

3. Diferenciální počet funkcí reálné proměnné

Matematika pro ekonomy

Jaro 2012

Ivana Vaculová

Osnova:

A) Funkce – opakování (vlastnosti funkcí, lineární, kvadratické, mocninné, exponenciální a logaritmické funkce)

B) Derivace funkce

1 Pojem derivace

2 Geometrický význam derivace funkce

3 Derivace základních funkcí

4 Vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

5 Derivace složené funkce

6 Aplikace – vyšetřování průběhu funkce

6. 1 Monotónnost funkce

6. 2 Extrémy funkce

6. 3 Konkávní a konvexní funkce, inflexní body

A) Funkce - opakování

Pojem funkce

V odborných a přírodovědných předmětech se často setkáváme s úlohami, ve kterých se hodnoty jedné veličiny mění v závislosti na hodnotách jiné veličiny. Tuto závislost popisujeme pomocí pojmu **funkce** jako zobrazení v **R**.

*Nechť **A** a **B** jsou dvě neprázdné množiny reálných čísel. Přiřadíme-li každému číslu **x** z množiny **A** podle nějakého předpisu právě jedno číslo **y** z množiny **B**, které označíme **y=f(x)**, pak množina **f** uspořádaných dvojic **[x;f(x)]** se nazývá **reálná funkce reálné proměnné x** (stručně **funkce f**).*

$$f : y = f(x), x \in D(f)$$

Množinu A označujeme **D(f)** a nazýváme **definičním oborem funkce f**.

Množinu B označujeme **H(f)** a nazýváme **oborem hodnot funkce f**.

Číslo **x** je **nezávisle** proměnná, argument funkce **f**.

Číslo **y** je **závisle** proměnná, funkční hodnota funkce **f** v bodě **x**.

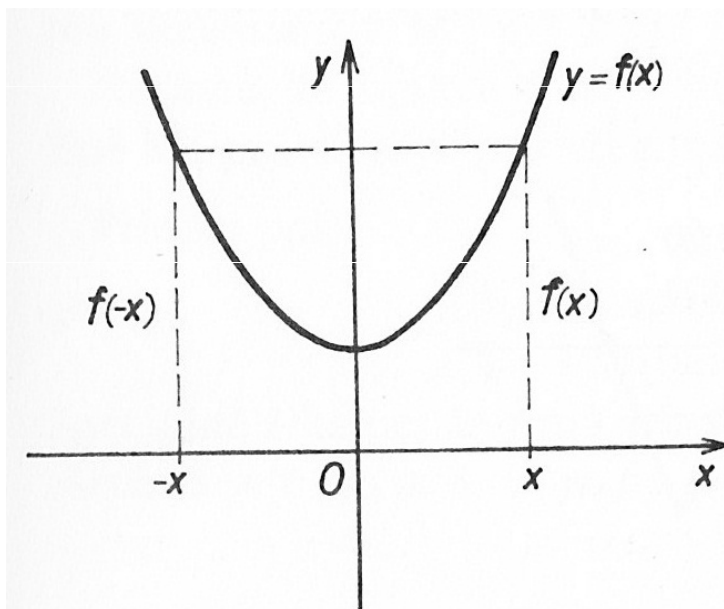
Vlastnosti funkcí

a) Sudé funkce, liché funkce

Sudá funkce

$$\forall x \in D(f) : -x \in D(f)$$

$$\forall x \in D(f) : f(-x) = f(x)$$



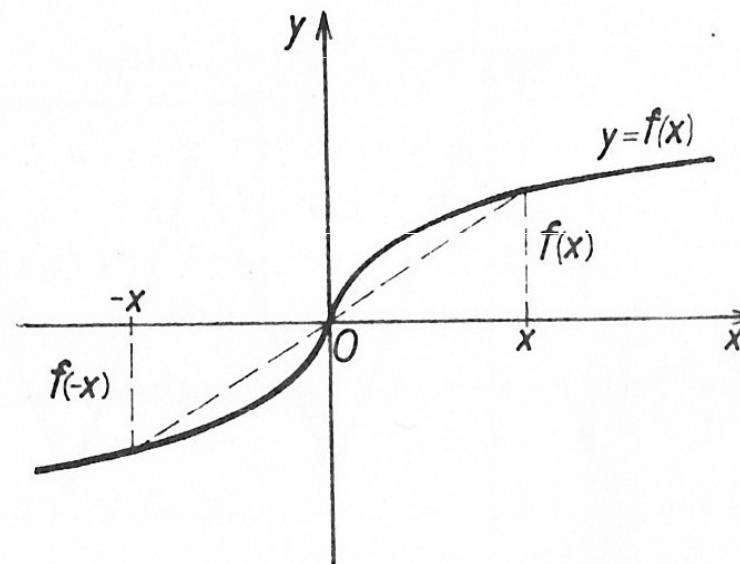
Graf je souměrný podle osy y.

