otáčející, náhodně střílející dělo (viz obr.).



Jaké je rozdělení zásahů v cílové rovině v jednotkové vzdálenosti?

Hledáme rozdělení pravděpodobnosti q(x).

Pravděpodobnost výstřelu v intervalu $\langle \varphi, \varphi + d\varphi \rangle$ je dána funkcí p(φ) = konst.

Z normovací podmínky: $$1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p(\varphi)\, d\varphi = konst.\pi$$

plyne: $$\mathbf{p(\varphi)} = \frac{1}{\pi}$$

Transformace proměnných (viz obr.):

$$\mathrm{tg}(\varphi) = x\,, \quad \varphi = \mathrm{arctg}(x)\,, \qquad d\varphi = \frac{1}{(1+x^2)}dx$$

Tedy: $$\mathbf{p(\varphi)\, d\varphi} = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{(1+x^2)}dx = \mathbf{p(x)\, dx}$$

a: $$\mathbf{p(x)} = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{(1+x^2)} \qquad (**)$$

Definice: Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny x v intervalu $x \in (-\infty, \infty)$

ve tvaru (**) nazýváme **Cauchy(ho) rozdělením**

Seminární úloha 15:
Nalezněte funkci popisující rozdělení pravděpodobnosti výskytu matematického kyvadla v intervalu <-A,+A> v aproximaci malého rozkmitu.
Návod: uvažte souvislost mezi pohybem koncového bodu matematického kyvadla a rovnoměrným pohybem po kružnici o poloměru A.

Normální (Gaussovo rozdělení):

Definice: Nechť je dána spojitá náhodná proměnná x v intervalu $x \in (-\infty, +\infty)$.
Normálním rozdělením nazýváme funkci ve tvaru:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} ,$$

kde:
- μ značí střední hodnotu
- σ^2 se nazývá disperse (variance, rozptyl) náhodné proměnné
- σ se nazývá standartní odchylkou.

Funkce p(x) je schematicky znázorněna na obr.3.2 ([1] str.38).

Poznámka: Je-li $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} > 1 \quad \Rightarrow \quad p(\mu) > 1$??????
Hodnotu hustoty pravděpodobnosti nelze směšovat s pravděpodobností.
Jak je uvedeno výše, význam pravděpodobnosti výskytu veličiny v intervalu dx má hodnota : p(x)dx

Uvažujme:

$$P(\mu - a, \mu + a) = \int_{\mu - a}^{\mu + a} p(x)dx$$

P (μ - a,μ + a)	**a**
0.5	2σ/3
0.683	σ
0.955	2σ
0.997	3σ

Seminární úloha 16.
Dokažte, že Normální rozdělení má v bodech $x = \mu \pm \sigma$ inflexní body.

5.3. Střední hodnota, momenty náhodné veličiny

Definice: mějme spojitou náhodnou proměnnou x na intervalu <a,b> s rozdělením

pravděpodobnosti p(x). Potom **střední hodnota $E_x \equiv \langle x \rangle$** je definována vztahem:

$$E_x = \int_a^b x p(x) dx$$

Obdobně pro diskrétní náhodnou proměnnou k̲ platí:

$$E_k = \sum_k k p_k$$

Příklad: jaká je střední hodnota bodů při házení kostkou?

Intuitivně - sečteme všech N pokusů a vydělíme je číslem N :

$$E_k = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} n_k = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{6} j n_j = \sum_{j=1}^{6} j \frac{n_j}{N} \; ;$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{n_j}{N} = p_j \quad \Rightarrow \quad E_k = \sum_k k \; p(k)$$

Dále platí: pro funkci h(x) náhodné proměnné x na intervalu <a,b> je:

$$E_{h(x)} = \int_a^b h(x) p(x) dx$$

v případě diskrétní náhodné proměnné:

$$E_{h(k)} = \sum_k h(k) p_k$$

Speciálně je-li:

$$h(x) = \sum_l a_l g_l(x),$$

potom**:**

$$E_{h(x)} = \sum_l a_l . \langle g_l(x) \rangle$$

Definice: mějme spojitou náhodnou veličinu $\underline{x}$ na intervalu V. Potom: **n-tým momentem náhodné veličiny $\underline{x}$** nazýváme výrazy:

$$E_x^n = \int_V x^n p(x) dx = \langle x^n \rangle$$

Pro diskrétní náhodnou veličinu analogicky:

$$E_k^n = \sum_k k^n p_k = \langle k^n \rangle$$

Příklad: n = 1, $E_x^1 = \langle x \rangle = \mu$

Definice: mějme spojitou náhodnou veličinu $\underline{x}$ na intervalu V. Potom: **n-tým centrálním momentem** náhodné veličiny nazýváme výrazy:

$$cE_x^n = \int_V (x-\mu)^n p(x) dx = \langle (x-\mu)^n \rangle$$

Pro diskrétní náhodnou veličinu analogicky:

$$cE_k^n = \sum_k (k-\mu)^n p_k = \langle (k-\mu)^n \rangle$$

Příklad: n = 2,

$$cE_x^2 = \int_V (x-\mu)^2 p(x)dx = \left\langle (x-\mu)^2 \right\rangle \equiv D_x \equiv \sigma^2$$

Dále platí: $\mathbf{D_x = <x^2> - \mu^2}$

Definice: **asymetrií rozdělení** nazýváme veličinu:

$$\gamma \equiv \frac{cE_x^3}{\sigma^3} = \frac{1}{\sigma^3} \int_V (x-\mu)^3 p(x)dx = \frac{1}{\sigma^3} \left\langle (x-\mu)^3 \right\rangle$$

Příklad: Asymetrie rozdělení symetrického kolem střední hodnoty je nula (plyne přímo z definice třetího centrálního momentu).

