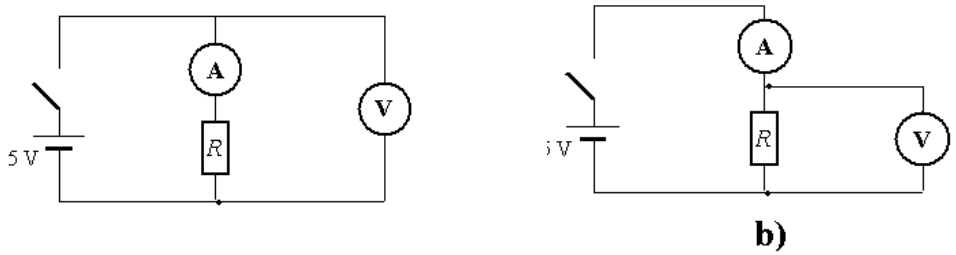
Správnost měření

Typický příklad experimentu, zatíženého systematickou odchylkou, je měření odporu metodou přímou podle obr. L1a .



b)

Je zřejmé, že ani při sebevětší přesnosti přístrojů ani při libovolném opakování měření, neobdržíme správnou hodnotu napětí, kterou potřebujeme pro výpočet odporu R podle Ohmova zákona. Vždy naměříme více o napětí na ampérmetru. Ten totiž není ideální a jeho vnitřní odpor R_A tedy není nulový. Poměr naměřeného napětí a proudu bude roven součtu $R+R_A$. Kdybychom vnitřní odpor R_A znali, snadno bychom hodnotu každého neznámeho odporu R vypočítali. Na odstranění systematické chyby stačí určit v našem případě jeden parametr - R_A. Ten můžeme nalézt experimentálně, když uskutečníme navíc minimálně jedno měření, při kterém bude na místě neznámého odporu rezistor známé hodnoty (nejlépe přesný odpor - normál).

Zobecníme-li tento postup, je v první řadě nutné analyzovat experiment a umět odhadnout příčiny systematické chyby, její velikost a počet parametrů, jimiž ji lze popsat. Tyto parametry zpravidla určujeme **kalibrací**, proměřením jednoho nebo několika známých vzorků (standardů). Minimální počet kalibračních měření je dán počtem příslušných parametrů. Pomocí nich následně provádíme **korekci** měření na vzorcích neznámých. Výsledná systematická chyba přitom bude dána přesností kalibrace. Proto provedení více kalibračních měření, než je minimum, není na závadu.

Kalibraci tedy definujeme jako experiment, zvláštní v tom, že měříme známý vzorek, abychom získali informace o metodě. V rámci řešení laboratorních úloh budeme provádět řadu kalibrací. Například při určování měrného tepla látek spočívá systematická chyba v tom, že určité tepelné energie je potřeba k zahřátí samotné vnitřní nádoby kalorimetru, míchadla a teploměru, i když jsou jinak dokonale izolovány od okolí. Tuto odchylku stačí kvantifikovat jedním parametrem - tepelnou kapacitou kalorimetru a pro její určení stačí provést navíc jediné měření. Při něm se v přístroji smísí dvě známá množství látky o známém měrném teple a různé teplotě.

Častější jsou situace, kdy je nutno určit kalibračních parametrů více. K nejobtížnější situaci dochází, není-li počet parametrů (stupňů volnosti) problému znám. Zde je nutno proměřit větší množství kalibračních vzorků a použít postupů faktorové analýzy. V jednodušších případech je možné odhadnout kalibrační závislost z grafu nebo přesněji použitím regresních metod. Například u kalibrace tónového generátoru nebo kalibrace galvanometru docházíme k lineárním závislostem.

U složitějších přístrojů obvykle provádí kalibraci výrobce a uvádí příslušné parametry a grafy v dokumentaci.

Správný odhad velikosti systematické chyby nám umožní posoudit, zda je významná či nikoli. Kritériem je, zda je možné ji zanedbat vzhledem k přesnosti měření.

