

CHYBY MĚŘENÍ

Úvod

Představte si, že máte změřit délku válečku. Použijete posuvné měřítko a získáte určitou hodnotu. Pamětlivi přísloví provedete ještě jedno měření. Ale ouha! Výsledek je jiný. Co dělat? Měřit ještě jednou, desetkrát nebo kolikrát ještě? Jaká hodnota je ta pravá?

Jiná situace: Teorie praví, že ta a ta fyzikální veličina má nabývat určité hodnoty. Vaším úkolem je přesvědčit se o tom. Provedete měření. Velice pravděpodobně naměřená hodnota nebude stejná s teoretickou. Znamená to, že teorie neplatí?

Pro odpověď na tyto otázky se musíme obrátit na **teorii chyb**. Ta nám umožní ohodnotit kvalitu měření a na výše uvedené otázky odpovědět. Základním axiomem, který musíme vždy podržet v paměti je:

ŽÁDNÉ MĚŘENÍ NENÍ DOBRÝM MĚŘENÍM, POKUD NENÍ URČENA
JEHO CHYBA.

(Pozn.: Můžeme, a často je to nutné, mluvit i o chybě teoretických výsledků. Tím se však zde nebudeme zabývat.)

Podrobný výklad teorie chyb zde není možný, uvedeme proto jen základní pojmy a výsledky této teorie.

Chybou měření ε budeme rozumět rozdíl mezi naměřenou hodnotou x_m a skutečnou (pravou) hodnotou x měřené veličiny X . Je tedy

$$\varepsilon = x_m - x .$$

Problém je, že skutečnou hodnotu měřené veličiny neznáme a nemůžeme tedy takto chybu spočítat! (Pozor! Tabulková hodnota není skutečnou hodnotou! Je to také výsledek měření, a jako takový známý jen přibližně. Stejně není skutečnou hodnotou teoretická předpověď: skutečnost může být jiná než teorie předvídá.) Teorie chyb proto musí skutečnou hodnotu odhadnout a také odhadnout přesnost tohoto odhadu.

Jediné měření k odhadu chyby nestačí – není s čím srovnávat. Je proto třeba měřit vícekrát. (Mohli bychom sice použít chybu danou přístrojem, ale další naměřená hodnota může být jiná.) Úkolem teorie chyb je tedy na základě souboru měření najít „nejlepší“ odhad x_o skutečné hodnoty x měřené veličiny X (v podstatě takový, aby rozptyl naměřených hodnot byl nejmenší) a určit jak přesný tento odhad je, tj. stanovit jeho **absolutní chybu** δx_o . Tato chyba **není odchylkou od skutečné hodnoty** (jak se často studenti domnívají), ale charakterizuje velikost intervalu, v němž můžeme s nějakou dohodnutou pravděpodobností očekávat, že bude skutečná hodnota ležet. Standardně se volí pravděpodobnost výskytu skutečné hodnoty v intervalu $(x_o - \delta x_o, x_o + \delta x_o)$ rovna 0,683... (viz dále). Výsledek pak uvádíme ve tvaru $x = x_o \pm \delta x_o$.

Kvalitu měření pak hodnotíme buď pomocí této **absolutní** chyby, nebo častěji pomocí chyby **relativní**, definované jako podíl absolutní chyby a odhadované hodnoty:

$$\xi x_o = \delta x_o / x_o .$$

Relativní chyba je bezrozměrná, nebo ji vyjadřujeme v procentech (po vynásobení činitelem 100). Toto vyjádření chyby odpovídá lépe logaritmické reakci našich smyslů i běžné intuici. (Zjevně je něco jiného obdržet zásilku uhlí na zimu s přesností jeden kilogram a znát se stejnou absolutní chybou velikost rodinných zásob zlata. Zde je evidentně výhodnější uvést přesnost pomocí relativní chyby.)

Chyby obvykle rozdělujeme na soustavné a náhodné.