Příklad: střední hodnota Binomického rozdělení:

$$\mu = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} k p^k (1-p)^{N-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{N!}{k!(N-k)!} k p^k (1-p)^{N-k} =$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} \frac{N!}{(l+1)!(N-l-1)!} (l+1) p^{l+1} (1-p)^{N-l-1} =$$

$$= \sum_{l=0}^{M} \frac{(M+1)!}{l!(M-l)!} p^{l+1} (1-p)^{M-l} =$$

$$= p(M+1) \sum_{l=0}^{M} \frac{M!}{l!(M-l)!} p^l (1-p)^{M-l} =$$

$$= pN \sum_{l=0}^{M} \frac{M!}{l!(M-l)!} p^l (1-p)^{M-l} = \mathrm{pN}$$

Příklad: Momenty náhodné veličiny pro některá rozdělení

Rozdělení	**Střední hodnota**	**Disperse**	**Asymetrie**
diskrétní:			
Rovnoměrné	N/2	N(N+2)/12	

Binomické	N.p	N.p.(1-p)	N.p.(1-p)(1-2p)
Poissonovo	μ	μ	$\mu^{-1/2}$

spojitá:

Rovnoměrné	b+a)/2	$(b-a)^2/12$	
Cauchyho	0	0	
Normální	μ	σ^2	0

Seminární úloha 17:
Dokažte, že pro Binomické rozdělení platí: D_k = N.p.(1-p) a γ = N.p.(1-p).(1-2p)
Poznámka: pro p = 1/2 je $\gamma = 0$ a rozdělení je symetrické kolem střední hodnoty.

Seminární úloha 18:
Dokažte, že pro Poissonovo rozdělení platí:
a) $E_k = \mu$,   b) $D_k = \mu$,   c) $\gamma = \mu^{-1/2}$

Seminární úloha19:
Dokažte, že pro Normální rozdělení platí:
a) $E_x = \mu$, b) $D_x = \sigma^2$, c) $\gamma = 0$

Návod: užijte vztahy: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$

Seminární úloha 20:
Dokažte, že při „náhodné procházce“ (random walk) platí pro střední hodnotu čtverce vzdálenosti uražené po N krocích: $<x^2> = N.L^2$, kde L je velikost jediného kroku.
(random walk - pohyb po krocích ± L se stejnou pravděpodobností p=1/2)
Návod: užijte Binomického rozdělení a definice střední hodnoty.

Semininární úloha 21:
Vypočítejte střední hodnotu a dispersi rovnoměrného, spojitého rozdělení v intervalu <a,b>.

Seminární úloha 22:
Vypočítejte střední hodnotu a dispersi rovnoměrného diskretního rozdělení v intervalu $0 \leq k \leq n$

Konvergence Binomického a Poissonova rozdělení:

1) s konstantní hodnotou p a s rostoucí střední hodnotou (rostoucím N) konverguje B(k) k N(k)

2) Poissonovo rozdělení konverguje s rostoucí střední hodnotou μ též k rozdělení Normálnímu
3) s rostoucím N, ale konstantní střední hodnotou (nepříliš vysokou) konverguje
B(k) k P(k)

5.4 Rozdělení pravděpodobnosti více náhodných veličin

Definice: Mějme dvě spojité náhodné proměnné x, y definované na intervalech V_x , V_y, s rozdělení pravděpodobnosti p(x) a q(y). Pravděpodobnost, že $x \in (x,x+dx)$ a zároveň $y \in (y,y+dy)$ je dána rozdělením $\rho(x,y)$ ve tvaru:

$$\mathbf{P(x,x+dx;\ y,y+dy) = \rho(x,y).dx.dy}$$

V případě **nezávislých veličin** je funkce $\rho(x,y)$ zřejmě ve tvaru:

$$\boldsymbol{\rho(x,y) = p(x)\ q(y)}$$

Definice: mějme spojité náhodné veličiny x, y, na intervalech V_x , V_y se středními hodnotami μ_x , μ_y . Potom **kovariance $C_{x,y}$** je dána vztahem:

$$C_{x,y} = \iint\limits_{x,y} (x-\mu_x)(y-\mu_y)\rho(x,y)dxdy = \langle (x-\mu_x)(y-\mu_y) \rangle$$

Dále vypočítáme: $\mathbf{C_{x,y} = \langle x.y \rangle - \mu_x \,.\, \mu_y}$

Příklad: $D_x = \langle (x-\mu_x).\ (x-\mu_x) \rangle = C_{x,x}$

Definice: **korelačním koeficientem** dvou náhodných veličin $r_{x,y}$ nazýváme hodnotu:

$$r_{x,y} = \frac{C_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Posouzení **stupně korelace** lineárně závislých veličin:

a) absolutní korelace (y = ax+b)

$C_{x,y} = \langle (x-\mu_x)(y-\mu_y) \rangle = \langle x.y \rangle - \mu_x \mu_y = \langle a.x^2 + b.x \rangle - \mu_x \mu_y =$

$= a \langle x^2 \rangle + b.\mu_x - \mu_x \mu_y = a.\sigma_x^2 + a.\mu_x^2 + b.\mu_x - a.\mu_x^2 - b.\mu_x = a.\sigma_x^2$

$D_y \equiv \sigma_y^2 = \langle (y-\mu_y)^2 \rangle = \langle (a.x + b - a.\mu_x - b)^2 \rangle = a^2.\langle (x-\mu_x)^2 \rangle = a^2.\sigma_x^2$

$$r_{x,y} = \frac{C_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{a.\sigma_x^2}{\sigma_x.a.\sigma_x} = 1$$

b) x, y nezávislé

$C_{x,y} = \langle (x-\mu_x)(y-\mu_y) \rangle = \langle x.y \rangle - \mu_x \mu_y = \mu_x \mu_y - \mu_x \mu_y = 0$

$$\left| r_{x,y} \right| \le 1$$

Střední hodnota součtu náhodných veličin:

Mějme náhodné veličiny $\underline{x}_i$, i=1,2,....., potom:

$$\left\langle \sum_i x_i \right\rangle = \sum_i \left\langle x_i \right\rangle$$

$$\iint\limits_{x_1, x_2, \ldots} \sum_{i=1,2,\ldots} x_i \, \rho(x_1, x_2, \ldots) dx_1 dx_2 \ldots = \sum_{i=1,2,\ldots} \iint\limits_{x_1, x_2, \ldots} x_i \rho(x_1, x_2, \ldots) dx_1 dx_2 \ldots$$

Příklad: střední hodnota aritmetického průměru –

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \ , \qquad (\bar{x} \text{ - náhodná veličina})$$

$$\left\langle \bar{x} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right\rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left\langle x_i \right\rangle$$

Jde-li o stejné veličiny: $\langle x_i \rangle = \mu$ (pro všechna $\underline{i}$).