V našem původním příkladě to předpokládá přibližnou znalost hledaného odporu *R*, odporu ampérmetru R_A a třídy přesnosti použitých přístrojů. **Třídou přesnosti** *d* se rozumí podíl maximální odchylky D_{max} přístroje k maximálnímu rozsahu stupnice X_{max}

$$\delta = \frac{\Delta_{max}}{X_{max}} \qquad 1.$$

Udává se obvykle v procentech, přičemž symbol % se neuvádí. Naměříme-li na takovém přístroji hodnotu *X*, je její *maximální relativní odchylka*

$$\Delta = \delta \frac{X_{max}}{X} \qquad 2.$$

Tu musíme minimalizovat, proto je nutné provádět měření na takovém rozsahu, aby výchylka *X* byla co nejblíže hornímu okraji stupnice nebo u digitálních přístrojů maximální hodnotě příslušného rozsahu.

Používáme-li například přístrojů třídy přesnosti 1.5, je zřejmé, že pro $R_A<R/100$, bude systematická chyba stanovení napětí pod rozlišením volmetru a tudíž se neprojeví. Avšak bude-li např. $R_A > R/50$, bude přístroj schopen napětí na ampérmetru zaregistrovat a jeho údaj bude tedy nesprávný.

Například u běžného ampérmetru na rozsahu 20 mA, může být R_A až několik desítek ohmů. To je od nuly dosti daleko. Přesto odpory o velikosti řádově několik tisíc ohmů celkem přesně změříme.

Informace o významnosti systematické chyby je též možné získat srovnáním s výsledky jiné měřící metody. V případě měření odporů metodou přímou můžeme například použít zapojení podle obr. L2 . Zde se ovšem dopouštíme jiné systematické chyby, tentokrát při měření proudu. Je-li i v tomto zapojení systematická chyba signifikantní, získáme každopádně lepší představu o skutečné hodnotě odporu díky faktu, že první zapojení poskytuje vždy horní odhad R, zatímco druhé zapojení odhad spodní. Je ale nutné zdůraznit, a ilustruje to i náš příklad s terčem, že zde se jedná o výjimečně příznivý případ, kdy obě "pušky" zanáší přesně na opačnou stranu. Ovšem nesymetricky! Obecně není zaručeno, že správná hodnota leží mezi hodnotami naměřenými různými metodami a ani jejich aritmetický průměr nemusí být ke správné hodnotě blíže než některá měření a má proto smysl pouze orientační. Je-li například jedno měření téměř správné ovlivní ostatní nesprávná měření průměr nevhodně. Příkladem je měření velkého odporu v zapojeních obr. L1 a L2.

Typickým příkladem, kdy aritmetický průměr nemá smysl, je měření specifického náboje . Zde jsou jednotlivé hodnoty získány za různých podmínek a jsou tedy nutně ovlivněny systematickými vlivy například nehomogenitou magnetického pole.

Podobně je nutné velmi opatrně iterpretovat průměr z několika postupů například u měření hustoty kapalin, ohniskové vzdálenosti tenkých čoček nebo odporu rezistorů. Výsledek jedné metody může být zcela odlehlý od ostatních a přesto správný.

Přesnost měření

Náhodné chyby jsou způsobeny velkým množstvím vlivů, které nejsme schopni přesně popsat. a neznáme jejich příčinu. Důležité ale je, že obvykle můžeme předpokládat, že mají určité rozdělení. Často mají náhodné chyby takzvané rozdělení **normální** nebo-li **Gaussovo**. Je to důsledkem platnosti **centrálního limitního teorému** statistiky, který říká, že rozdělení systému, majícího velký počet stupňů volnosti, které mohou mít třeba i jiné než normální rozložení, konverguje k rozložení normálnímu.

Vliv náhodných chyb lze principiálně ovlivnit **opakováním počtu měření** a statistika poskytuje metody, jak tyto chyby kvantifikovat. Lze říci, že statistika nám umožňuje odhadnout na základě relativně malého počtu měření, k jakým výsledkům bychom došli při počtu velkém (nekonečném). Její výpověď má tedy charakter pravděpodobnosti a s roustoucím počtem měření se upřesňuje .

Příkladem je známá situace, kdy se na základě průběžných volebních výsledků v několika obvodech provádí odhad konečných výsledků voleb.