Soustavné chyby, zvané též systematické, „jednosměrně“ zkreslují výsledek měření. Jsou dány metodou měření (tzv. chyba metody – jde pak o ne zcela vhodně provedené měření), kvalitou přístrojů (tzv. přístrojová chyba, kterou obvykle lze na základě údajů výrobce odhadnout) a kvalitou prováděných měření (tzv. osobní chyba). **Soustavnou chybu nelze odstranit výpočtem.** Projeví se až porovnáváním daného měření s měřením provedeným jinou metodou, s měřením provedeným jinými (lepšími) přístroji nebo jinými osobami. Je-li ovšem chyba již zjištěna, můžeme provést odpovídající korekce. V rámci fyzikálního praktika by měly být zvolené metody dostatečně vhodné a přístroje dostatečně kvalitní.

Náhodné chyby jsou dány ne úplně kontrolovatelnými vnějšími (tlak, teplota, vlhkost vzduchu, elektromagnetické rušení, vibrace, seismické vlivy, ...) a vnitřními (kolísání měřené veličiny, tepelný šum, ...) vlivy. Obecně předpokládáme, že takové vlivy jsou malé, že je jich mnoho a že přibližně se stejnou pravděpodobností zvyšují nebo snižují měřenou veličinu. Nestejnost výsledků měření interpretujeme jako důsledek přítomnosti náhodných chyb a metody teorie pravděpodobnosti využívané v teorii chyb nám dovolí tuto skutečnost kvantifikovat.

Může se také stát, že mezi naměřenými hodnotami je údaj, který je na první pohled zjevně výrazně odlišný. Vznikl nejspíše nepozorností, či nějakým netypickým ovlivněním systému. Takovéto chybě říkáme **hrubá**. Níže uvedeme konvenční pravidlo pro vyřazení takového údaje ze souboru naměřených hodnot.

Dále se postupně zaměříme na určení odhadu výsledku měření a odhadu chyby v případě přímých měření. Ukážeme, jak provádět odhady chyb měřicích přístrojů. Uvedeme, jak zvolit optimální počet měření a kdy je možno vyškrtnout hrubou chybu. Poté se budeme věnovat odhadu výsledku měření a odhadu chyby pro nepřímé měření. Speciálně se budeme věnovat chybám parametrů funkčních (lineárních a na lineární převoditelných) závislostí. Nakonec ukážeme, v jaké podobě uvádíme výsledky měření.

A. Přímé měření fyzikální veličiny zatížené náhodnou chybou

Proveďme N měření fyzikální veličiny X . Výsledky měření nechť jsou x_1, \dots, x_N . Zajímá nás, jaký je nejlepší odhad x_o skutečné hodnoty x měřené veličiny X a s jak velkou chybou δx_o je určen.

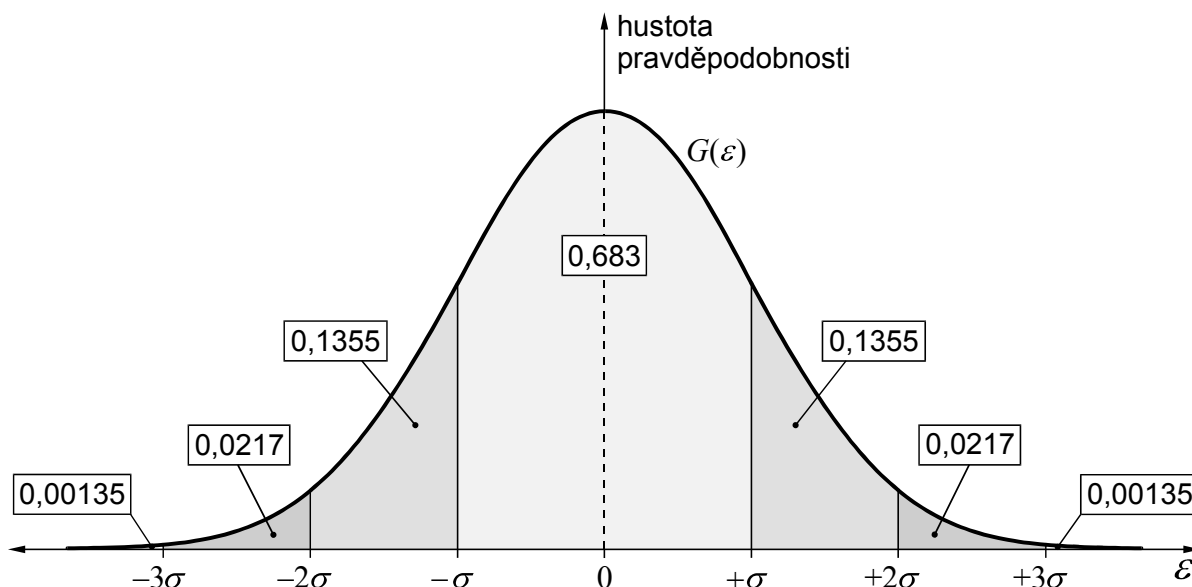
Budeme předpokládat, že rozložení náhodných chyb je takové, že nejlepším odhadem skutečné hodnoty je **aritmetický průměr**:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i.$$