Potom: $\langle \bar{x} \rangle = \mu$

Střední hodnot součinu nezávislých veličin:

Mějme nezávislé náhodné veličiny $\underline{x}_i$, i=1,2,..... . Potom:

$$\left\langle \prod_i x_i \right\rangle = \prod_i \left\langle x_i \right\rangle$$

$$\iint\limits_{x_1,x_2,...} \left(\prod_{i=1,2,..} x_i\right) \rho(x_1,x_2,....)dx_1 dx_2 .... = \prod_{i=1,2,..} \int\limits_{x_{i1}} x_i p(x_i) dx_i$$

Disperse součtu náhodných veličin:

Mějme náhodné veličiny x_i , i=1,2,... určené jejich dispersemi a středními hodnotami: σ_i, μ_i . Označme:

$$s = \sum_i x_i \quad .$$

Potom:

$$D_s = \sum_i D_{x_i} + \sum_{i,j(i \neq j)} C_{x_i,x_j}$$

Platí: $D_s = \langle (s - \mu_s)^2 \rangle = \langle s^2 \rangle - \mu_s^2$,

Kde: $$\mu_s = \langle s \rangle = \left\langle \sum_i x_i \right\rangle = \sum_i \langle x_i \rangle = \sum_i \mu_i$$

Dále platí: $$\langle s^2 \rangle = \left\langle \left(\sum_i x_i\right)^2 \right\rangle = \left\langle \sum_i x_i^2 + \sum_{i,j(i\neq j)} x_i x_j \right\rangle = \sum_i \langle x_i^2 \rangle + \sum_{i,j(i\neq j)} \langle x_i x_j \rangle \quad ,$$

a také: $$D_{x_i} = \langle (x_i - \mu_i)^2 \rangle = \langle x_i^2 \rangle - \mu_i^2$$

$$C_{x_i,x_j} = \langle (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \rangle = \langle x_i x_j \rangle - \mu_i \mu_j$$

Dále: $$\mu_s^2 = \sum_i \mu_i^2 + \sum_{i,j(i\neq j)} \mu_i \mu_j$$

Celkem:

$$D_s = \sum_i D_{xi} + \sum_i \mu_i^2 + \sum_{i,j} C_{xi,xj} + \sum_{i,j(i\neq j)} \mu_i \mu_j - \sum_i \mu_i^2 - \sum_{i,j(i\neq j)} \mu_i \mu_j$$

$$D_s = \sum_i D_{xi} + \sum_{i,j} C_{xi,xj}$$

Poznámka: V případě, že veličiny x_i jsou nezávislé (pro všechna i), tedy $C_{xi,xj} = 0$ pro všechna (i,j= 1,2,..), potom:

$$D_s = \sum_i D_{x_i}$$

Disperse lineární kombinace nezávislých veličin:

Mějme **nezávislé** náhodné veličiny x_i , i=1,2,... určené jejich dispersemi a středními hodnotami: σ_i , μ_i . Označme s jejich lineární kombinaci :

$$s = \sum_i a_i x_i \quad .$$

Potom disperse D_s náhodné veličiny s je rovna:

$$D_s = \sum_i a_i^2 D_{x_i} = \sum_i a_i^2 \sigma_i^2$$

Příklad: Stanovte dispersi aritmetického průměru n nezávislých opakování téže veličiny o střední hodnotě μ a dispersi D_x .

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,, \quad \langle x_i \rangle = \mu \,, \qquad D_{xi} = D \equiv \sigma^2 \,, \ (i=1,2,...,n)$$

$$\langle \bar{x} \rangle = \mu \,, \quad D_{\bar{x}} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D = \frac{1}{n} D = \frac{\sigma^2}{n}$$

5.5. Centrální limitní věta

Je-li náhodná veličina x popsána rozdělením p(x) se střední hodnotou μ a konečnou dispersí D_x :

$$x \equiv p_{\mu,\sigma}(x),$$

potom se rozdělení pravděpodobnosti aritmetického průměru n nezávislých opakování

$q_{\mu',\sigma'}(\bar{x}_n)$ s rostoucím n blíží k Normálnímu rozdělení $N(\bar{x}_n)$ se střední hodnotou μ a dispersí $\frac{D_x}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} q_{\mu',\sigma'}(\bar{x}_n) = N_{\mu,\frac{D_x}{n}}(\bar{x}_n)$$

Poznámka: **na typu rozdělení p(x) nezáleží** !!

Příklad: ukázka možnosti sestrojení generátoru náhodných čísel s normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a jednotkovou dispersí

N(0,1), je-li k disposici generátor náhodných čísel s rovnoměrným rozdělením v intervalu <a,b>.

1) posuneme interval symetricky kolem nuly, odečtením čísla (a+b)/2. Nový interval hodnot je potom: $<(a-b)/2,(b-a)/2> = <-A,+A>$
2) disperse takového rovnoměrného rozdělení je: $D_x = (A -(-A)) /12 = (2A)^2/12$
3) disperse aritmetického průměru z N-hodnot je: $D_x = (2A) /12.N$

Zvolíme-li tedy N=12 a A=6, dostaneme: $D_x = 1$

6. Princip maximální pravděpodobnosti

Ze všech možných hodnot náhodné veličiny se realizuje hodnota nejpravděpodobnější

6.1. Odhad parametrů rozdělení

a) Binomické rozdělení - odhad parametru p*:*

$$B_k^N = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

Pravděpodobnost **p chápeme nyní jako proměnnou** a hledáme maximum pravděpodobnosti jako funkce p. Nutnou podmínkou pro maximum je:

$$\left(\frac{dB_k^N}{dp} \right)_{\tilde{p}} = 0$$

$$\left(\frac{dB_k^N}{dp} \right)_{\tilde{p}} = \binom{N}{k} k \tilde{p}^{k-1} (1-\tilde{p})^{N-k} - (N-k) \binom{N}{k} \tilde{p}^k (1-\tilde{p})^{N-k-1} = 0$$

$$k(1-\tilde{p}) = (N-k)\tilde{p} \quad \Rightarrow \quad \tilde{p} = \frac{k}{N}$$

při N nezávislých opakováních experimentu se určitý jev realizuje k-krát. Na základě principu maximální pravděpodobnosti potom odhadneme pravděpodobnost tohoto jevu jako:

$$\tilde{p} = \frac{k}{N}$$

b) Poissonovo rozdělení - odhad parametru μ:

$$P(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

Podmínkou maxima pravděpodobnosti je:
je-li například na jedné tiskové straně nalezeno k chyb, odhadneme parametr μ touto hodnotou k.

