6. Studium kmitů matematického kyvadla

Matematickým kyvadlem rozumíme těleso zanedbatelných rozměrů zavěšené na nehmotném vlákně (dostatečně dlouhém oproti rozměru zavěšeného tělesa). V nejjednodušším případě pro dobu kmitu platí:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{31}$$

kde g značí hodnotu místního tíhového zrychlení a l délku vlákna.

ÚKOLY:

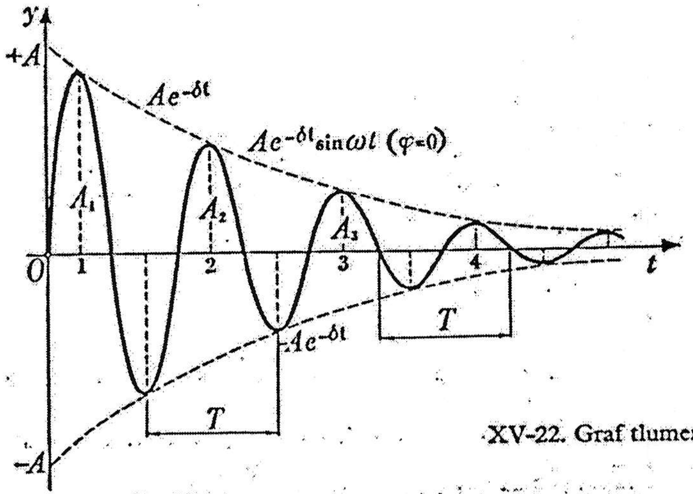
1. Stanovit hodnotu místního tíhového zrychlení pomocí matematického kyvadla.
2. Určit závislost doby kmitu matematického kyvadla na délce závěsu.
3. Změřit koeficient útlumu.
4. Odvodit vztah pro dobu kmitu matematického kyvadla.

POSTUP:

- Co nejpřesněji určíme délku matematického kyvadla, v našem případě to bude součet délky závěsu a poloměru zavěšené kuličky. Potom změříme dobu kmitu kyvadla omezovací nebo postupnou metodou. Postupně zkracujeme délku závěsu, vždy asi o 10cm. Ke každé nastavené délce měříme příslušnou dobu kmitu. Použitím vztahu pro dobu kmitu matematického kyvadla lze stanovit přibližnou hodnotu místního gravitačního zrychlení.
- Vypočítáme logaritmy dvojic hodnot $[l_i, T_i]$ a sestrojíme graf. V případě, že tyto body určují přímku, odečteme velikost její směrnice a srovnáme s teorií.
- Sestavíme matematické kyvadlo tak, abychom na délkovém měřidle umístěném za kyvadlem mohli odečítat amplitudu kmitu (tj. tak ,aby vlákno ve svislé poloze procházelo zvoleným počátkem stupnice). Vychýlíme kyvadlo a zaznačíme si počáteční amplitudu A_o. Uvolníme kyvadlo a počítáme jeho kmity. Po vykonání každého $j-$ tého ($j = 10, 20, ..., 100$) kmitu zaznačíme velikost amplitudy A_j. To provedeme pro několik délek závěsu. Naměřené hodnoty zobrazíme v souřadnicovém sysytému x, y, nejlépe takto $x = j \cdot T$ a $y = ln\frac{A_o}{A_j}$. Z teorie plyne, že grafem by měla být přímka, určíme fyzikální význam této směrnice a její rozměr.

Srovnáme-li rovnici (XV-51) s rovnicí harmonického pohybu (XV-4), je zřejmý význam faktoru $A\,e^{-\delta t}$; je to *amplituda kmitavého pohybu*, která klesá s rostoucím časem. *Součinitel tlumení* δ má stejný rozměr jako úhlová frekvence, s^{-1}. Tlumení pohybu je tím rychlejší, čím větší je δ, tj. čím větší je koeficient odporu nebo čím menší je hmotnost m kmitajícího tělesa.

Na obr. XV-22 je vyznačena graficky závislost výchylky na čase $y = f(t)$ pro tlumené kmity dané analyticky rov. (XV-51) při $\varphi = 0$. Závislost amplitudy na čase je vyznačena čárkovaně, průběh výchylky je vyznačen křivkou plnou. Čím větší je koeficient odporu R (tření), tím je větší i δ v mocniteli a tím rychleji ubývá amplitudy s časem.



XV-22. Graf tlumených kmitů

Kdybychom i v tomto případě chtěli najít rotační pohyb odpovídající tlumenému kmitajícímu pohybu, musel by časový vektor zkracovat svou délku podle vztahu $r = A\,e^{-\delta t}$. Jeho koncový bod by potom opisoval spirálu.

Útlumem λ rozumíme poměr amplitud dvou za sebou následujících kmitů (tj. také podíl kterýchkoli dvou výchylek časově vzdálených o dobu kmitu T_1). Platí tedy

$$\lambda = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_k}{A_{k+1}} = \dots \frac{Ae^{-\delta t}}{Ae^{-\delta(t+T_1)}} = e^{\delta T_1}. \qquad \text{(XV-52)}$$

Přirozený logaritmus útlumu se nazývá *logaritmický dekrement tlumení* a značí se Λ; platí

$$\Lambda = \ln \lambda = \ln \frac{y_1}{y_2} = \delta T_1 = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}} = 2\pi \frac{\delta}{\omega_1}. \qquad \text{(XV-52a)}$$

Útlum λ a logaritmický dekrement Λ jsou pouhá čísla. Snadno je určíme odměřením dvou po sobě následujících amplitud z časového rozvinutí daného tlumeného harmonického pohybu. Ze vztahu $\Lambda = \delta T_1$ snadno vypočteme součinitel tlumení $\delta = \frac{\Lambda}{T_1}$.

Z rovnice (XV-50) plyne, že harmonické tlumené kmity se utlumí až po nekonečně dlouhé době, neboť $e^{-\delta t} \to 0$ pro $t \to \infty$.