To je např. splněno, je-li rozložení chyb dáno tzv. **Gaussovým rozdělením** (též zvaným normální). Pravděpodobnost dp , že chyba měřené hodnoty $x_m - x$ leží v intervalu $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ je pak dána vztahem

$$dp = G(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right) d\varepsilon,$$

kde parametr σ (tzv. směrodatná odchylka) charakterizuje „šířku“ Gaussova rozdělení, a tím velikost očekávané chyby. Funkce $G(\varepsilon)$ má význam hustoty pravděpodobnosti, tj. pravděpodobnosti připadající na chybu jednotkové velikosti (obr. 1). Pravděpodobnost výskytu chyby v nějakém intervalu $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle$ zjistíme pak integrací uvedeného výrazu.



Obr. 1 Gaussovo rozdělení – hustota pravděpodobnosti

Pravděpodobnost výskytu chyby ε jedné naměřené hodnoty uvnitř určitého intervalu je rovna velikosti plochy (pod křivkou) vymezené hranicemi tohoto intervalu. ($P_{\pm\sigma} = 0,683$, $P_{\pm 2\sigma} = 0,683 + 2 \times 0,1355 = 0,954$, $P_{\pm 3\sigma} = P_{\pm 2\sigma} + 2 \times 0,0217 = 0,9974$, $P_{\pm\infty} = 1$)

Matematikové umějí dokázat, že pro nekonečně mnoho nekonečně malých náhodných vlivů dostaneme Gaussovo rozdělení přesně (tzv. centrální limitní věta). Pro fyzikální situace **nemusí** a často ani **nemůže** (např. u veličin, které jsou vždy kladné) Gaussovo rozdělení popisovat rozdělení chyb. Předpokládá se ale, že odchylky **aritmetických průměrů** od skutečné hodnoty **jsou** už rozloženy podle Gaussova rozdělení. Pro dostatečně „velké“ soubory měření, kde $N \geq 30$, již bývá tento předpoklad splněn. (Při menším počtu měření, jak tomu bývá ve fyzikálním praktiku, si pouze „hrajeme“ na správný výpočet. Můžeme ovšem provést korekci

na malý počet měření pomocí tzv. Studentova rozdělení – odhad očekávané chyby se pak zvětší.) Je možno dokázat, že rozdělení chyb aritmetických průměrů (získali bychom je z mnoha měření po N hodnotách, přičemž z každé N -tice hodnot by se vypočítal jeden aritmetický průměr) je \sqrt{N} -krát „užší“ než je rozdělení chyb jednotlivých naměřených hodnot.

Lze vypočítat, že parametr σ Gaussova rozdělení je roven **střední kvadratické odchylce** od skutečné hodnoty:

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 G(\varepsilon) d\varepsilon} .$$

Veličina σ^2 se nazývá **rozptyl** a lze jej odhadnout pomocí tzv. **výběrového rozptylu** naměřených hodnot od průměru, tj. veličiny

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 .$$

Ukazuje se, že nejlepší odhad rozptylu je $\sigma^2 \approx s^2$.

Rozptyl $\bar{\sigma}^2$, jenž charakterizuje rozdělení odchylek (chyb) **aritmetických průměrů** od skutečné hodnoty, bude pak N -krát menší:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{N} \approx \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)} , \quad \text{tj.} \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \approx \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} .$$

Pro hodnocení přesnosti měření se používá tzv. **směrodatná** (nazývaná též **standardní** nebo **střední kvadratická**) chyba aritmetického průměru, která je rovna parametru $\bar{\sigma}$. Výsledek měření pak konvenčně vyjadřujeme takto:

Naměřená hodnota veličiny X je rovna $\bar{x} \pm \bar{\sigma}$.