c) Normální rozdělení - odhad parametru μ :

$$N_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Podmínkou maxima pravděpodobnosti je opět:

$$0 = \left(\frac{dN_{\mu,\sigma})}{d\mu}\right)_{\tilde{\mu},\tilde{\sigma}} = -2(x-\tilde{\mu})\frac{1}{\tilde{\sigma}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\tilde{\mu})^2}{2\tilde{\sigma}^2}} \Rightarrow \tilde{\mu} = x$$

Naměříme-li při jediném experimentu se spojitou náhodnou proměnnou, která popsána Normálním rozdělením, hodnotu x, odhadneme parametr μ touto hodnotou x. Odhad na hodnotě σ nezávisí.

odhad parametru σ:

$$0 = \left(\frac{dN_{\mu,\sigma}(x)}{d\sigma}\right)_{\tilde{\mu},\tilde{\sigma}} = 2\frac{(x-\tilde{\mu})^2}{2\tilde{\sigma}^3}\frac{1}{\tilde{\sigma}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\tilde{\mu})^2}{2\tilde{\sigma}^2}} - \frac{1}{\tilde{\sigma}^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2\tilde{\mu})^2}{2\tilde{\sigma}^2}} \Rightarrow \tilde{\sigma}^2 = (x-\tilde{\mu})^2$$

Vzhledem k tomu, že neznáme hodnotu $\tilde{\mu}$ nelze parametr $\tilde{\sigma}$ z jediného měření odhadnout. Je nutno nejméně z jednoho dalšího měření odhadnout $\tilde{\mu}$ a potom. Metoda odhadu parametrů rozdělení z jediného měření je zřejmě velice nejistá (parametry jsou stanoveny na „nízké hladině pravděpodobnosti“, jsou málo reprodukovatelné). Zlepšení lze očekávat využitím opakovaných nezávislých experimentů.

Odhad parametrů rozdělení na základě výsledků opakovaných nezávislých experimentů - aritmetický průměr, disperse náhodné veličiny.

a) Normální rozdělení - odhad parametru μ:

Mějme výsledky opakovaných nezávislých experimentů x_i, i=1,.., n. Hustota pravděpodobnosti realisace takovéto n-tice výsledků je:

$$P_{\mu,\sigma}(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Pro odhad opět požadujeme, aby:

$$0=\left(\frac{dP_{\mu,\sigma}(x_1,x_2,\dots x_n)}{d\mu}\right)_{\widetilde{\mu},\widetilde{\sigma}}=\left(\frac{1}{\widetilde{\sigma}\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\widetilde{\mu})^2}{2\widetilde{\sigma}^2}}\left(2\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\widetilde{\mu})}{2\widetilde{\sigma}^2}\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n}(x_i-\widetilde{\mu})=0\ \Rightarrow\ \widetilde{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

Aritmetický průměr je tedy odhadem střední hodnoty podle principu maximální pravděpodobnosti. Podmínka extrému na hodnotě $\widetilde{\sigma}$ nezáleží.

b) Normální rozdělení - odhad disperse:

obdobným postupem jako výše s využitím principu maximální pravděpodobnosti dostaneme:

$$\left(\frac{dP_{\mu,\sigma}(x_1,x_2,\dots x_n)}{d\sigma}\right)_{\widetilde{\mu},\widetilde{\sigma}}=0\ \Rightarrow\ \widetilde{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\widetilde{\mu})^2$$

Odhadem disperse je tedy střední hodnota čtverce odchylek od odhadu střední hodnoty $\widetilde{\mu}$. Pro konkrétní výpočet musíme vždy nejprve odhadnout střední hodnotu $\widetilde{\mu}$**.**

Seminární úloha 23.
Odvoďte výše uvedený vztah pro odhad disperse normálního rozdělení.

Seminární úloha 24.
Dokažte, že v případě Binomického rozdělení je při n-násobném nezávislém opakování experimentu odhadem parametru p (pravděpodobnost) veličina:

$$\widetilde{p}\ =\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{N},$$

kde k_i je počet pozitivních výsledků při každém z n opakování.

Seminární úloha 25.
Dokažte, že při n-násobném nezávislém opakování experimentu je podle principu maximální pravděpodobnosti v případě Poissonova rozdělení odhadem parametru $\widetilde{\mu}$ veličina:

$$\widetilde{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}k_i$$

Poznámka: Alternativně k principu maximální pravděpodobnosti lze odhad střední hodnoty provést pomocí t.zv. principu nejmenších čtverců. Zde hledáme odhad střední hodnoty na základě požadavku minima sumy čtverců odchylek:

Příklad: Při n-násobném nezávislém opakování experimentu byly nalezeny hodnoty proměnné x_i , (i=1,....,n). Odhadněte střední hodnotu podle principu nejmenších čtverců.

Označme : $S^2(\mu) \equiv \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$.

Potom minimu funkce $S^2(\mu)$ odpovídá hodnota $\tilde{\mu}$, pro kterou platí:

$$0 = \left(\frac{dS^2(\mu)}{d\mu}\right)_{\mu=\tilde{\mu}} = 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{\mu}) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

6.3. Vychýlený odhad.

Definice: Je-li $\tilde{a}$ odhadem parametru a danného rozdělení a je-li $\langle \tilde{a} \rangle = a$, potom hovoříme o **nevychýleném odhadu**. V opačném případě je odhad vychýlený.

a) aritmetický průměr:

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$\tilde{\mu}$ je **náhodná veličina**, proto má smysl počítat její střední hodnotu:

$$\langle \tilde{\mu} \rangle = \left\langle \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \right\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \langle x_i \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \langle \mu \rangle = \mu ,$$

protože $<\mu_i> = \mu$ pro všechna měření (nezávislá opakování).

Aritmetický průměr je tedy nevychýleným odhadem střední hodnoty.

b) disperse*:* odhad disperse:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{\mu})^2$$

je opět náhodnou veličinou a pro její střední hodnotu platí (Sem. úloha 27):

$$\left\langle \tilde{\sigma}^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{\mu})^2 \right\rangle = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

Odhad disperse je tedy odhadem vychýleným.

Seminární úloha 26.
Ukažte, že výše uvedené odhady parametrů $\tilde{p}$ a $\tilde{\mu}$ pro binomické, a Poissonovo rozdělení jsou odhady nevychýlené.

