# ROVNICE A NEROVNICE

Mgr. Irena Budínová, Ph.D.

## Návaznosti

- Témata, která předcházejí:
  - Počítání se závorkami
  - Počítání se zlomky
  - Výrazy, úpravy výrazů
  - Zápis slovního vyjádření pomocí číselného nebo algebraického výrazu
  - Slovní vyjádření zapsaného číselného nebo algebraického výrazu.

- Navazující témata:
  - Řešení slovních úloh pomocí rovnic
  - Výpočet neznámé ze vzorce
  - Lineární algebra
  - Rovnice vyšších typů a např. rovnice iracionální, exponenciální, logaritmické, goniometrické, binomické
- **RVP**
  - Číslo a proměnná
  - Očekávané výstupy: Žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav
  - Učivo: Lineární rovnice, soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

## Historická poznámka

- Úlohy, které dnes řešíme lineárními rovnicemi (zejména slovní úlohy) se vyskytují již v matematických textech dřívějších civilizací:
  - Na hliněných babylonských destičkách
  - Ve starých čínských sbírkách příkladů
  - V Ahmesově papyru (Egypt)
  - Řekové – geometrická řešení.
- Např. staří Babyloňané zapisovali příklady na hliněné tabulky. Chybí vysvětlení, proč je daný postup řešení užit – nejdříve zřejmě užívali metodu **pokusu a omylu**, později **intuice**.

- Babylonský přístup možno považovat za fylogenetickou propedeutiku rovnic a aritmetiky (Kubínová, studijní podklady). Jsou ukázkou toho, jak je důležitá etapa, kdy je na rovnici pohlíženo jako na hádanku a výzvu k jejímu řešení. Mnozí učitelé však nepovažují za vhodné, aby žáci hádali výsledek a nepostupovali hned od začátku systematicky. Řešení rovnic je hned od počátku chápáno jako algoritmus, který si mají žáci osvojit, je přeskočena etapa separovaných modelů (bude vysvětleno později).

- Důležitý mezník ve vývoji nauky o rovnicích znamená Diofantova kniha Aritmetika. Uvádí zde dvě pravidla pro řešení rovnic, která připomínají dnešní ekvivalentní úpravy. V kalkulu se nezabýval jen aritmetickými operacemi, ale také zákony dělitelnosti (diofantovské rovnice).
- Znalosti přešly do Indie a Číny, zde se rozvinula symbolika. K rozvoji nauky o rovnicích přispěli zejména indičtí matematikové Aryabhata (VI. stol. n.l.) a Brahmagupta (VII. stol. n.l.). Dokonce neodmítali záporná řešení.

- Systémy rovnic se řešily již ve 2. století před n.l. – Matematika v devíti knihách – Čína.
- Arabská matematika přepsala mnohé geometrické postupy od algebraického jazyka. Začala v aritmetice využívat kalkul a připravila nástup algebraických rovnic. Objevují se i goniometrické rovnice (řešení problémů astronomie, trigonometrie a sférické geometrie) jako první nealgebraické rovnice.

- Matematická symbolika (symboly operací, koeficienty, označení neznámé i samotný zápis rovnice) byla v Evropě rozvinuta až v 15. – 17. století.
- Algebraické metody řešení rovnic třetího a čtvrtého stupně byly objeveny a rozpracovány v 16. století. Zasloužili se o to zejména Italové Scipio del Ferro, Niccolo Fontana – Tartaglia, Giorlamo Cardano, Ludovico Ferrari
- Norský matematiky Niels Henrik Abel (1802 – 1829) dokázal, že algebraická rovnice 5. stupně není algebraicky řešitelná.
- Francouz Evarist Galois (1811 – 1832) načrtl (v noci před soubojem, ve kterém zahynul) teorii popisující m.j. všechny rovnice, které jsou algebraickou metodou řešitelné

# Pojmy

- Rozlišujme pojmy „rovnost" a „rovnice".
- Pojem **rovnosti** je jedním z nejdůležitějších pojmů školské matematiky. Jedná se o relaci, která je:
  - reflexivní,
  - symetrická,
  - tranzitivní,
- tedy je to relace ekvivalence.

- **Rovnice** je
  a) zápis rovnosti dvou výrazů, z nichž alespoň jeden obsahuje neznámou,
  b) výroková forma, jejíž obor pravdivosti hledáme.
- Rovnice sestává z: levé stany rovnice, pravé strany rovnice, rovnítka
- Řešení rovnice – jednak se tímto pojmem rozumí postup – **proces** postupné transformace dané rovnice, kterým určujeme neznámou, jednak **kořen** rovnice (číslo (uspořádaná n-tice čísel), které po dosazení do rovnice za neznámou (neznámé) změní danou rovnici v rovnost).
- Řešit rovnici znamená určit všechny kořeny této rovnice, tj. každá taková čísla, pro které se za dosazení za neznámou do rovnice získá rovnost.