Pro správné pochopení výrazu $\bar{x} \pm \bar{\sigma}$ je vhodné si uvědomit tuto skutečnost: Pravděpodobnost, že chyba měření bude menší než E dostaneme integrací Gaussova rozdělení (viz obr. 1):

$$p(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \bar{\sigma}} \int_{-E}^E \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\bar{\sigma}^2}\right) d\varepsilon = \Phi\left(\frac{E}{\bar{\sigma}}\right) - \Phi\left(\frac{-E}{\bar{\sigma}}\right) ,$$

kde $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-z^2/2} dz$

je tzv. gaussovská distribuční funkce chyb, která bývá často tabelována.

Provedeme-li integraci v mezích $-\bar{\sigma}$ až $+\bar{\sigma}$ zjistíme, že pravděpodobnost výskytu chyby našeho aritmetického průměru v intervalu $(-\bar{\sigma}, +\bar{\sigma})$ je 0,683... (tečky symbolizují další neuváděná desetinná místa). Máme tedy 68,3% pravděpodobnost, že náš aritm. průměr leží v oblasti $\pm \bar{\sigma}$ okolo skutečné hodnoty. Nebo obráceně: máme 68,3% pravděpodobnost, že skutečná hodnota leží v oblasti $\pm \bar{\sigma}$ okolo našeho průměru. Pokud bychom např. 1000-krát změřili N hodnot a vypočetli

z nich 1000 aritmetických průměrů, pak přibližně 683 získaných průměrů bude ležet v oblasti $\pm \bar{\sigma}$ kolem skutečné hodnoty. Vidíme, že změření N hodnot a určení aritmetického průměru je vlastně náhodný výběr jednoho průměru z nekonečného množství potenciálně možných aritmetických průměrů.

Pro praxi jsou důležité ještě následující případy:

Pravděpodobnost chyby menší než: $\pm 2\bar{\sigma}$	je 0,954...,
$\pm 3\bar{\sigma}$	je 0,9973...,
$\pm 0,674... \bar{\sigma}$	je 0,5 .

Nejnižší uvedená chyba se nazývá **pravděpodobná** a v dřívějších dobách byla užívána jako charakteristika chyby měření. Chybu o velikosti $3\bar{\sigma}$ nazýváme **krajní**. Pokud ji použijeme, máme pravděpodobnost, že skutečná hodnota leží vně intervalu $(\bar{x} - 3\bar{\sigma}, \bar{x} + 3\bar{\sigma})$ asi 0,0027 – tedy prakticky nulovou.

Poznámka: Chyba $\bar{\sigma}$ je ovšem také jen **odhadnuta**. Lze ukázat, že chyba chyby činí přibližně $\delta\bar{\sigma} \approx \bar{\sigma}/\sqrt{2(N-1)}$, což i pro $N=50$ dává chybu chyby asi 10 % ! Nemá tedy smysl uvádět ve výsledcích chybu příliš přesně.

Doplňme nyní, **kdy** je možno vyloučit ze souboru měření **hrubou chybu H** . Můžeme to udělat tehdy, je-li její výskyt málo pravděpodobný. K tomu stačí, aby se příslušná naměřená hodnota lišila od aritmetického průměru o více než $3\bar{\sigma}$.

B. Odhad přístrojové chyby

Protože není možno se věnovat odhadu přístrojové chyby obecně, omezíme se jen na dva nejvýznamnější případy:

1) Chyba čtení stupnice a displeje

Pro odhad chyby měření na stupnici se předpokládá, že skutečná hodnota leží s přibližně konstantní pravděpodobností v intervalu $\pm 1/2$ dílku. Rozdělení odchylek tedy v tomto případě není gaussovské, ale přibližně obdélníkové, široké 1 dílek. Směrodatnou chybu pak získáme (tak, aby byla rovna střední kvadratické odchylce od skutečné hodnoty) jako odmocninu z integrálu kvadrátů odchylek přes toto rozdělení. Výsledkem pak bude hodnota $1/\sqrt{3} \cdot 1/2 = 0,288... \approx 0,3$ dílku. Jako **směrodatnou chybu stupnice** budeme proto uvažovat **0,3 dílku**.

Měřicí přístroje s digitálním výstupem zaokrouhlují signál na poslední platnou číslici, přičemž rozdělení odchylek je opět přibližně rovnoměrné v intervalu $\pm 1/2$ řádu poslední číslice displeje. Směrodatná chyba proto bude opět **0,3 řádu poslední číslice**.