Seminární úloha 27.
Ukažte výše uvedený výsledek pro střední hodnotu odhadu disperse $\tilde{\sigma}^2$.

Nevychýleným odhadem disperse je veličina:

$$\left(\tilde{\sigma}^2\right)^* = \frac{n}{n-1}\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{\mu})^2$$

protože zřejmě platí:

$$\left\langle \left(\tilde{\sigma}^2\right)^* \right\rangle = \frac{n}{n-1}\left\langle \tilde{\sigma}^2 \right\rangle = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

6.4. Zpracování výsledku měření jediné veličiny:

a) Je-li k dispozici statistický soubor dat (výsledky n opakovaných nezávislých
měření), vyhodnotíme veličiny

$$(\tilde{\mu})^* = \tilde{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\ , \quad \left(\tilde{\sigma}^2\right)^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{\mu})^2\ .$$

Z naměřených hodnot x_i vyřadíme všechny, pro které je:

$$\left|x_i - \tilde{\mu}\right| \geq 3\tilde{\sigma}^*$$

a zopakujeme výpočet odhadů střední hodnoty $\tilde{\mu}$ a standartní odchylky $\tilde{\sigma}^*$.

b) Je-li k dispozici údaj o přesnosti měřidla (např. třída přesnosti) na jehož základě je možno vyhodnotit chybu jediného měření, považujeme tuto chybu za odhad rozptylu $\boldsymbol{\sigma_{odh}}$.
Stanovíme-li chybu měření odhadem, považujeme tento odhad za chybu na hladině $\boldsymbol{3\sigma_{odh}}$.

c) Spojíme oba výsledky:

$$\sigma^2_{cel} = \left(\tilde{\sigma}^2\right)^* + \sigma^2_{odh}$$

Výsledek měření zapíšeme ve tvaru:

$$X = \left(\tilde{\mu} \pm \sigma_{cel}\right)[X]$$

popř.:

$$X = \left(\tilde{\mu} \pm \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma_{cel}\right)[X]$$

kde chyba má nyní význam chyby aritmetického průměru.

Pozor na rozdílný **fyzikální význam** obou zápisů: **Disperse jediného měření** odhaduje šířku rozdělení pravděpodobnosti, kterou bychom testovali opakovaným měřením veličiny x.
Disperse aritmetického průměru odhaduje šířku rozdělení náhodné veličiny, kterou bychom testovali opakovaným měřením aritmetických průměrů (z opakovaných nezávislých měření).

6.5. Přenos chyb.

Mějme **náhodnou veličinu y** , která je funkcí náhodných proměnných x_i (i=1,2,...,n):

$$y \equiv f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$$

Náhodné veličiny $\mathbf{x_i}$ nechť jsou popsány rozděleními $\mathbf{p_i(x_i)}$ se středními hodnotami $\boldsymbol{\mu_i}$ a dispersemi $\boldsymbol{\sigma^2_i}$.
V malém okolí bodu $\boldsymbol{\mu \equiv f(\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots, \mu_n)}$ je možno rozvést funkci $\mathbf{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ v řadu:

$$y = f(\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots, \mu_n) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{(\mu_1, \ldots, \mu_n)} (x_i - \mu_i) + \ldots\ldots$$

Potom je zřejmě:

$$\mu_y \equiv \langle y \rangle = f(\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots, \mu_n)$$

a dále:

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2_{(\mu_1, \ldots, \mu_n)} \sigma_{x_i}^2 \quad ,$$

protože disperse konstanty je nula.

6.6. Zpracování výsledků nepřímých měření

Máme-li k dispozici **odhady středních hodnot a disperzí** jednotlivých veličin $\mathbf{x_i}$, tedy hodnoty $\tilde{\mu}_i$ a $\left(\tilde{\sigma}_{x_i}^2\right)^*$ stanovené měřením jednotlivých veličin, je možno použít výše uvedený vztahy k odhadu střední hodnoty a disperze veličiny **y :**

$$\tilde{\mu}_y = f(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \ldots\ldots, \tilde{\mu}_n)$$

$$\left(\tilde{\sigma}_y^2\right)^* = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2_{(\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_n)} \left(\tilde{\sigma}_{x_i}^2\right)^*$$

Příklad: Měříme hustotu látky měřením objemu a hmotnosti daného množství. Hustotu stanovíme ze vztahu: ρ = m / V .

Výsledky měření: m = (7.8594 ± 0.0003) kg

V = (1.0012 ± 0.0002) 10^{-3} m^3

Výpočet hustoty: $\tilde{\rho} = 7.849980024 \,.10^3 \quad kgm^{-3}$

Chyba měření:

$$\tilde{\sigma}_\rho^2 = \left(\frac{\partial \rho}{\partial m} \right)^2_{\tilde{m}, \tilde{V}} \tilde{\sigma}_m^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial V} \right)^2_{\tilde{m}, \tilde{V}} \tilde{\sigma}_V^2 =$$

$$= \frac{1}{\widetilde{V}^2}\widetilde{\sigma}_m^2 + \frac{\widetilde{m}^2}{\widetilde{V}^4}\widetilde{\sigma}_V^2$$

$$\widetilde{\eta}_\rho^2 = \frac{\widetilde{\sigma}_\rho^2}{\widetilde{\rho}^2} = \frac{\widetilde{\sigma}_m^2}{\widetilde{m}^2} + \frac{\widetilde{\sigma}_V^2}{\widetilde{V}^2} = \widetilde{\eta}_m^2 + \widetilde{\eta}_V^2$$

Výpočet chyby: $\widetilde{\sigma}_\rho^2 = 2.546889874 \quad kg^2 m^{-6}$

$\widetilde{\sigma}_\rho = 1.595897827 \quad kg \ m^{-3}$

Zaokrouhlíme: $\widetilde{\sigma}_\rho = 1.6 \ kg \ m^{-3}$

$\widetilde{\rho} = 7.8500 \,.10^3 \quad kgm^{-3}$

Výsledek: $\widetilde{\rho} = (7.8500 \pm 0.0016) \,.10^3 \quad kgm^{-3}$

$\eta_\rho \cong 2.10^{-4}$, chyba vážení je zanedbatelná !!!!!!