V další poměrně obtížné části se snažíme vysvětlit, na jakých principech statistiké metody pracují. Je to v rozsahu, který umožní kvalifikovaně používat některé počítačové programy nebo kalkulátory, nabízející statistické funkce. Čtenářům doporučujeme ji podrobně prostudovat. K řadě definic a pojmům je možné se vrátit po pochopení ilustrativního příkladu na konci.

Základy statistického zpracování výsledků

Nejpropracovanější výsledky poskytuje statistika právě pro náhodné proměnné, které mají normální rozložení. Začněme však obecnými pojmy.

Rozložení *f(x)* náhodné proměnnné *x* bychom teoreticky získali, kdybychom proměnnou nekonečně krát změřili a vynesli **křivku četnosti**. Tedy závislost, jak často se proměnná vyskytuje v nekonečně malém okolí příslušných hodnot *x* bychom znormalizovali (vydělili celkovým počtem měřní), aby

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \qquad 3.$$

O proměnné x předpokládáme, že může nabývat jakékoli reálné hodnoty. Rozdělení f(x) potom vyjadřuje skutečnost, že určité hodnoty x se vyskytuji častěji než jiné. Snadno se to ilustruje na proměnných nabývajících diskrétních hodnot.

Házejme dvěma kostkami a a» je naše proměnná součtem hodnot, které padly. Proměnná může nabývat všech hodnot v intervalu <2,12>, ale součtu 2 bude například dosaženo jen při jedné z 36 možných konfigurací(1+1), zatímco třeba součtu 6 při pěti (1+5,2+4,3+3,4+2,5+1). f(6) bude tedy pětkrát větší než f(1).

Hodnotu *f(x)* lze chápat jako pravděpodobnost výskytu náhodné proměnné v intervalu <*x, x+dx*>. Potom pravděpodobnost *p* výskytu proměnné *x* mezi hodnotami x_1 a x_2 je

$$p(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \qquad 4.$$

Pro každé rozdělení existuje jednoznačná kumulativní neboli **distribuční funkce** *F(x)*

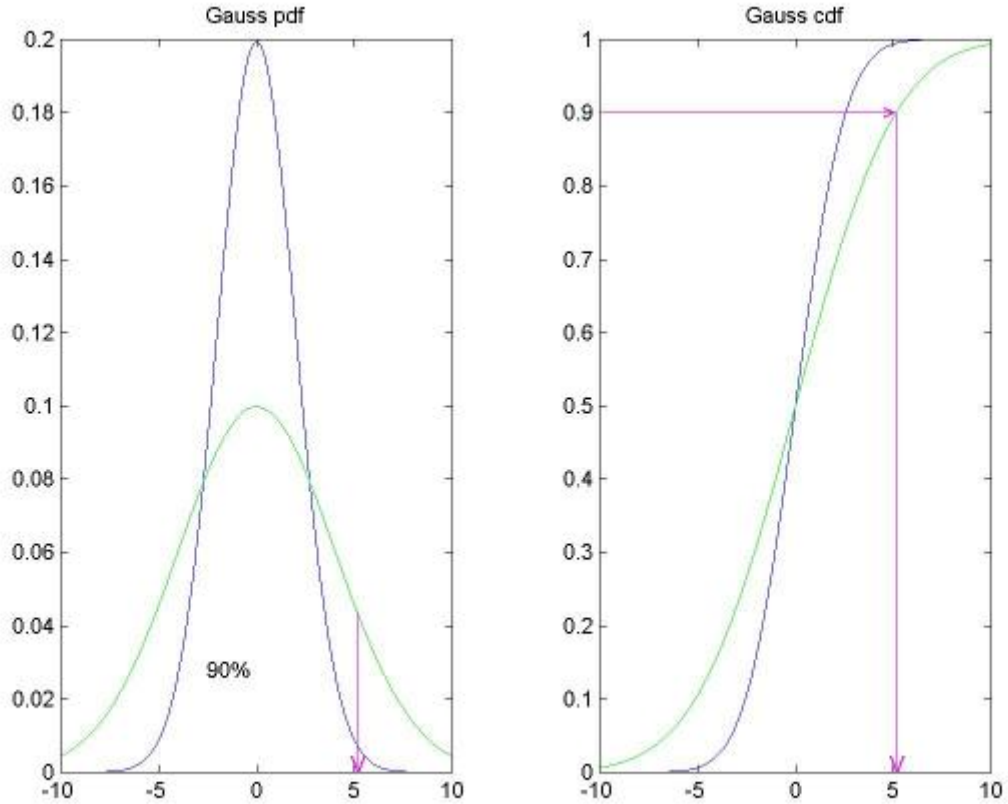
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi \qquad 5.$$