Např.: $f_1 : y = x^2, D(f) = \mathbb{R}$
 $f_2 : y = x^{-2}, D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Lichá funkce

$$\forall x \in D(f) : -x \in D(f)$$

$$\forall x \in D(f) : f(-x) = -f(x)$$



Graf je středově souměrný podle počátku.

Např.: $f_1 : y = x^3, D(f) = \mathbb{R}$
 $f_2 : y = x^{-3}, D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

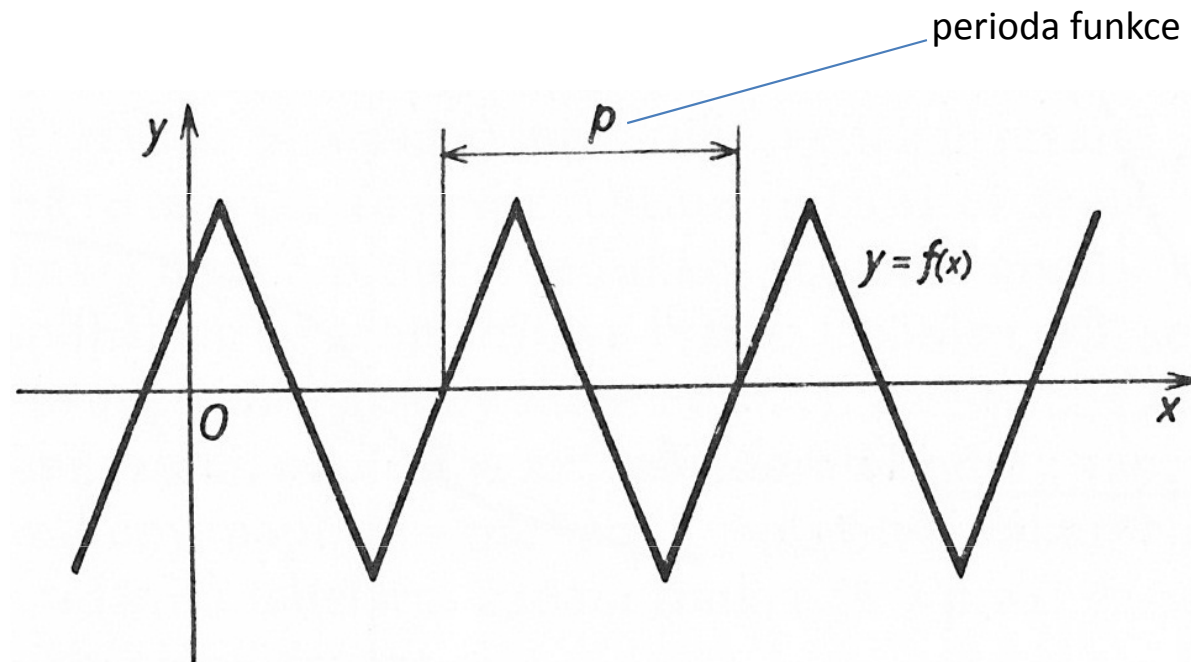
Vlastnosti funkcí

b) Periodické funkce

Funkce se nazývá **periodická**, právě když existuje takové číslo $p > 0$, že pro každé $k \in \mathbf{Z}$ platí:

1) Je-li $x \in D(f)$, pak $x + kp \in D(f)$

2) $f(x + kp) = f(x)$



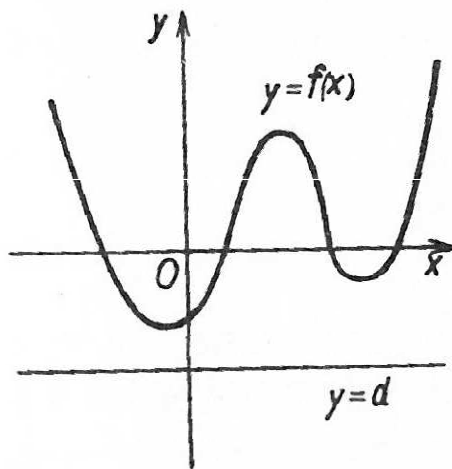
Např.: $f_1 : y = \cos x$, $f_2 : y = \sin x$
 $f_3 : y = \operatorname{tg} x$, $f_4 : y = \operatorname{cotg} x$

Vlastnosti funkcí

c) Funkce omezená (zdola, shora), maximum a minimum funkce

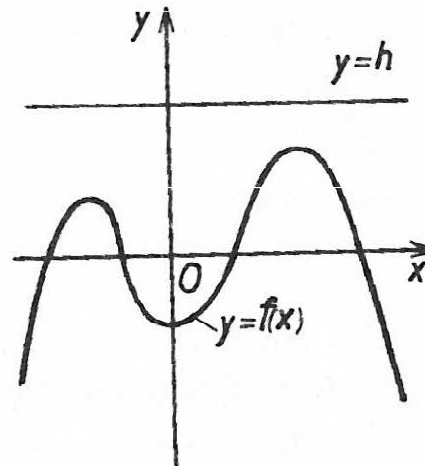
Zdola omezená

$\exists d: \forall x \in D(f) \text{ je } f(x) \geq d$



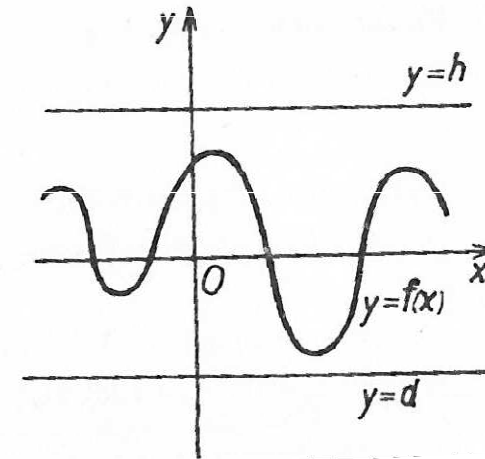
Shora omezená

$\exists h: \forall x \in D(f) \text{ je } f(x) \leq h$



Omezená

Je omezená shora i zdola.



Funkce f má v bodě a maximum, právě když:

$\forall x \in D(f) \text{ je } f(x) \leq f(a)$

Funkce f má v bodě b minimum, právě když:

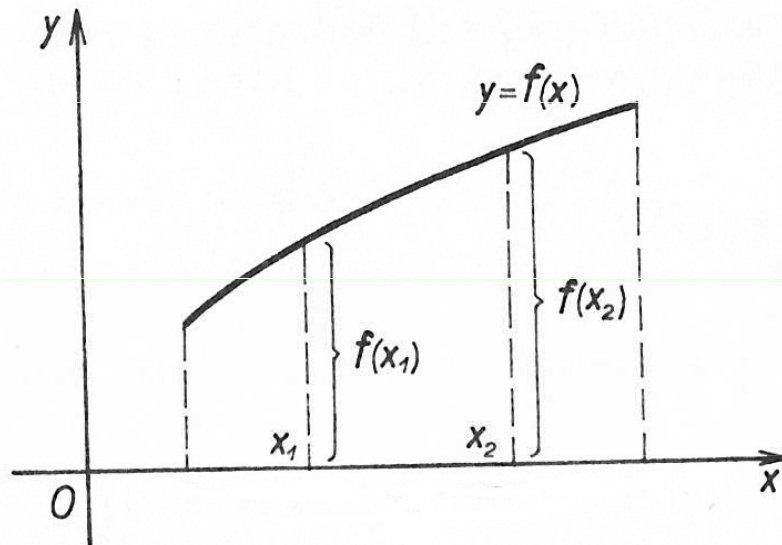
$\forall x \in D(f) \text{ je } f(x) \geq f(b)$

