1 Lineární (vektorová) algebra

Matematika pro ekonomy

Jaro 2012

Ivana Vaculová

Osnova:

1 Definice lineárního (vektorového) prostoru

2 Příklady lineárních (vektorových) prostorů

A) Geometrický lineární (vektorový) prostor

B) Aritmetický lineární (vektorový) prostor (sčítání vektorů, násobení vektoru číslem, skalární součin vektorů)

3 Lineární závislost a nezávislost vektorů

4 N-dimenzionální prostor

5 Lineární kombinace vektorů

6 Báze lineárního prostoru

7 Hodnost lineárního prostoru

8 Další operace s vektory (velikost vektoru, skalární součin, úhel dvou vektorů, vektorový součin)

1 Definice lineárního (vektorového) prostoru

Množinu **V** spolu s operacemi „**+**“: **V × V → V** a „**.**“ : **R × V → V,**

tedy uspořádanou trojici **(V, +, .)** nazýváme **lineárním (vektorovým) prostorem,** jsou-li splněny následující axiómy:

1) **$x + y = y + x$** pro každé $x, y \in V$,
2) **$(x + y) + z = x + (y + z)$** pro každé $x, y, z \in V$,
3) Existuje **o** ∈ V tak, že **$x + o = x$** pro každé $x \in V$,
4) Pro každé **x** ∈ V existuje **- x** ∈ V tak, že **$x + (-x) = o$**,
5) **$a . (x + y) = a.x + a.y$** pro každé $x, y \in V$ a $a \in R$,
6) **$(a + b) . x = a . x + b . x$** pro každé $x \in V$ a $a, b \in R$,
7) **$(ab) . x = a . (b . x)$** pro každé $x \in V$ a $a, b \in R$,
8) **$1x = x$** pro každé $x \in V$.

Pozn.: Prvky **x, y, z** ϵ **V** nazýváme **vektory**, čísla **a, b, c** ϵ **R** nazýváme **skaláry**.
Operaci „**+**“: **V × V -> V** nazýváme **sčítání vektorů** na množině V.
Operaci „**.**“ : **R × V -> V,** nazýváme **násobení vektoru z V reálným číslem.**
Prvek **o** ∈ V nazýváme **nulový vektor.**
Prvek **-x** ∈ V nazýváme **opačný vektor** k vektoru **x.**

<u>Věta:</u>

Nechť **V** je vektorový prostor a **x** є V, pak platí:

1) 0 . **x** = **o**,
2) Z rovnosti **x** + **y** = **o** vyplývá **y = -x** (jednoznačnost existence opačného vektoru),
3) (-1) **x = - x.**

2 Příklady lineárních (vektorových) prostorů

A) Geometrický model vektorového prostoru

Množina všech **orientovaných úseček** v rovině s počátečním bodem O vzhledem ke **sčítání** orientovaných úseček a jejich **násobení** reálnými čísly je vektorový prostor.

B) Aritmetický model vektorového prostoru

Množina $\mathbf{V_n}$ všech **uspořádaných n-tic reálných čísel**, v níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení reálným číslem** vztahy:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$k\,\mathbf{x} = k\,(x_1, x_2, \dots, x_n) = (k\,x_1, k\,x_2, \dots, k\,x_n),\ k \in R,$$

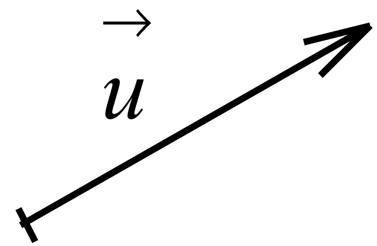
se nazývá **aritmetický lineární** (vektorový) **prostor**. Jeho prvky, tj. uspořádané n-tice reálných čísel se nazývají **aritmetické vektory** $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

souřadnice (složky) vektoru

Pozn.: **Nulový vektor o** ve $\mathbf{V_n}$ je takový vektor, ve kterém jsou všechny souřadnice rovny nule, tj. $\mathbf{o} = (0, \dots, 0)$.

Opačný vektor k vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ je vektor $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

Geometrická interpretace:



- **Nenulový vektor u =** množina všech orientovaných úseček, které mají **stejnou velikost** a **stejný směr**.
- **Nulový vektor o =** množina všech **nulových** orientovaných úseček.