Jejím oborem hodnot je interval <0,1>. Má význam pravděpodobnosti, že náhodná proměnná dosáhne hodnoty menší nebo rovné *x*. Zjevně platí obdoba rovnice(4): $p(x_1<x<x_2)=F(x_2)-F(x_1)$

Velmi důležitá je zvláště obrácená (inverzní) úloha:

pro jakou hodnotu x_p bude $F(x_p)=p$.

Hodnota x_p se nazývá **kvantil**, odpovídající pravděpodobnosti *p*.



Na obrázku je naznačen význam kvantilu $x_{0.9}$ u normálního rozložení. Dříve byly právě tabelované hodnoty kvantilů nejdůležitějším zdrojem informací o příslušných rozděleních. V současné době jsou kvantily dostupné v mnoha matematických programech na počítačích přímo jako inverzní hodnota distribuční funkce.

Úplnou informaci o chování náhodné proměnné poskytuje pouze znalost rozdělení v celém jeho definičním oboru. Řadu konkrétních důležitých rozdělení je ale možné plně nebo alespoň s dostatečnou přesností charakterizovat několika parametry. Klíčem pro jejich definici je takzvaná **střední hodnota**.

Je-li *g(x)* funkce náhodné proměnné *x*, potom střední hodnotu $<g(x)>$ lze vyjádřit jako

$$< g(x) >= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \qquad 6.$$

Speciál. případem jsou nejdůležitější parametry každého rozdělení, jeho **střední hodnota** m

$$\mu = < x >= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \qquad 7$$

a dále takzvané **obecné momenty** a_r a **centrální momenty** m_r

$$\alpha_r = < x^r >= \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx$$
$$\mu_r = < (x-\mu)^r >= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r f(x) dx \qquad 8.$$

Není-li funkce f(x) normovaná, je nutné vztahy pro výpočet momentů dělit výrazem $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ **.**

Nejdůležitější z momentů je *první obecný moment* $a_1 = m$ a *druhý centrální moment* m_2. V podrobnějších pracích se dokazuje, že každé rozdělení lze vyjádřit jako rozvoj svých momentů. Ten může být základem pro odvození vlastností rozdělení veličin, které jsou speciálními funkcemi náhodných proměnných.

Jsou-li například *x* a *y* náhodné proměnné a *a, b, c* konstanty, platí

$$< ax + by + c >= a < x > + b < y > + c \qquad 9$$

a jsou-li *x* a *y* navíc *nezávislé*, je

$$< xy >=< x >< y > \qquad 10.$$

Dále se budeme soustředit již jen na náhodné proměnné, které mají **normální** rozložení definované vztahem

$$G(\mu,\sigma;x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad 11.$$

Lze ukázat, že rozdělení *G* splňuje normalizační podmínku (3), *m* je jeho střední hodnota (tradiční označení je ve shodě s 7) a takzvaná **variance** s^2 je jeho druhým centrálním momentem. Přitom její druhá odmocnina, **standardní odchylka** s , má význam **položířky rozdělení** (tedy jeho šířky v poloviční výšce).