Příklad: Měříme modul pružnosti ve smyku metodou torsního kyvadla realizovaného masivní tyčkou zavěšenou na měřeném vlákně. Měření provádíme v uspořádání podle obrázku. Pro modul pružnosti ve smyku G materiálu závěsného vlákna platí (viz např. J.Brož: Základy fyz. měření):

$$G = \frac{8\pi J l}{r^4 T^2}$$

kde l je délka vlákna, J je moment setrvačnosti tyčky podle osy otáčení (kolmé k ose tyčky), r je poloměr vlákna a T je doba kmitu kyvadla.
Nezávislými měřeními stanovíme hodnoty veličin l, J, r, T:

a) délku závěsu měříme kovovým měřítkem a naměříme l= 500mm. Uvážením okolností měření (nejasný bod upnutí, napnutí vlákna, přesnost měřítka, odhadneme přesnost měření na hladině 3σ na hodnotu 3 mm.
   Výsledek: l = (500 + 1). 10^{-3} m

b) moment setrvačnosti tyčky J stanovíme podle vztahu:

$$J = \frac{1}{12.mL^2}$$

   kde m je její hmotnost a L její délka. Hmotnost je stanovena: m = (122.9 + 0.1) 10^{-3} kg.
   Délku měříme posuvným měřítkem a naměřené hodnoty:

Číslo	1	2	3	4	5

měření					
L (mm)	200.1	200.1	200.0	200.0	200.0

Podle vztahu: $\widetilde{L} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} L_i$ stanovíme: $\widetilde{L} = 200.04\ mm$

Podle vztahu: $\left(\widetilde{\sigma}^2\right)^* = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}\left(L_i - 200.04\right)^2 = 0.003675\ mm^2$

Potom: $\widetilde{\sigma}^* = 0.060621\ mm$, zaokrouhlíme!!! $\widetilde{\sigma}^* = 0.06\ mm$

Odhadneme přesnost měřidla na úrovni 3σ = ± 0.05 mm.

Spojíme oba výsledky:

$$\left(\widetilde{\sigma}_L^2\right)^*_{cel} = \left(\widetilde{\sigma}^2\right)^*_{stat} + \sigma^2_{odh} = 0.0039527 mm^2 \rightarrow \left(\widetilde{\sigma}_L\right)^*_{cel} = 0.062871 mm$$

po zaokrouhlení !!!! $\left(\widetilde{\sigma}_L\right)^*_{cel} = 0.06 mm$

Celková chyba měření není tedy chybou měřidla ovlivněna:

Výsledek: L = (200.04 + 0.06).10^{-3} m

Dosazením do výrazu pro moment setrvačnosti dostaneme:
J = 4.0983.10^{-4} kgm^2 .
Podle vztahu pro přenos chyby sečteme čtverce relativních chyb:

$$\left(\widetilde{\eta}_J^2\right)^* = \frac{\left(\widetilde{\sigma}_m^2\right)^*}{\widetilde{m}^2} + 4\frac{\left(\widetilde{\sigma}_L^2\right)^*}{\widetilde{L}^2}$$

Dostaneme:

$$\left(\widetilde{\eta}_J^2\right)^* = 1.0219.10^{-6} \rightarrow \left(\widetilde{\eta}_J\right)^* = 1.0108.10^{-3}$$

Odtud: $$\left(\widetilde{\sigma}_J\right)^* = 4.1425.10^{-7}$$

zaokrouhlíme: $$\widetilde{\sigma}_J^* = 4.10^{-7} kgm^2$$

Výsledek: J = (4.098 + 0.004).10^{-7} kgm^2

c) dobu kmitu měříme stopkami s odhadnutou relativní přesností 3.$\eta_{T,odh}$ = 1.10^{-3} .
Naměříme následující hodnoty pro 10 kmitů:

č.měř.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T (sec)	61.2	61.0	62.2	61.3	62.6	62.1	61.0	61.8	61.8	62.4

Najdeme:

$$\widetilde{T} = 6.174\sec, \left(\widetilde{\sigma}_T^2\right)^*_{stat} = 0.0033133\sec^2 \rightarrow \widetilde{\sigma}^*_{T,stat} = 0.06\sec$$

Z výše provedeného odhadu: $\widetilde{\sigma}_{T,odh} = 2.10^{-3}\sec$. Je tedy zřejmé, že

$$\left(\widetilde{\sigma}^2_{T,cel}\right)^* = \left(\widetilde{\sigma}^2_{T,stat}\right) \rightarrow \widetilde{\sigma}^*_{T,cel} = 0.06\sec$$

Výsledek: T = (6.17 ± 0.06) sec

d) poloměr vlákna je zadán výrobcem ve tvaru:
r = (0.207 + 0.003) mm ⇒ r = (2.07 + 0.03).10^{-3} m

e) nyní můžeme dosadit do vztahu pro hledaný modul: Najdeme:

$$\widetilde{G} = 7.3676.10^8\, kgm^{-1}\sec^{-2}$$

f) pro relativní chybu měření platí:

$$\left(\widetilde{\eta}_G^2\right)^* = \left(\widetilde{\eta}_l^2\right)^* + \left(\widetilde{\eta}_J^2\right)^* + 4.\left(\widetilde{\eta}_T^2\right)^* + 16.\left(\widetilde{\eta}_r^2\right)^*$$

dále:

$$\left(\widetilde{\eta}_l^2\right)^* = 4.10^{-6}, \left(\widetilde{\eta}_J^2\right)^* = 1.10^{-6}, \left(\widetilde{\eta}_T^2\right)^* = 1.10^{-4}, \left(\widetilde{\eta}_r^2\right)^* = 2.25.10^{-4}$$

Potom:

$$\left(\widetilde{\eta}_G^2\right)^* = (4+1+400+3600).10^{-6} = 4005.10^{-6} \rightarrow$$

$$\widetilde{\eta}^*_G = 6.10^{-2} \rightarrow \widetilde{\sigma}^*_G = 4.4205.10^7\, kgm^{-1}\sec^{-2}$$

Po zaokrouhlení:

$$\widetilde{\sigma}^*_G = 4.10^7\, kgm^{-1}\sec^{-2}$$

Výsledek: G = (7.4 + 0.4).10^8 $kgm^{-1}sec^{-2}$

Poznámka: Z výše uvedeného je zřejmé, že slabým místem experimentu je nízká přesnost stanovení poloměru vlákna. Chceme-li proto užít této metody pro stanovení modulu pružnosti s vyšší přesností, je třeba uvažovat například o užití vlákna o větším poloměru, a současně zajistit dostatečnou přesnost měření doby kmitu, která se bude s rostoucím poloměrem vlákna zkracovat.