2) Chyba elektrických měřicích přístrojů udávaná výrobcem

Starší ručkové elektrické měřicí přístroje mají uvedenu tzv. třídu přesnosti, udávající kolik procent zvoleného rozsahu činí **maximální možná** chyba. Např. třída přesnosti 0,2 znamená, že maximální absolutní chyba činí 0,2 % rozsahu, bez ohledu na to, jakou hodnotu na daném rozsahu právě měříme. (Rozsah proto volíme tak, aby výchylna ručky zasahovala do horní třetiny stupnice, jinak neúměrně narůstá relativní chyba měření.)

U novějších přístrojů bývá **maximální** chyba udávána předpisem výrobce – např. jako součet procentové chyby rozsahu a procentové chyby měřeného údaje nebo jako součet procentové chyby údaje a určitého počtu jednotek posledního místa displeje. (viz odst. „Digitální měřicí přístroje“ na str. 37)

Zbývá otázka, jak tuto **maximální chybu** interpretovat. Protože se zde také předpokládá přibližně rovnoměrné (obdélníkové) rozdělení odchylek o šířce ± 1 maximální chyba, bude odpovídající **směrodatná chyba** rovna $1/\sqrt{3} \cdot 1 \approx 0,6$ **maximální chyby**.

Nakonec je třeba se zmínit o problematice **skládání chyb**. Někdy musíme např. uvážit jak chybu stupnice, tak náhodnou chybu či chybu udanou výrobcem. Pro celkovou chybu $\bar{\sigma}$ vzniklou skládáním nezávislých chyb $\bar{\sigma}_1$ a $\bar{\sigma}_2$ platí:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2}$$

(obdobně při skládání více chyb). Z daného výrazu vyplývají tyto závěry:

- 1) Je-li jedna z chyb více než $3\times$ menší než druhá, lze ji zanedbat. Celkovou chybu to ovlivní o méně než 5,5 %, což je vzhledem k nepřesnosti určení chyby zanedbatelné.
- 2) Protože náhodná chyba průměru s velikostí souboru obvykle klesá jako $1/\sqrt{N}$, může její hodnota být při dostatečně velkém N libovolně malá. **Optimální počet měření** pak zřejmě odpovídá případu, kdy je tato chyba zanedbatelná vzhledem k přístrojové chybě či chybě stupnice, tj. je alespoň $3\times$ menší.

C. Chyba nepřímě měřené veličiny

Zatím jsme se zabývali stanovením chyby přímého měření, často ovšem fyzikální veličiny měříme nepřímě. Pak je daná veličina **funkcí** několika přímo měřených veličin. (Např. hustotu látky zjišťujeme na základě měření hmotnosti a objemu. Výsledná hustota je pak podílem těchto veličin.)

Je-li výsledná veličina Z dána funkcí přímo měřených veličin A, B, C, \dots , tj. $Z = f(A, B, C, \dots)$, pak, pokud relativní chyby $\xi_a, \xi_b, \xi_c, \dots$ veličin A, B, C, \dots jsou dostatečně malé (malost ovšem závisí na tvaru funkce f), pro vyhodnocení výsledku platí:

- 1) Rozumný odhad z_o skutečné hodnoty z veličiny Z , je dán funkcí f odhadů a_o, b_o, c_o, \dots příslušných veličinám A, B, C, \dots :

$$z_o = f(a_o, b_o, c_o, \dots) .$$

(„Rozumný“ proto, že tento odhad není vždy nejlepší – např. aritmetický průměr kvadrátů je vždy větší než kvadrát aritmetického průměru. Obecně však tento odhad použitelný je.)

- 2) Odhad směrodatné chyby $\bar{\sigma}_z$ je dán vztahem

$$\bar{\sigma}_z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a} \bar{\sigma}_a\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \bar{\sigma}_b\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c} \bar{\sigma}_c\right)^2 + \dots ,}$$

kde $\bar{\sigma}_a, \bar{\sigma}_b, \bar{\sigma}_c, \dots$ jsou směrodatné chyby veličin A, B, C, \dots .

Toto je tzv. **věta o přenosu chyby**. Výše uvedená dvě tvrzení umožňují výpočet odhadu skutečné hodnoty nepřímo měřené veličiny a její směrodatné chyby.