Souřadnice vektoru v rovině:

➢ je-li vektor **u** = (u_1, u_2) určen orientovanou úsečkou **AB**, nazývají se čísla u_1, u_2 souřadnice vektoru **u** a platí pro ně tyto vztahy:

$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= b_1 - a_1 \\ u_2 &= b_2 - a_2 \end{aligned}}$$

Souřadnice vektoru v prostoru:

➢ je-li vektor **u** = (u_1, u_2 , u_3) určen orientovanou úsečkou **AB**, nazývají se čísla u_1, u_2 , u_3 souřadnice vektoru **u** a platí pro ně tyto vztahy:

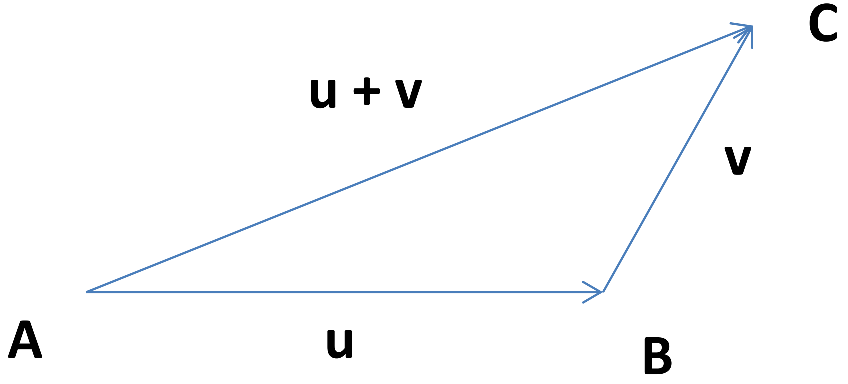
$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= b_1 - a_1 \\ u_2 &= b_2 - a_2 \\ u_3 &= b_3 - a_3 \end{aligned}}$$

Součet vektorů u = B – A,

v = C – B

⟹ je vektor C – A.

Zapisujeme: **u + v = C – A**



Úlohy

1) Jsou dány body A, B. Určete vektor ***u*** = B – A, je-li

a) A [1, 3], B [-1, 2]
b) A [-1, -1, -3], B [-2, -4, 1]

2) V prostoru je dán bod B [1, 3, 3] a vektor ***u =*** (3, 1, 2). Určete bod A tak, aby platilo ***u* =** B - A.

Aritmetická interpretace:

Sčítání vektorů

V rovině (V_n, kde n = 2):

- **u** = (u_1, u_2), **v** = (v_1, v_2)

$$\boxed{u+v=\left(u_1+v_1;u_2+v_2\right)}$$

- Pro každé dva vektory **u**, **v** platí:

$$\boxed{u+v=v+u}$$

V prostoru (V_n, kde n = 3): :

- **u** = (u_1, u_2 , u_3), **v** = (v_1, v_2 , v_3)

$$\boxed{u+v=\left(u_1+v_1;u_2+v_2;u_3+v_3\right)}$$

- Pro každé tři vektory **u**, **v, w** platí:

$$\boxed{\left(u+v\right)+w=u+\left(v+w\right)}$$

Úloha

Vypočítejte součty a rozdíly vektorů ***u*** a ***v***, je-li

a) ***u*** = (1, 2, -2), ***v*** = (3, 1, 1)

b) ***u*** = (2, -1, 2), ***v*** = (1, 1, 0)

Aritmetická interpretace:

Násobení vektoru reálným číslem

V rovině:

- Pro každý vektor **u** = (u_1, u_2) v rovině a každé číslo *k* platí:

$$\boxed{ku = (ku_1; ku_2)}$$

V prostoru:

- Pro každý vektor **u** = (u_1, u_2 , u_3) v prostoru a každé číslo *k* platí:

$$\boxed{ku = (ku_1; ku_2; ku_3)}$$

Úloha

Vypočítejte souřadnice vektoru ***u =*** 2(3, -1, 1) + 2(1, 2, 5).