7. Metoda nejmenších čtverců

Je-li znám **explicitně tvar měřené závislosti**, používá se obvykle pro interpolaci naměřené závislosti metody nejmenších čtverců.

Teoretická závislost nechť má tvar:

$$y = f_{a,b,c,...}(x)$$

kde a,b,c,.. jsou parametry.
Mějme k disposici **n dvojic naměřených hodnot (x_i ,y_i), i=1,2,..,n.**
Předpokládáme, že přesnost nastavení hodnot nezávisle proměnné x_i je řádově větší, než přesnost měření závisle proměnné y_i , která má obecně pro každý bod jinou dispersi (σ_y^2).
Vytvoříme veličinu:

$$S^2(a,b,c,...) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(f_{a,b,c,...}(x_i) - y_i)^2}{\sigma_i^2}$$

Funkce, která optimálně interpoluje měřenou závislost, je taková, pro kterou je hodnot S^2(a,b,c,..) minimální.
Úloha teda spočívá v nalezení minima funkce proměnných a,b,c, ... Pro větší počet parametrů a složitější funkce se řeší numericky.

7.1. Polynom k-tého stupně:

Pro polynom:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...+ a_k x^k$$

je S^2 funkcí k+1 parametrů a_i , i=1,2,...,k.

Podmínkou minima je současné splnění podmínek:

$$\left(\frac{\partial S^2(a_0, a_1, ..., a_k)}{\partial a_i} \right)_{a_i = \tilde{a}_i} = 0 ,$$

kde i= 0,1,2,...,k, což znamená soustavu k+1 rovnic o k+1 neznámých a_i .

Nechť pro jednoduchost je $\sigma_i^2 = \sigma^2$ pro všechna i = 0,1,2,...,k, což je dosti častý praktický případ. Potom z podmínek nulových derivací plyne:

$$\tilde{a}_0 . n \quad + \tilde{a}_1 \sum_{I=1}^{n} x_i + ... + \tilde{a}_k \sum_{i=1}^{n} x_i^k = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\tilde{a}_0 . \sum_{i=1}^{n} x_i + \tilde{a}_1 \sum_{I=1}^{n} x_i^2 + \ldots\ldots + \tilde{a}_k \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$$

....

....

$$\tilde{a}_0 . \sum_{i=1}^{n} x_i^k + \tilde{a}_1 \sum_{I=1}^{n} x_i^{k+1} + \ldots\ldots + \tilde{a}_k \sum_{i=1}^{n} x_i^{2k} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^k$$

Jednotlivé koeficienty získáme řešením soustavy rovnic.
Je známo, že platí:

$$\tilde{a}_i = \frac{Det_i}{Det_s}$$

kde Det_s **je** determinant soustavy a $\mathrm{Det}_\mathbf{i}$ je determinant soustavy s i-tým sloupcem nahrazeným sloupcem pravých stran.

a) speciální případ lineární funkce (y = ax):

$$S^2(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(ax_i - y_i)^2}{\sigma_i^2}$$

Potom:

$$\tilde{a} \sum_{I=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i x_i}{\sigma_i^2}$$

Odtud:

$$\tilde{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}}$$

Jsou-li $\sigma_i = \sigma$ pro všechna i = 1,...,n , potom:

$$\tilde{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Označme dále:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = Y, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = XY, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = X, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = XX, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = YY$$

potom:

$$\tilde{a} = \frac{XY}{XX}$$

Odhad $\tilde{a}$ **je nevychýlený**, protože platí:

$$\langle \tilde{a} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{XX} \langle y_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{XX} a x_i = a$$

Toto je obecná vlastnost odhadů metodou nejmenších čtverců.

Disperse odhadu $\tilde{a}$:

Odhad $\tilde{a}$ je náhodná veličina, kterou lze za předpokladů uvedených výše vyjádřit ve tvaru:

$$\tilde{a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{XX} y_i$$

tedy ve tvaru lineární kombinace náhodných veličin y_i s koeficienty $\frac{x_i}{XX}$.

Podle věty o dispersi lineární kombinace nezávislých veličin platí:

$$\sigma_{\tilde{a}}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{XX} \right)^2 \sigma_{y_i}^2$$

Jsou-li veličiny: $\sigma_{y_i}^2$ známé a stejné pro všechna i, $\sigma_{y_i}^2 = \sigma^2$, pro i=1,...,n (všechny body jsou měřeny se stejnou přesností), potom:

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{a}}^2 = \frac{\tilde{\sigma}^2}{XX}$$

Není-li hodnota $\tilde{\sigma}^2$ známá, lze ji odhadnout ze souboru naměřených hodnot (x_i ,y_i). V analogii s případem jedné proměnné odhadneme:

$$\widetilde{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(y_i - \widetilde{a} x_i\right)^2}{n} \equiv \frac{R_1^2}{n}$$

kde R_1^2 je zbytková suma čtverců odchylek. Opět lze ukázat (viz seminární úlohy), že odhad je vychýlený:
Pro nevychýlený odhad volíme hodnotu:

$$\left(\widetilde{\sigma}_1^2\right)^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(y_i - \widetilde{a} x_i\right)^2}{n-1} \equiv \frac{R_1^2}{n-1}$$

Označíme-li počet parametrů úlohy jako počet stupňů volnosti, je výše diskutovaný případ případem s jediným stupněm volnosti. V obecném případě s p-stupni volnosti platí:

$$\widetilde{\sigma}_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(y_i - a x_i\right)^2}{n-p} \equiv \frac{R_p^2}{n-p}$$

b) obecná přímka $y = a_0 + a_1 x$:

Determinant soustavy rovnic m tvar:

$$Det_s = \begin{vmatrix} n & X \\ X & XX \end{vmatrix} = n.XX - X^2$$

Ostatní determinanty potřebné pro výpočet koeficientů a_0 a a_1 jsou potom:

$$Det_0 = Y.XX - X.XY, \quad Det_1 = n.XY - X.Y$$

Potom:

$$\widetilde{a}_0 = \frac{Y.XX - X.XY}{n.XX - X^2}, \quad \widetilde{a}_1 = \frac{n.XY - X.Y}{n.XX - X^2}$$