- Přístupy k učivu o rovnicích v platných vzdělávacích programech (Kubínová):
- **Důraz je kladen na:**
  - upevňování dovednosti řešit některé důležité typy rovnic
  - využití rovnic při procvičování učiva z jiných tématických celků.
- **Nedostatečně akceptováno:**
  - motivující role rovnice jako hádanky nebo výzvy k činnosti
  - rozvíjení schopnosti žáka modelovat reálné situace v jazyku rovnic
  - rozšíření žákových zkušeností s rovnicemi a metodami jejich řešení
  - řešení daného typu rovnic **různými** metodami.

# Příklady

1. Ve třídě je celkem 28 žáků. Chlapců je o 4 více než děvčat. Kolik je děvčat a kolik chlapců:

- **Možné postupy řešení:**
  - z hlavy – např. pokud by jich bylo stejně, bylo by 14 d a 14 ch, rozdíl je 4, je 12 d a 16 ch.
  - zápis rovnice (x je počet dívek): x+(x+4) = 28, 2x+4=28, lze dopočítat z hlavy nebo dosazováním (pokus-omyl).
  - algoritmus pro řešení lineární rovnice:

$$
\begin{aligned}
2x+4&=28 \qquad -4\\
2x&=24 \qquad :2\\
x&=12
\end{aligned}
$$

2. Jana uspořila dvakrát více než Jitka, Alena o 27 Kč méně než Jana. Celkem uspořily 453 Kč. Kolik Kč uspořila každá dívka ?
3. 270 Kč se chlapci rozdělili tak, že Petr dostal třikrát více než Pavel a Ivan dostal o 120 Kč více než Pavel. Kolik dostal každý ?
4. Obvod trojúhelníku se rovná 205 cm. Strana **b** je dvakrát delší než strana **a**, strana **c** je o 35 cm kratší než strana **b**. Vypočítej délky jednotlivých stran.

# Úpravy rovnic

- **ekvivalentní** – taková úprava, kdy rovnice před úpravou a po úpravě mají stejné kořeny (rovnice původní a rovnice upravená mají stejnou množinu všech řešení)
  - záměna obou stran rovnice
  - přičtení (odečtení) stejného čísla nebo stejného výrazu k oběma stranám rovnice
  - vynásobení obou stran rovnice stejným číslem různým od nuly nebo stejným mnohočlenem, který má pro každou proměnnou hodnotu různou od nuly
  - vydělení obou stran rovnice stejným číslem různým od nuly nebo stejným mnohočlenem, který má pro každou proměnnou hodnotu různou od nuly.
- Názor – rovnoramenné váhy

- Při úpravách rovnice pomocí ekvivalentních úprav není nutné provádět zkoušku správnosti. Na základní škole **zkoušku provádíme** proto, abychom eliminovali chyby vzniklé prováděním operací.
- **Důsledkové** -řešení upravené rovnice nemusí být řešením (rovnice původní a rovnice upravená nemají stejnou množinu všech řešení)
  - umocnění obou stran rovnice na druhou
  - odmocnění obou stran rovnice
  - vynásobení výrazem, který „přidá" další kořen (např. u goniometrických nebo binomických rovnic)

- Při řešení příkladů dbejte na:
  - Určení podmínek řešitelnosti
  - Správný zápis řešení – např. $x \in \{-2\}$, $K = \{-2\}$, $K = \emptyset$, $[x;y] \in \{[2;-7]\}$, apod.
  - Provedení zkoušky, abychom se ujistili o správnosti řešení

# Propedeutika na 1. stupni ZŠ

- Řešení úloh typu: $5 + ? = 12$ $5 + \_ = 12$ $5 + \square = 12$
- Úlohy se řeší
  - postupným dosazováním
    $5 + 4 \neq 12$
    $5 + 5 \neq 12$
    $5 + 6 \neq 12$
    $5 + 7 = 12$
  - graficky – na misce je 5 jablek, kolik je potřeba přidat, aby bylo 12?
  - pomocí obdélníků nebo úseček ______ ______________
    5 ?
    12
  - pomocí vlastností početních operací: když $5 + 7 = 12$, pak $12 - 5 = 7$, $12 - 7 = 5$

# Druhy rovnic probírané na ZŠ a víceletých gymnáziích

**I. Lineární rovnice o jedné neznámé**

$ax + b = 0$

- Diskuse vzhledem ke koeficientům *a, b*:

$a = 0,\ b = 0$ $0.x = 0$

*rovnice má nekonečně mnoho řešení*

$a = 0,\ b \neq 0$ $0 \,.\, x = b$

*rovnice nemá řešení*

$a \neq 0$, $b = 0$ $\quad$ $a \,.\, x = 0$

rovnice má řešení $x = 0$

$a \neq 0$, $b \neq 0$ $\quad$ $ax + b = 0$

rovnice má řešení $\quad x = -b/a$

- **Metodická řada**
  - rovnice typu $a + x = b$, $a \,.\, x = b$
  - $ax + b = c$
  - závorky
  - zlomky
  - složitější rovnice