Vlastnosti funkcí

d) Rostoucí a klesající funkce

Rostoucí funkce

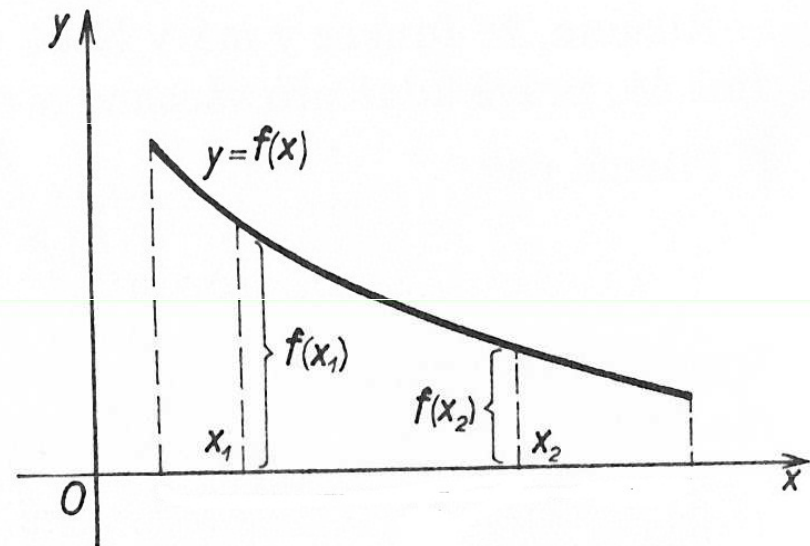
$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



Je-li funkce rostoucí, pak je prostá.

Klesající funkce

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



Je-li funkce klesající, pak je prostá.

$$\text{Funkce je prostá} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

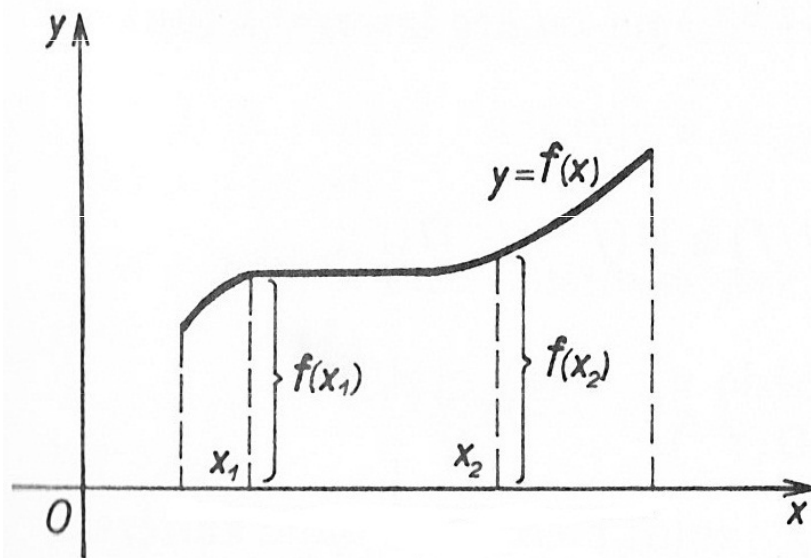
Funkce rostoucí a klesající se souhrnně nazývají **RYZE MONOTÓNÍ**.