Dále pro každé dva vektory u, v a každá čísla k, l platí:

$0 \cdot u = o$ ⇒ Př.: $0 \cdot (2;-1) = (0;0)$

$(-1) \cdot u = -u$ ⇒ Př.: $-1(2;-1) = (-2;1)$

$k(lu) = (kl)u$ ⇒ Př.: $2[3 \cdot (2;-1)] = 2[(6;-3)] = (12;\,-6) \wedge (2 \cdot 3) \cdot (2;-1) = 6 \cdot (2;-1) = (12;\,-6)$

$k(u+v) = ku + kv$ ⇒ Př.: $2[(2;-1)+(1;3)] = 2[(3;2)] = (\quad) \wedge 2(2;-1) + 2(1;3) = (4;-2) + (2;6) = (\quad)$

$(k+l)u = ku + lu$ ⇒ Př.: $(2+3)(2;-1) = 5(2;-1) = (10;\,-5) \wedge 2(2;-1) + 3(2;-1) = (4;-2) + (6;-3) = (10;\,-\ )$

Úlohy

1) Jsou dány vektory $\boldsymbol{u} =$ (3, -1, 1) , $\mathbf{v}$ =(1, 2, -5) a reálné číslo k = - 2.
Vypočítejte:

a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} =$
b) $k\mathbf{u} =$
c) $k\mathbf{v} =$

2) Vypočítejte souřadnice vektoru $\boldsymbol{w} = 5\,\boldsymbol{v} - 3\,\boldsymbol{u}$, je-li

a) $\boldsymbol{u} = (-1, 2, 1)$, $\boldsymbol{v} = (1, 0, 1)$
b) $\boldsymbol{u} = (2, -1, 2)$, $\boldsymbol{v} = (1, 1, 0)$

3 Lineární závislost a nezávislost vektorů

Definice

Vektory $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n} \in \mathbf{V}$ nazýváme **lineárně závislé,** jestliže existují reálná čísla $c_1, c_2 \dots c_n$, z nichž **alespoň jedno ≠ 0**, taková, že platí

$$c_1 \mathbf{v_1} + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{o}$$

V opačném případě se nazývají **lineárně nezávislé**.

Úloha

Jsou dány vektory ***u, v, w*** z aritmetického lineárního prostoru V_3. Posuďte, zda jsou lineárně závislé či nezávislé.

a) ***u*** = (1, -1, 1), ***v*** = (2, 3, 0), ***w*** = (-1, -4, 1)
b) ***u*** = (1, 2, 4), ***v*** = (2, 1, 3), ***w*** = (4, -1, 1)
c) ***u*** = (1, 1, 1), ***v*** = (1, 1, 0), ***w*** = (1, 0, 0)

4 n-dimenzionální prostor

Definice

Vektorový prostor **V** se nazývá **n-dimenzionální , tzn. prostor dimenze *n* (n > 0),** existuje-li v něm ***n*** lineárně **nezávislých** vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ a platí-li, že každý vektor z **V** lze vyjádřit jako **lineární kombinaci** vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ **.**

5 Lineární kombinace vektorů

Definice

Nechť $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$, kde r ϵ R, jsou vektory z lineárního prostoru V. Říkáme, že vektor **v** je **lineární kombinací** vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$, jestliže existují reálná čísla $c_1, c_2 \dots c_r$ taková, že platí

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_r\mathbf{v}_r$$

Čísla $c_1, c_2 \dots c_r$ se nezývají **koeficienty lineární kombinace.**

Pozn.: Lineární kombinace jednoho vektoru je jeho násobek.

Úloha

Zjistěte, zda vektor ***w*** je lineární kombinací vektorů ***u, v***:

a) ***w*** = (-2, 4, -6), ***u*** = (1, 3, -2), ***v*** = (2, 1, 1)
b) ***w*** = (1, 1, 2), ***u*** = (-1, 0, 1), ***v*** = (2, 2, 3)

6 Báze lineárního (vektorového) prostoru

Definice

Každou množinu *n* lineárně **nezávislých** vektorů $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n} \in \mathbf{V_n}$ nazýváme **bází ve $\mathbf{V_n}$** a zapisujeme $\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n} \rangle$ **.**

<u>Příklad:</u> Jednotkové vektory v aritmetickém lineárním prostoru $\mathbf{V_3}$

$$\mathbf{j_1} = (1,0,0),\ \mathbf{j_2} = (0,1,0),\ \mathbf{j_3} = (0,0,1)$$

jsou příkladem báze $\mathbf{V_3}$. Snadno se totiž přesvědčíme, že pro každý vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ z $\mathbf{V_3}$ platí, že ho můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{j_1}, j_2, \mathbf{j_3}$, tj.:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{j_1} + x_2 \mathbf{j_2} + x_3 \mathbf{j_3}$$

a rovnice $c_1 \mathbf{j_1} + c_2 j_2 + c_3 j_3 = \mathbf{o}$

Má jediné řešení $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ => $\mathbf{j_1}, j_2, \mathbf{j_3}$ jsou lineárně nezávislé.