Speciálně pro **součet** a **rozdíl** přímo měřených veličin dostaneme

$$\bar{\sigma}_{a \pm b} = \sqrt{\bar{\sigma}_a^2 + \bar{\sigma}_b^2}$$

a vztah pro chybu výrazu $a^m b^n$, kde m a n jsou číselné parametry (**součin** veličin odpovídá $m = n = 1$, **podíl** $m = 1, n = -1$), můžeme elegantně zapsat ve tvaru:

$$\xi(a^m b^n) = \sqrt{(m\xi a)^2 + (n\xi b)^2},$$

kde ξa a ξb jsou relativní směrodatné chyby výchozích veličin. (Rozšíření vzorců na případ více veličin je přímočaré.)

Ve vztazích vyjadřujících nepřímo měřené veličiny často vystupují **konstanty**. Nechceme-li zvětšit chybu výsledné veličiny, je třeba, pokud je to možné, vyjádřit konstantu tak přesně, aby její příspěvek k celkové chybě byl zanedbatelný. Obyčejně volíme relativní chybu konstanty o řád menší než je velikost ostatních chyb. Není-li to možné, je zapotřebí započítat chybu příslušné konstanty.

D. Lineární regrese a její chyba

Často nezjišťujeme výslednou veličinu jako funkční vyjádření jiných přímo měřených veličin, ale jako parametr vyjadřující charakter závislosti měřených veličin. Příkladem může být určení elektrického odporu na základě voltampérové charakteristiky. Níže se omezíme na lineární závislost mezi vystupujícími veličinami. Procedura je ovšem použitelná i pro závislosti převoditelné, např. logaritmováním, na lineární.

Předpokládejme, že máme dvě řady souvisejících veličin x_i a y_i ($i = 1 \div N$) a že jejich vzájemná závislost je vyjádřitelná ve tvaru:

$$y = k \cdot x + q.$$

Nejlepším odhadem parametrů k a q , ve smyslu nejmenšího součtu kvadratických odchylek, je:

$$k = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{a} \quad q = \bar{y} - k \cdot \bar{x}.$$

V těchto výrazech pruh označuje aritmetický průměr. Geometricky se jedná o proložení přímky danými (naměřenými) body. Druhá rovnice zjevně říká, že přímka prochází těžištěm bodů grafu. Nalezení optimální přímky aproximující daná data se nazývá úlohou (jednoduché) lineární regrese.

Chyby parametrů k a q jsou dány vztahy:

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{N-2} \frac{\sum (y_i - k \cdot x_i - q)^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}} \quad \text{a} \quad \sigma_q = \sqrt{\left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right) \cdot \frac{\sum (y_i - k \cdot x_i - q)^2}{N-2}}$$

Víme-li, že parametr q má být roven nule (jde tedy o přímou úměrnost a hledaná přímka prochází počátkem), pak nejlepší odhad směrnice a její chyba jsou dány vztahy:

$$k = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}, \quad \sigma_k = \sqrt{\frac{1}{N-1} \frac{\sum (y_i - k x_i)^2}{\sum x_i^2}}.$$

E. Konečný tvar výsledku měření

Výslednou hodnotu měřené veličiny píšeme ve tvaru :

MĚŘENÁ VELIČINA = VÝSLEDNÁ HODNOTA ± SMĚRODATNÁ CHYBA

Směrodatná chyba je určena značně nepřesně (s přesností horší než 10 % – viz výše), a proto ji zaokrouhlujeme na **jednu platnou cifru**. Pouze v případě, že první cifrou je číslice 1, zaokrouhlujeme na dvě platné cifry.

Za **platné** se považují všechny cifry kromě nul **vlevo** od první nenulové cifry. Např. číslo 0,0170 má tři platné cifry. Cifra nula na konci je platná – číslo je tím udáno s přesností na desetitisíciny. Vynechání této nuly sníží přesnost čísla desetkrát. Číslo 17 000 má pět platných cifer a chceme-li jej uvést pouze na tři platné cifry, musíme použít tvaru $1,70 \times 10^4$!

Výslednou hodnotu zaokrouhlujeme na tolik míst, kolik jich má (již zaokrouhlená) chyba. Ta koriguje poslední (resp. dvě poslední) cifry výsledku. Při konečném zápisu využíváme často exponenciálního tvaru zápisu čísel: např. číslo $23\,442 \pm 679$ zaokrouhlíme a zapíšeme jako $(234 \pm 7) \cdot 10^2$.