Na obrazku jsou rozdělení *G(m=0, s ;x)* a jim odpovídající distribuční funkce *F(0,s ;x)* pro $s = 2$ *a 4*. Mohou například odpovídat rozdělením náhodných chyb dvou různých měření. Jsou patrny nejdůležitější vlastnosti:
1) střední hodnota je 0
2) rozdělení jsou symetrická
3) pravděpodobnost velkých chyb se asymptoticky blíží 0
4) položířka σ může charakterizovat přesnost měření

Chápeme-li rozdělení jako pravděpodobnost, je zřejmé, proč je rozdělení odpovídající menšímu σ přesnější. *Menší chyby jsou u něj totiž více pravděpodobné a větší méně.*

Pravděpodobnost, že náhodná proměnná *x* bude v intervalu $m\pm s$ **je**

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} G(\mu,\sigma;x)dx = F(\mu,\sigma,\mu+\sigma)-F(\mu,\sigma,\mu-\sigma)=0.6826 \qquad 12.$$

Podobně pravděpodobnost, že hodnota měření bude v intervalu $m\pm 2s$ a $m\pm 3s$ je *0.9554* resp. *0.9974*.

Parametry m a s plně charakterizují normální rozdělení náhodné veličiny *x*.

Jsou to také veškeré informace, potřebné pro použití veličiny v dalších výpočtech.

K jejich přesnému určení by ovšem bylo nutné uskutečnit nekonečný počet měření.

Při konkrétním ***n***-krát opakovaném měření provádíme tzv. **výběr rozsahu *n*** z náhodného rozložení $(x_1, x_2 \ldots x_n)$. Jedním z hlavních cílů teorie pravděpodobnosti je aproximovat parametry m a s rozdělení pomocí takzvaných **statistik**, tedy parametrů získaných z výběru. Lze ukázat, že nejlepším odhadem střední hodnoty *m* rozdělení je **výběrový průměr**

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad 13.$$

a nejlepším odhadem variance s^2 je **výběrový rozptyl** výběrový rozptyl

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad 14.$$

Jeho odmocnina *s* se nazývá **střední chyba jednoho měření**. Kdybychom mohli měření opakovat nekonečně krát, znali bychom přesně rozdělení a z těchto vztahů (pro nekonečné n) bychom získali přesné hodnoty výrazů *m* a *s*.

Pro konečný počet měření nám statistika umoľňuje nalezt intervaly, kde skutečné hodnoty *m* a *s* leľí na určité **hladině věrohodnosti.**. To se prakticky provádí pomocí **výběrových rozdělení** Studentova a Pearsonova. Platí totiľ, ľe veličina

$$t_{n-1} = \frac{\bar{x}-\mu}{s}\sqrt{n} \qquad 15$$

má takzvané **Studentovo rozdělení** a veličina

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} \qquad 16$$

rozdělení **Pearsonovo** neboli c^2 **(chí kvadrát).**

Přesná vyjádření těchto výběrových rozdělení je moľné nalézt v podrobnějąí literatuře, ale pro praktické pouľití je není nutno podrobně znát. I tato rozdělení jsou nyní dostupná v řadě matematických programů. Zde ukáľeme na příkladu (simulovaného) měření jejich pouľití. Pokusíme se take ukázat, v jakém smyslu je vícekrát opakované měření přesnějąí.

Příklad zpracování výsledků

Předpokládejme, ľe měření má normální rozloľení *G(20,3;x).* Vygenerujme dva výběry o rozsahu *17* a *1700*. Ty pro nás reprezentují dvě sady opakovaných měření. Nyní se snaľme učinit odhad *m* a *s* na hladině věrohodnosti *95%* a *99%*.
Ukáľeme si podrobně postup výpočtu pro rozsah *n=17* a hladinu věrohodnosti *95%*.

Hodnoty náhodné proměnné jsou v tabulce I.

Tabulka I.