Úlohy

1) Posuďte, zda následující vektory tvoří bázi V_4:

a) $x_1 = (1, 5, 4, 3)$, $x_2 = (1, 2, 1, 4)$, $x_3 = (-1, -3, -2, -1)$, $x_4 = (2, 1, 3, 2)$
b) $x_1 = (1, 1, 0, -1)$, $x_2 = (2, 0, 1, 2)$, $x_3 = (-1, 2, 2, 1)$, $x_4 = (3, 1, 1, 3)$
c) $x_1 = (1, 0, 2, 3)$, $x_2 = (-1, 1, 0, 0)$, $x_3 = (2, 5, 7, 3)$

2) Zjistěte, zda dané vektory tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbf{V_3}$.
V kladném případě vyjádřete vektor **a** = (1, 1, 2) jako jejich lineární kombinaci.

a) $x_1 = (1, 1, 1)$, $x_2 = (1, 1, 0)$, $x_3 = (2, 0, 0)$,
b) $x_1 = (0, 1, -1)$, $x_2 = (0, 2, -2)$, $x_3 = (1, 1, 3)$,
c) $x_1 = (1, 2, 1)$, $x_2 = (0, 1, 1)$, $x_3 = (0, 0, 3)$.

7 Hodnost lineárního (vektorového) prostoru

Definice

Počet vektorů v libovolné **bázi** lineárního prostoru **V** se nazývá **hodnost** (nebo dimenze lineárního prostoru **V**).

Poznámky:

- Hodnost neboli dimenzi lineárního prostoru V značíme h (V).
- Ve triviálním prostoru {**o**} báze neexistuje, proto definujeme h ({**o**}) = 0.
- Hodnost lineárního prostoru V je rovna maximálnímu počtu lineárně nezávislých vektorů ve V.

Příklad:

Hodnost aritmetického lineárního prostoru V_n je rovna n, tj. $h(V_n) = n$.

Cvičení

1. Určete aritmetický vektor x , pro který platí:

a) $x = 3a + 5b - c$, je-li $a = (4, 1, 3, -2)$, $b = (1, 2, -3, 2)$, $c = (16, 9, 1, -3)$,

b) $x = -a + 4b - 6c + 2d$, je-li $a = (1, 1, -1, -1)$, $b = (0, 0, 0, 0)$, $c = (1/2, 0, 1, 4)$, $d = (-1, -1, 1, 1)$,

2. Zjistěte, zda jsou dané vektory lineárně závislé a v kladném případě vyjádřete jeden z nich jako lineární kombinaci ostatních:

a) $a = (1, 2, 3)$, $b = (3, 6, 7)$,

b) $a = (4, -2, 6)$, $b = (6, -3, 9)$,

c) $a = (5, 4, 3)$, $b = (3, 3, 2)$, $c = (8, 1, 3)$.

3. Zjistěte, zda jsou vektory $a = (1,-1,1)$, $b = (1,1,0)$, $c = (0,1,1)$ lineárně závislé, v kladném případě vyjádřete vektor a jako lineární kombinaci vektorů b, c.

4. Určete číslo t tak, aby vektory $a = (1,0,0)$, $b = (0,1,0)$, $c = (0,0,t)$ byly lineárně závislé.

Další operace s vektory

Velikost vektoru

- **Velikost vektoru *u*** je velikost kterékoliv orientované úsečky **AB** určující vektor ***u***
- **Velikost vektoru *u*** označujeme symbolem **|*u*|**.

V rovině:

Pro každý vektor **u** = (u_1, u_2) platí:

$$\boxed{|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$$

V prostoru:

Pro každý vektor **u** = (u_1, u_2 , u_3) platí:

$$\boxed{|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

Dále platí:

- Jestliže **|*u*|**= 1 , nazývá se vektor ***u*** **jednotkový vektor**
- ***u*** = ***o*** $\Leftrightarrow$ **|*u*|** = 0

Úlohy

1) Vypočítejte velikost vektoru $\boldsymbol{u} = (4, -3)$.

2) Vypočítej velikost vektoru $\boldsymbol{AB}$, je-li A [-1, 3, -2], B [0, 5, -3].