Vlastnosti funkcí

d) Neklesající a nerostoucí funkce

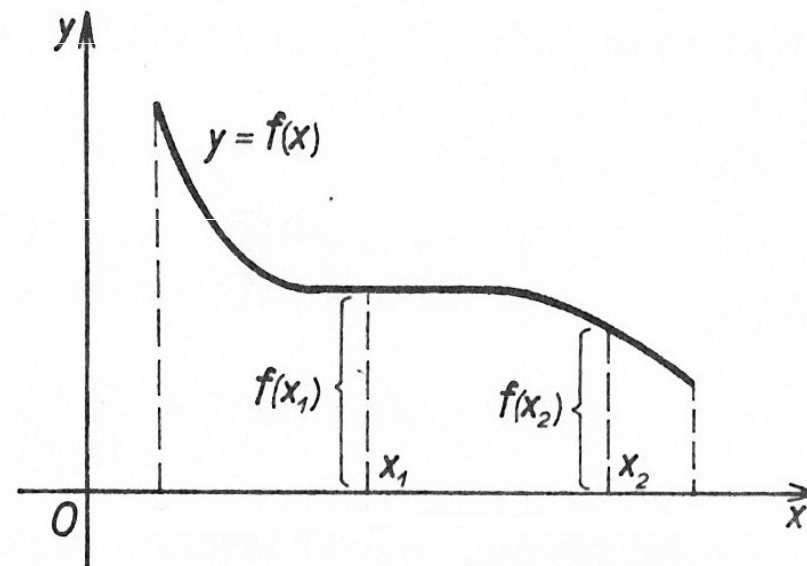
Neklesající funkce

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



Nerostoucí funkce

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



Funkce nerostoucí a neklesající se souhrnně nazývají **MONOTÓNÍ**.

Vlastnosti funkcí

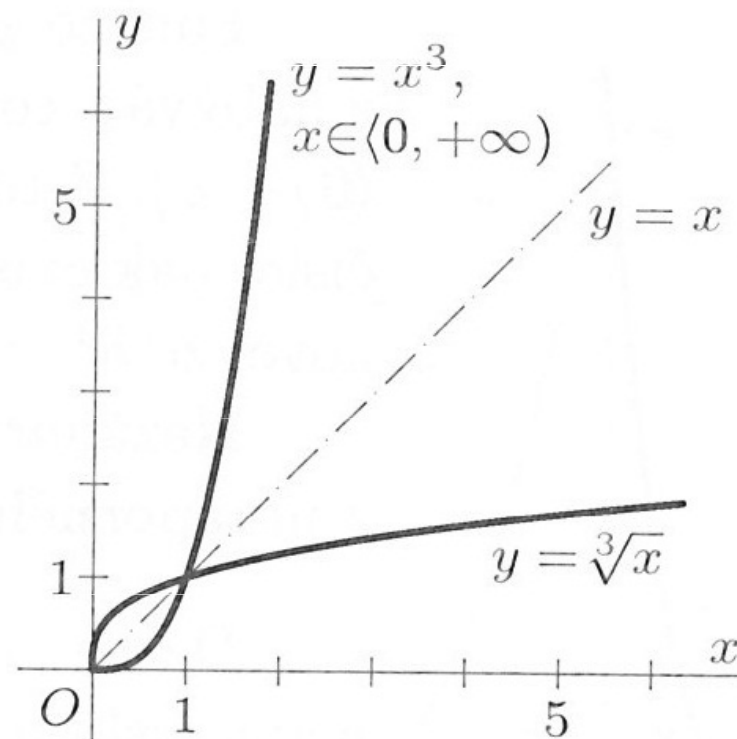
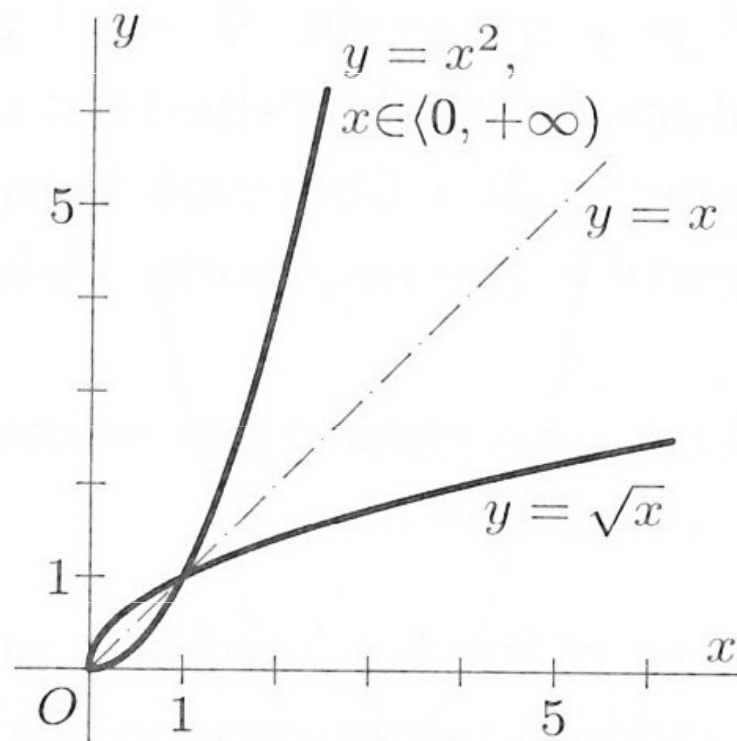
e) Inverzní funkce