Veličiny X a XX lze chápat jako konstanty (náhodnými proměnnými jsou pouze hodnoty y_i).
V tomto případě lze opět výrazy pro $\widetilde{a}_0$ a $\widetilde{a}_1$ přepsat jako lineární kombinace náhodných proměnných y_i a pro jejich dispersi použít větu o dispersi lineární kombinace náhodných proměnných:

$$\widetilde{a}_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n.XX - X^2}\left(XX.y_i - X.x_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{XX - X.x_i}{n.XX - X^2} y_i$$

$$\sigma_{\tilde{a}_0}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{XX - X.x_i}{n.XX - X^2} \right)^2 \sigma_i^2$$

pokud je opět: $\sigma_i^2 = \sigma^2$ pro všechna i = 1,.....,n (všechna měření jsou stejně přesná), je možno snadno ukázat:

$$\sigma_{\tilde{a}_0}^2 = \frac{XX}{n.XX - X^2} \sigma^2$$

odhad veličiny σ^2 provedeme opět pomocí výše uvedeného vztahu pro p=2:

$$\left(\tilde{\sigma}_2{}^2 \right)^* = \frac{R_2^2}{n-2}$$

S trochou trpělivosti je možno i v tomto případě ukázat, že platí (viz. seminární úlohu 28):

$$\left\langle \left(\tilde{\sigma}_2^2 \right)^* \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(y_i - \tilde{a} - \tilde{b} x_i \right)^2}{n-2} \right\rangle \equiv \left\langle \frac{R_2^2}{n-2} \right\rangle = \sigma^2 \qquad (***)$$

Seminární úloha 28: Dokažte výše uvedený vztah (***):Celkově je tedy:

$$\left(\tilde{\sigma}_{\tilde{a}_0}^2 \right)^* = \frac{XX}{n.XX - X^2} \frac{R_2^2}{n-2}$$

Pro odhad chyby koeficientu a_1 dostaneme obdobně:

$$\tilde{a}_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n.XX - X^2} \left(n.x_i y_i - X.y_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n.x_i - X}{n.XX - X^2} y_i$$

a dále:

$$\sigma_{\tilde{a}_1}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n.x_i - X}{n.XX - X^2} \right)^2 \sigma_i^2$$

pro $\sigma_i^2 = \sigma^2$ pro všecha i =1, ... , n potom dostaneme:

$$\sigma^2_{\tilde{a}_1} = \frac{n}{n.XX - X^2}\sigma^2$$

Odhadneme-li opět veličinu σ^2 jako výše:

$$\left(\tilde{\sigma}^2_{\tilde{a}_1}\right)^* = \frac{n}{n.XX - X^2}\frac{R_2^2}{n-2}$$

Tímto způsobem lze v případě platnosti výše uvedených předpokladů (což je častý případ) odhadnout regresní koeficienty a_0 a a_1 a stanovit chybu těchto odhadů.
Pro případ většího počtu parametrů nelze použít výše uvedené linearizační postupy. Problém stanovení chyby parametrů interpolační funkce je nutno řešit obecnějšími metodami matematické statistiky, které přesahují rámec úvodního kursu.
V případě obecnějších funkcí se dvěma parametry se často používá převedení na lineární problém **pomocí transformace souřadnic**. V tomto případě však již nemusí být splněna podmínka o stejné přesnosti měřených bodů a je nutno použít obecných, výše uvedených formulí.

Příklad: Funkci y = a.exp(bx) lze logaritmováním převést lineární závislost typu:
$Y \equiv \ln(y) = \ln(a) + bx = A + bx$.
Jsou-li ve všech měřených bodech hodnoty $\sigma_y^2 = \sigma$ stejné, tedy nezávislé na y , jsou hodnoty $\sigma_Y^2 \equiv \sigma_{\ln y}^2$ na y závislé, tedy pro různá y_i různé.

7.2. Obecnější postup pro funkce více parametrů

a) přímka procházející počátkem

definujme funkci: $S^2(a) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i)^2 = YY - 2aXY + a^2XX$

Potom: $S^2(\tilde{a}) \equiv R_1^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \tilde{a}x_i)^2 = YY - 2\tilde{a}XY + \tilde{a}^2XX$

Dosadíme za: $\tilde{a} = \frac{XY}{XX}$

a výsledek:

$$R_1^2 = YY - \frac{XY^2}{XX} \quad \rightarrow \quad \tilde{\sigma}_{\tilde{a}}^2 = \frac{1}{XX.(n-1)}\left(YY - \frac{XY^2}{XX}\right)$$

Vypočítáme dále:

$$S^2\left(\tilde{a} + \tilde{\sigma}_{\tilde{a}}\right) = R_1^2 + \frac{R_1^2}{n-1}$$

Zavedeme redukovanou sumu čtverců odchylek:

$$S_{red}^2(a) = \frac{S^2(a)}{R_1^2}$$

Tato funkce má **minimum v bodě** $\tilde{a}$ **s amplitudou** $\mathbf{S_{red}^2(\tilde{a}) = 1}$ a v bodě $\tilde{a} \pm \tilde{\sigma}_{\tilde{a}}$ má amplitudu:

$$S_{red}^2\left(\tilde{a} \pm \tilde{\sigma}_{\tilde{a}}\right) = 1 + \frac{1}{n-1}$$

Chybu odhadu parametru a je tedy možné stanovit také tak, že na závislosti $S_{red}^2(a)$ najdeme body:

$$\tilde{a} \pm \tilde{\sigma}_{\tilde{a}} \, ,$$

ve kterých má funkce $S_{red}^2(a)$ amplitudu: $1 + \dfrac{1}{n-1}$.

Tento postup se užívá i pro funkce více parametrů (více stupňů volnosti).

b) Zobecnění:

Při p parametrech $\mathbf{a_i}$ (i=1, ... , p) vypočítáme postupně závislosti $S_{red}^2(a_i)$.
Na každé takové závislosti najdeme intervaly:

$$\tilde{a}_i \pm \tilde{\sigma}_{\tilde{a}_i}$$

nalezením bodů s amplitudou: $1 + \dfrac{1}{n-p}$.

Intuitivní názor na oprávněnost takového postupu vyplývá z analogie předvedené výše pro jediný parametr.