Skalární součin vektorů

V rovině:

Skalární součin dvou vektorů
u = (u_1, u_2), **v** = (v_1, v_2) je číslo:

$$\boxed{u_1 v_1 + u_2 v_2}$$

V prostoru:

Skalární součin dvou vektorů
u = (u_1, u_2 , u_3), **v** = (v_1, v_2 , v_3) je číslo:

$$\boxed{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}$$

Dále platí:

$$\boxed{u \cdot u = u^2 = u_1^2 + u_2^2}$$

$$\boxed{u \cdot u = u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

- Pro každé vektory ***u, v, w*** (v rovině nebo v prostoru) a každé ***c ϵ R*** platí:

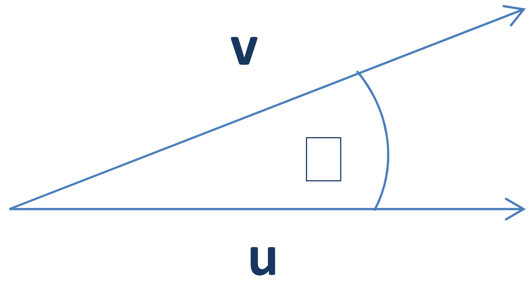
$$\boxed{\begin{array}{l} uv = vu \\ (cu)v = c(uv) \\ w(u+v) = wu + wv \end{array}}$$

Úlohy

1) Vypočítejte skalární součin vektorů ***u, v***, pro které platí:

a) $\boldsymbol{u} = (1, 2)$, $\boldsymbol{v} = (-1, 1)$
b) $\boldsymbol{u} = (3, -2, -4)$, $\boldsymbol{v} = (-1, 3, -2)$

Úhel dvou vektorů



Pro **velikost úhlu** vektorů ***u, v*** platí následující vztahy:

V rovině:

u = (u_1, u_2), **v** = (v_1, v_2)

$$\cos\varphi = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

V prostoru:

u = (u_1, u_2 , u_3), **v** = (v_1, v_2 , v_3) :

$$\cos\varphi = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

$$u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u \perp v$$

Úlohy

1) Vypočítejte úhel dvou vektorů ***u, v***, pro které platí:

a) ***u*** = (1, 1), ***v*** = (-1, 1)
b) ***u*** = (-1, 1, 0), ***v*** = (-2, 4, 2)

2) Je dán vektor ***v.*** Určete vektor ***u*** tak, aby platilo $v \perp u$

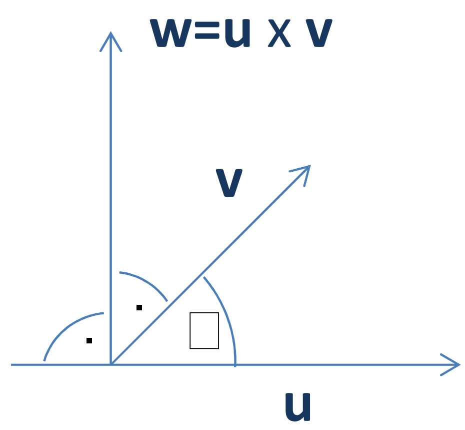
a) ***v*** = (1, 3)
b) ***v*** = (1, 0, -2)

Vektorový součin

-> provádíme, pokud chceme ke dvěma vektorům ***u, v***, které neleží na jedné přímce, najít vektor kolmý k oběma vektorům.

- Jestliže **u** = (u_1, u_2 , u_3), **v** = (v_1, v_2 , v_3), pak vektor k oběma vektorům kolmý je vektor

$$\boxed{w = \left(u_2 v_3 - u_3 v_2 ; u_3 v_1 - u_1 v_3 ; u_1 v_2 - u_2 v_1\right)}$$



- Pro velikost vektoru ***w*** platí:

$$\boxed{w = |u| \cdot |v| \cdot \sin \alpha}$$

Pozn.: Mnemotechnická pomůcka pro výpočet vektorového součinu:

u_2	u_3	u_1	u_2
v_2	v_3	v_1	v_2

$$u_2 v_3 - u_3 v_2 \qquad u_3 v_1 - u_1 v_3 \qquad u_1 v_2 - u_2 v_1$$

Úlohy

1) Vypočítejte souřadnice vektorového součinu ***u*** x ***v***, je-li:

a) ***u*** = (2, -2, 4), ***v*** = (3, -2, 1)

b) ***u*** = (1, 0, 3), ***v*** = (-1, 0, -2)

Literatura

- Kaňka M. a kol. Učebnice matematiky pro ekonomické fakulty. Praha: Victoria Pubishing, 1996.
- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Kočandrle, M. Boček, L. Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie, Praha: Prometheus, 1995.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/MatematikaI/08_MI_KAP%202_1.pdf