Inverzní funkce k *prosté* funkci f je funkce f^{-1} , pro kterou platí:

1. $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$
2. Každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě to $x \in D(f)$, pro které je $f(x) = y$.

Grafy funkcí f a f^{-1} sestrojené v téže soustavě souřadnic Oxy se stejnou délkovou jednotkou na obou osách **jsou souměrně sdruženy podle přímky $y = x$.**

Např.:

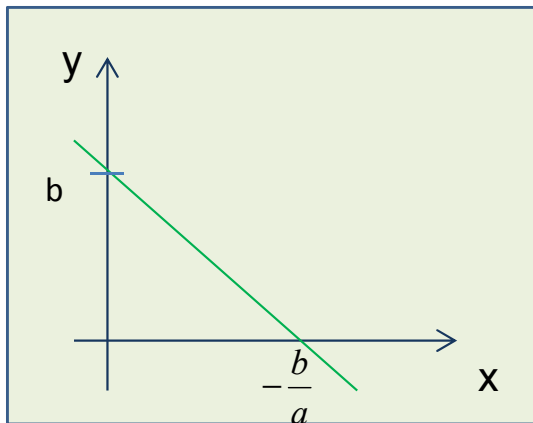


1 LINEÁRNÍ FUNKCE

$$f : y = ax + b, \quad D(f) = R$$

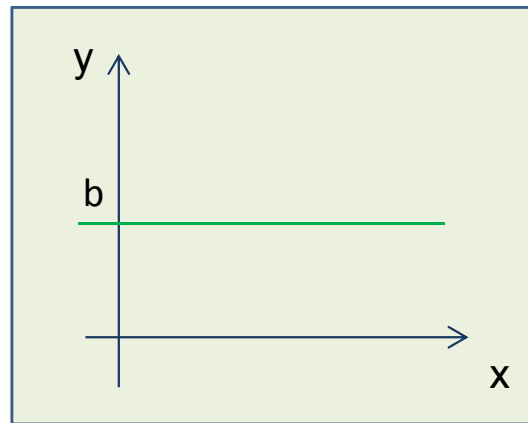
Graf: Přímka

$$a < 0$$



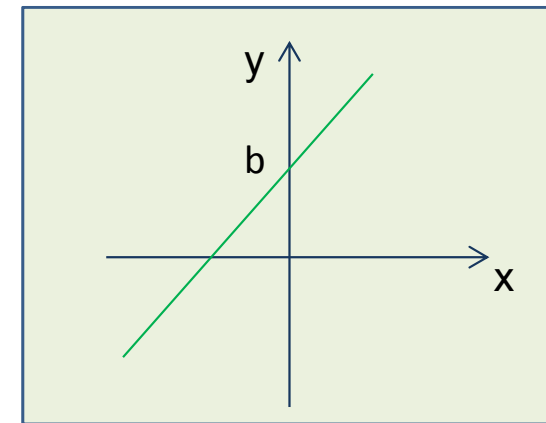
$D(f) = R, H(f) = R$
Není omezená ani shora, ani zdola.
Je klesající, tedy prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je spojitá v R .

$$a = 0$$



$D(f) = R, H(f) = \{b\}$
Je omezená.
Je nerostoucí a neklesající.
Není prostá.
Má maximum a minimum pro každé $x \in R$.
Je spojitá v R .