Připomeňme ještě, že zaokrouhlujeme podle hodnoty výrazu za poslední platnou cifrou: Je-li větší než 5, zaokrouhlujeme nahoru, je-li menší pak dolů. V případě, že je výraz přesně roven 5, zaokrouhlujeme nahoru, je-li předchozí cifra lichá, a dolů, je-li sudá (pro vyrovnání statistiky zaokrouhlování).

Příklady zápisu:

Správně:	Nesprávně:
21,50 ± 0,02	21,5 ± 0,02
0,6 ± 0,3	0,56 ± 0,3
0,23 ± 0,06	0,2341 ± 0,0567
347 ± 9	347,1 ± 9
(3,0 ± 0,2) · 10 ⁵ km/s	300 000 ± 20000 km/s

Závěr

Zjistili jsme, jak určovat odhad skutečné hodnoty měřené veličiny a jeho chybu na základě měření. Odpověděli jsme tak na první otázku z počátku kapitoly.

Budeme-li mít více souborů měření téže veličiny, pak zjištěné odhady hodnoty a směrodatné chyby nejspíše nebudou zcela stejné. Tyto hodnoty pak můžeme snadno porovnat takto: dva odhady výsledku měření budeme považovat

za souhlasné, pokud jejich rozdíl bude v absolutní hodnotě menší než dvojnásobek směrodatné chyby, která je v daném případě rovna $\bar{\sigma} = \sqrt{\bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2}$, kde $\bar{\sigma}_1$ a $\bar{\sigma}_2$ jsou směrodatné chyby těchto odhadů. (Odpovídá to vytvoření rozdílu obou odhadů a testování, kdy je tento rozdíl nulový.) Pravděpodobnost, že odhady souhlasí, ale my je na základě tohoto testu označíme (nesprávně) za odlišné, činí cca 5 %. Pokud je rozdíl odhadů větší než dvě a menší než tři směrodatné odchylky $\bar{\sigma}$, považujeme situaci za nerozhodnou a vyžadující další měření. Je-li rozdíl větší než $3\bar{\sigma}$, považujeme výsledky za různé, a tedy nesouhlasící. Umíme tedy porovnávat i soubory měření. (Souborem měření je i tabulková hodnota!)