19.5410 19.0631 20.4183 22.7683 18.1377 20.2179

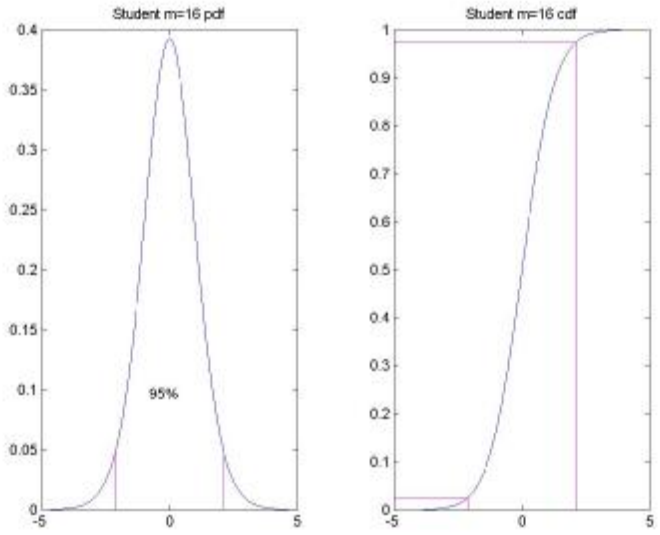
24.0228 21.2487 15.6172 20.2601 17.5074 22.3542

22.9094 19.7104 20.5752 19.7533 25.5580

Podle rovnic 13 a 14 vypočteme výběrové parametry: aritmetický průměr a výběrový rozptyl $\bar{x} = 20.57$ *a* $s = 2.44$.

V dalším kroku určíme interval, v němž se vyskytuje střední hodnota rozdělení *m* na hladině věrohodnosti *95%*.

Podle rovnice *15* k tomu potřebujeme znát oblast Studentova rozdělení pro počet stupňů volnosti *m=n-1=16*, která má obsah (integrál) *0.95*. Ta je ohraničena zdola kvantilem $t_{0.025}$ a shora kvantilem $t_{0.975}$, jak je patrné z obr. 3 .



Z tabulek nebo pomocí matematického programu zjistíme, že hodnoty kvantilů jsou $t_{0.025} = -2.12$ a $t_{0.975} = +2.12$ (Studentovo rozdělení je symetrické). Vyřešíme rovnici

$$t_{0.025} < \frac{\bar{x}-\mu}{s}\sqrt{n} < t_{0.975}$$ a přes úpravu

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0.975} < \mu < \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0.025} \qquad 17$$

dojdeme k nerovnosti $17.72 < m < 20.94$.

Protože se jedná o simulovaná data a my víme, že $m = 20$, můžeme ověřit, že v intervalu, který jsme vypočítali, *m* skutečně leží. Kdybychom ale tuto simulaci mnohokrát opakovali, zjistili bychom, že v *5%* případů *m* v daném intervalu ležet nebude. V tom spočívá význam hladiny věrohodnosti.

Obdobně postupujeme při odhadu intervalu pro varianci s^2 rozložení podle i rovnice 16. Nyní používáme rozložení Pearsonovo pro *m=n-1=16* podle obr. 4. Opět najdeme příslušné kvantily $x_{0.025} = 6.91$ a $x_{0.975} = 28.845$. Pomocí hodnoty *s* vypočteme součet kvadrátů odchylek

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = (n-1)s^2 = 95.55$$ a řešíme rovnici

$$\xi_{0.025} < \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} < \xi_{0.975}$$. Po úpravě obdržíme nerovnost *3.31 < s* ^{2}*< 13.83*.
Opět můžeme ověřit, že hodnota použitá při simulaci $s^2 = 9$, ve vypočteném intervalu leží. Obdobně by tomu bylo v *95 %* případů z velkého počtu simulací.
Pro hladinu věrohodnosti *99 %* použijeme stejná rozložení, ale určíme kvantily $t_{0.005}$, $t_{0.995}$ respektive $x_{0.005}$, $x_{0.995}$.
Pro zpracování druhé sady dat o rozsahu *1700* je nutné použít rozdělení pro *m = 1699*. Jinak je postup obdobný.

Výsledky:

rozsah věrohodnost 95% 99%

pro 17: μ <19.31, 21.83> <18.84, 22.30>

σ <1.82, 3.72> <1.67, 4.31>

1700. μ <19.85, 20.13> <19.80, 20.17>

σ <2.87, 3.10> <2.84, 3.14>

Z tabulky II, kde je odhad *m* a *s* na hladině věrohodnosti *95 %* a *99 %* pro výběry obou rozsahů, jsou patrné další důležité závěry:

1) Když pro výběr určitého rozsahu požadujeme vyšší věrohodnost, vede to k rozšíření intervalů, v nichž se parametry mohou vyskytovat.