**II. Soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých**

- Rovnice typu: $\quad ax + by = c$
- $\quad dx + ey = f$
- Metody řešení:
  - Komparační – porovnávací
  - Dosazovací
  - Sčítací
  - Grafické řešení – až se probere lineární funkce

- Příklady - podmínky řešitelnosti:

1. $6x + 2y = 5$
   $4x - 3y = -1$
2. $6x + 2y = 5$
   $3x + y = 4$
3. $6x + 2y = 5$
   $3x + y = 2{,}5$

**III. Neurčité rovnice (diofantovské)**
(class.pedf.cuni.cz/koman/)

- Diofantovské rovnice typu $2x \pm 9y = 22$. Hledáme celá čísla x, y, která splňují danou rovnici o dvou neznámých.
- Na základní škole volíme experimentální hledání jednoho řešení a z něho odvození všech řešení.
- Promyslete, jaké jsou podmínky řešitelnosti těchto rovnic.

# Příklady

1. Ke koloběžkám a tříkolkám se montují stejná kolečka. Kolik koloběžek a kolik tříkolek se může dokončit, je-li k dispozici 35 koleček a žádné kolečko nemá zůstat? Najděte všechny možnosti.

- Matematizací této slovní úlohy je Diofantovská rovnice: $2x + 3y = 35$, kde $x$ a $y$ jsou přirozená čísla.
- Snadno najdeme jedno řešení: $x = 1$, $y = 11$. Další řešení $x=4$, $y=9$ získáme tak, že k $x$ přidáme 3 a od $y$ odečteme 2 – tímto způsobem získáváme další řešení (promyslete, proč tomu tak je)

2. Zákazník kupoval knoflíky po 2 Kč a po 3 Kč. Za knoflíky po 2 Kč zaplatil o 35 Kč více než za knoflíky po 3 Kč. Napište Diofantovskou rovnici, která matematizuje tuto úlohu.

- Úlohy 1 a 2 ukazují, že z jednoho řešení Diofantovské rovnice, dostaneme snadno všechna ostatní řešení. Jak?

3. Řešte Diofantovské rovnice. Pozor, některé rovnice nemají řešení. Vysvětlete proč (souvisí s vlastnostmi dělitelnosti).

   $2x + 7y = 43$, $3x - 7y = 25$, $4x + 6y = 17$, $5x - 7y = 4$, $6x + 9y = 13$

   Sestavte k rovnicím, které mají řešení, různé slovní úlohy.

- Pozn.: V předchozích příkladech a na základní škole se jedná o příklady s malými čísly, kdy jedno řešení snadno uhodneme.
- V případě rovnice např.

$$15x+21y=192$$

postupujeme následovně: Rovnici upravíme na tvar $21y=192-15x$ a za x postupně volíme 1, 2, 3, … až je výsledek na pravé straně násobkem 21:

192-15=177, 192-30=162, 192-45=147=7.21, dokončete řešení

- Obecné řešení – redukční metodou

**IV. Kvadratické rovnice**

$ax^2+bx+c=0$

- Diskuse vzhledem ke koeficientům *a, b, c:*
  - *b = 0 rovnice bez lineárního členu (ryze kvadratická)* $ax^2 + c = 0$
  - *c = 0 rovnice bez absolutního členu* $ax^2 + bx = 0$
  - *a = 0 lineární rovnice* $bx + c = 0$
- Zopakujte si **správný** způsob úprav těchto rovnic (tj. vyhněte se důsledkovým úpravám)

- a,b,c≠0
  - Zopakujte si odvození vztahu pro výpočet kořenů kvadratické rovnice
  - Na základní škole je možné řešit kvadratické rovnice pomocí vztahu pro výpočet kořenů anebo rozkladem kvadratického trojčlenu na součin dvojčlenů.

    např. $x^2+7x+10=0$ … $b=2+5$, $c=2.5$

    $(x+2).(x+5)=0$

    $x\in\{-5;-2\}$

# Příklady

1. Řešte rovnici $(a-1)(a+2)=(a+2)$. Najděte v průběhu řešení dvě chyby, kterých by se žáci mohli dopustit a vysvětlete, v čem tyto chyby spočívají.
2. Řešte rovnici $x^2-75x+300=90-2x$ a) pomocí vzorce, b) rozkladem na součin dvojčlenů.
3. Rozměry čtvercového záhonu zmenšíme tak, že délku zkrátíme o 1,2 m a šířku zkrátíme o 1,5 m. Obsah takto získaného obdélníku bude 14,4 m². Jaké byly rozměry čtvercového záhonu a jaké jsou rozměry nového záhonu?

# Nerovnice

- **Nerovnost** <, > (≥, ≤) je relace, která je
  - antireflexivní (reflexivní),
  - antisymetrická,
  - tranzitivní,

  jedná se tedy o relaci **ostrého** (**neostrého**) **lineárního uspořádání**.
- **Nerovnice** – zápis nerovnosti dvou výrazů, z nichž alespoň jeden obsahuje neznámou.
- Na ZŠ: interval, n-prvková množina, lineární nerovnice s jednou neznámou, seznámení s ekvivalent. a důsl. úpravami.