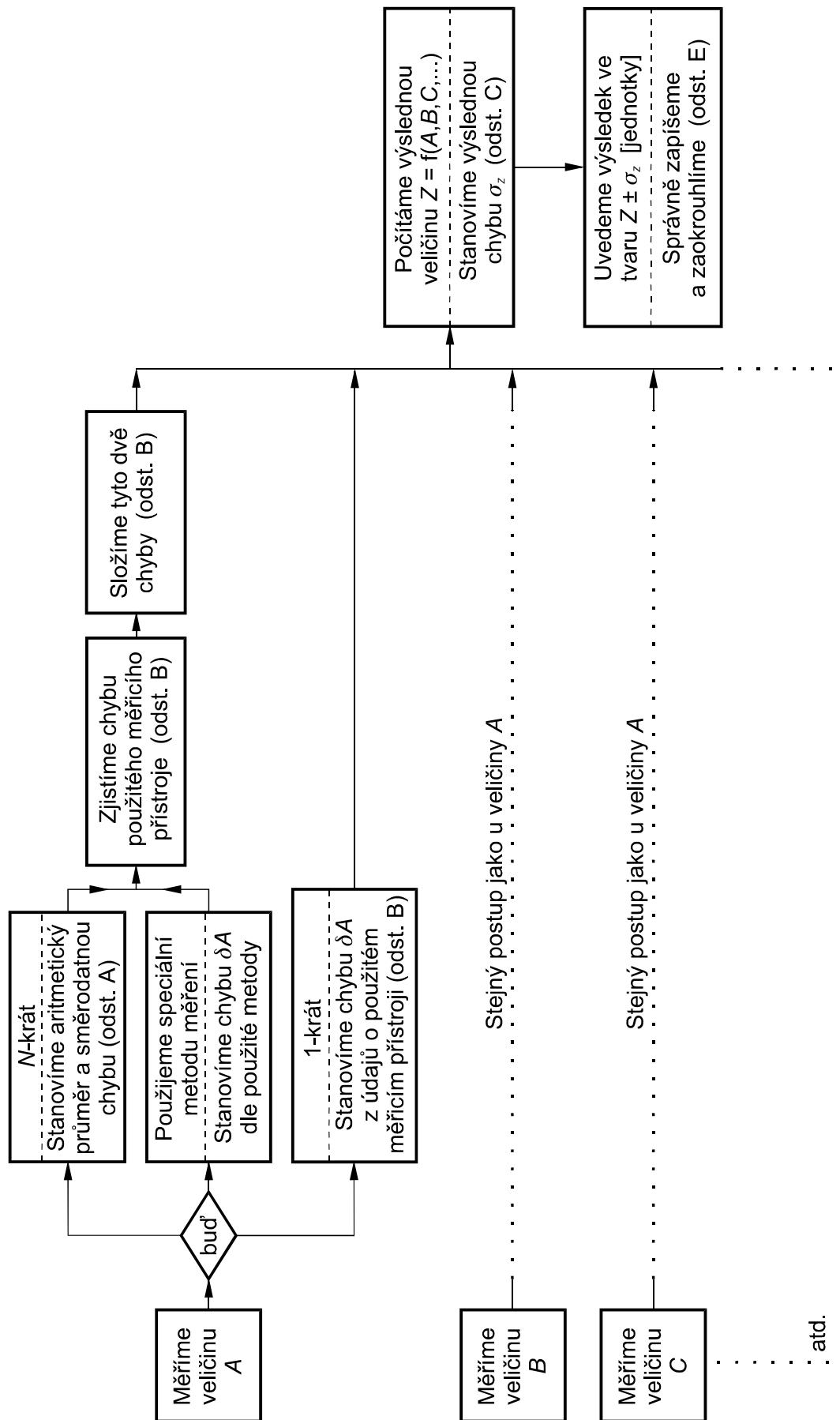
Porovnání s teoretickým výsledkem provádíme obdobně. Teoretický výsledek charakterizujeme parametry \bar{x}_t a $\bar{\sigma}_t$ (teoretická hodnota a její směrodatná chyba – teoretická chyba nebývá vždy uvedena: pak ji budeme považovat za zanedbatelnou). Pak si představíme teoretický výsledek jako kdyby to byl soubor měřených dat, reprezentovaný parametry \bar{x}_t a $\bar{\sigma}_t$ a porovnáme jej s našimi naměřenými daty. Experiment pak souhlasí s teorií, pokud se rozdíl experimentální a teoretické hodnoty neliší v absolutní hodnotě o více než dvě směrodatné chyby $\bar{\sigma} = \sqrt{\bar{\sigma}_t^2 + \bar{\sigma}_e^2}$, kde $\bar{\sigma}_e$ je směrodatná chyba našeho měření. I druhá otázka ze začátku kapitoly je tedy odpovězena.

Zpracováno podle normy *European Cooperation for Accreditation of Laboratories EAL-R2* (vyd. 1997).

STRUČNÝ POSTUP PŘI VÝPOČTU CHYB – SHRNUÍ

V běžných případech můžeme použít schéma výpočtu chyb zobrazené na obr. 1 na následující straně.

Při měření každé z veličin A , B , C , ... je třeba rozhodnout, zda ji měřit vícekrát (N -krát), nebo jen jednou. Nejdříve tedy provedeme několik zkušebních měření a pokud se jednotlivá měření veličiny vzájemně liší, musíme měřit vícekrát a data zpracovat statisticky podle kapitoly „Chyby měření“, odst. A. Vychází-li zkušební měření stále stejně, stačí samozřejmě uvažovat jediné. V obou případech je nutné ještě při měření stanovit chybu použitého měřicího přístroje a sloučit ji s chybou statistickou (ve druhém případě rovnou nule). Stanovení hodnot jednotlivých chyb je uvedeno v předcházející kapitole. Popis některých měřicích přístrojů a stanovení jejich chyb je uveden v kapitole „Přístroje užívané ve fyzikální praxi“.



Obr. 1 Blokový diagram postupu při výpočtu výsledné chyby fyzikálního měření (písmena odstavců v závorkách se vztahují ke kapitole "Chyby měření")