2) Zvýšení rozsahu výběru vede naopak ke zúžení těchto intervalů na stejné hladině věrohodnosti.

Z uvedeneho příkladu vyplývá, že pro odhad střední hodnoty rozdělení *m* pomocí parametrů výběru o rozsahu *n* je významná tzv. **standardní odchylka průměru** nebo **střední chyba aritmetického průměru s_x**

$$\varepsilon_x = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$ 18,

protože je rovna hodnotě koeficientu u kvantilů na obou stranách nerovnice 17. Tuto hodnotu tedy používáme k vyjádření chyby měření a veličinu získanou zpracováním výběru o rozsahu *n* zapisujeme jako

$$x = \bar{x} \pm s_x \qquad 19.$$

Pro dostatečně velký rozsah výběru *n* leží v *68.3 %* případů střední hodnota μ v tomto intervalu. Plyne to z faktu, že kvantil $t_{0.1585}$@ *-1* a ze symetrie Studentova rozdělení. Uvědomte si též souvislost s rovnicí 12.

Odchylka vyjádřená jako s_x má rozměr a jednotku měřené veličiny, a proto se nazývá chybou **absolutní**. Vztáhne-li se chyba k měřené hodnotě, lze ji vyjádřit pomocí bezrozměrné veličiny jako chybu **relativní**

$$\delta_x = \frac{s_x}{\bar{x}} \qquad 20.$$

Pomocí této chyby je možné navzájem *srovnávat* měření různých veličin. Obecně platí, že měření s menší relativní chybou je přesnější. Tím je například odůvodněno známé tvrzení, že *vážení je nejpřesnější měření*.

V našem příkladě vychází $s_n = 0.59$ a $d_x = 0.029$. U méně přesných měření, kde $d_x > 1\ \%$ uvádíme absolutní odchylku na jednu platnou číslici. Průměrnou hodnotu na tomto řádu zaokrouhlujeme. Výsledek našeho příkladu, kde je relativní chyba přibližně 3 %, bychom tedy zapsali $x = 20.6 \pm 0.6$.

Absolutní a relativní vyjádření chyby má význam při odhadu odchylek veličin vypočítávaných pomocí veličin naměřených.

Předpokládejme, že náhodné veličiny *x* a *y* mají normální rozdělení, jsou na sobě nezávislé a platí

$$z = x \pm y \qquad 21.$$

Potom

$$s_z = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \qquad 22.$$

To plyne z vlastností normálního rozložení, kde $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ a skutečnosti, že *s* je nejlepším odhadem parametru s.

Je-li veličina *z* součinem nebo podílem nezávislých veličin *x* a *y*, tedy

$$z = xy^{\pm 1} \qquad 23,$$

platí

$$\delta_z = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2} \qquad 24.$$

Oba vztahy je samozřejmě možné rozšířit na libovolný počet sčítanců, resp. činitelů.

Z rovnic 21 a 22 je také patrný problém metod, kde výsledek je rozdílem měřených veličin. Kriteriem přesnosti metody je totiž relativní chyba

$$\delta_z = \frac{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}{x - y} \qquad 25.$$

Jsou-li si hodnoty veličin *x* a *y* blízké, je jmenovatel malý a k dosažení uspokojivé přesnosti *z* je nutné změřit veličiny *x* a *y* s mnohem vyšší přesností, než kdyby se používaly samy o sobě.

Vyskytují-li se v součinu veličiny s vyšší mocninou, tedy například

$$x = x^k y \qquad 26,$$

musí se využít obecnější vlastnosti rozptylu pro funkci *z* náhodných veličin x_i, kteté mají rozptyl s_i a normální rozložení

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2 \qquad 27.$$

Po výpočtu příslušných derivací platí

$$\delta_z = \sqrt{(k\delta_x)^2 + \delta_y^2} \qquad 28.$$

Odchylka veličiny s *k*-tou mocninou se tedy uplatní *k*-násobně a ne $\sqrt{k}$ - násobně, jak by odpovídalo prosté aplikaci rovnice 24. Důvodem je skutečnost, že veličina *x* je sama se sebou korelována.