$$a > 0$$



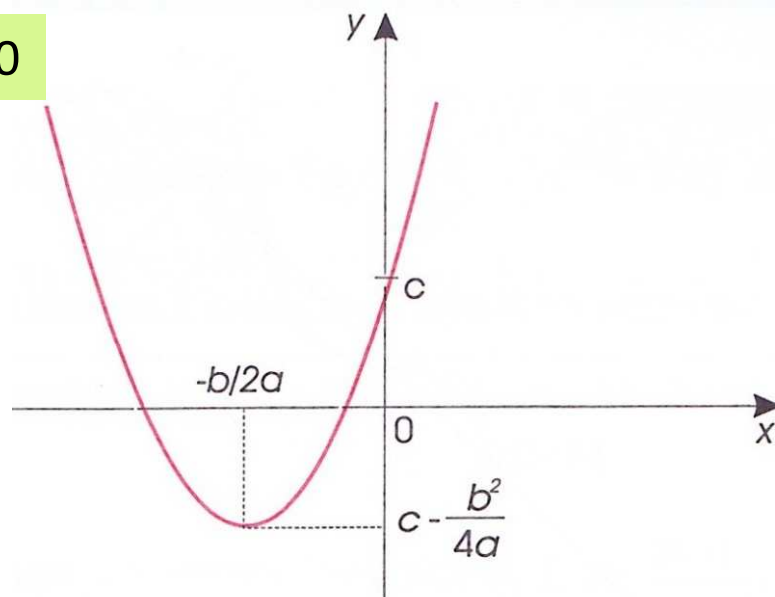
$D(f) = R, H(f) = R$
Není omezená ani shora, ani zdola.
Je rostoucí, tedy prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je spojitá v R .

2 KVADRATICKÁ FUNKCE

= každá funkce typu: $f : y = ax^2 + bx + c, a \neq 0, D(f) = R$

Graf: Parabola

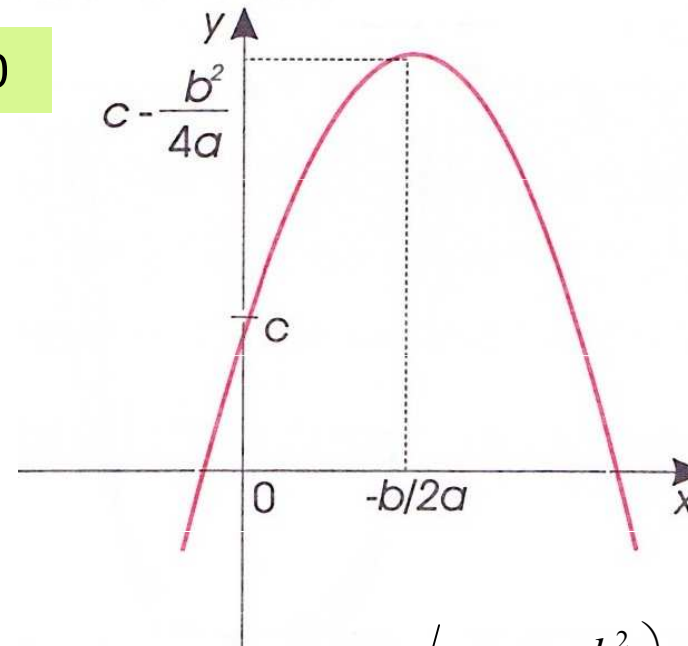
$a > 0$



$$D(f) = R, H(f) = \left\langle c - \frac{b^2}{4a}; +\infty \right\rangle$$

Je zdola omezená, není shora omezená.
Pro $b=0$ je sudá, jinak ani sudá, ani lichá.
Je rostoucí pro $x \in \langle -b/2a, +\infty \rangle$.
Je klesající pro $x \in \langle +\infty, -b/2a \rangle$.
Není prostá.
Má ostré minimum $[-b/2a; c - b^2/4a]$
Je spojitá v R .

$a < 0$



$$D(f) = R, H(f) = \left\langle -\infty; c - \frac{b^2}{4a} \right\rangle$$

Je shora omezená, není zdola omezená.
Pro $b=0$ je sudá, jinak ani sudá, ani lichá.
Je rostoucí pro $x \in \langle +\infty, -b/2a \rangle$.
Je klesající pro $x \in \langle -b/2a, +\infty \rangle$.
Není prostá.
Má ostré maximum $[-b/2a; c - b^2/4a]$
Je spojitá v R .

3 MOCNINNÁ FUNKCE S PŘIROZENÝM MOCNITELEM

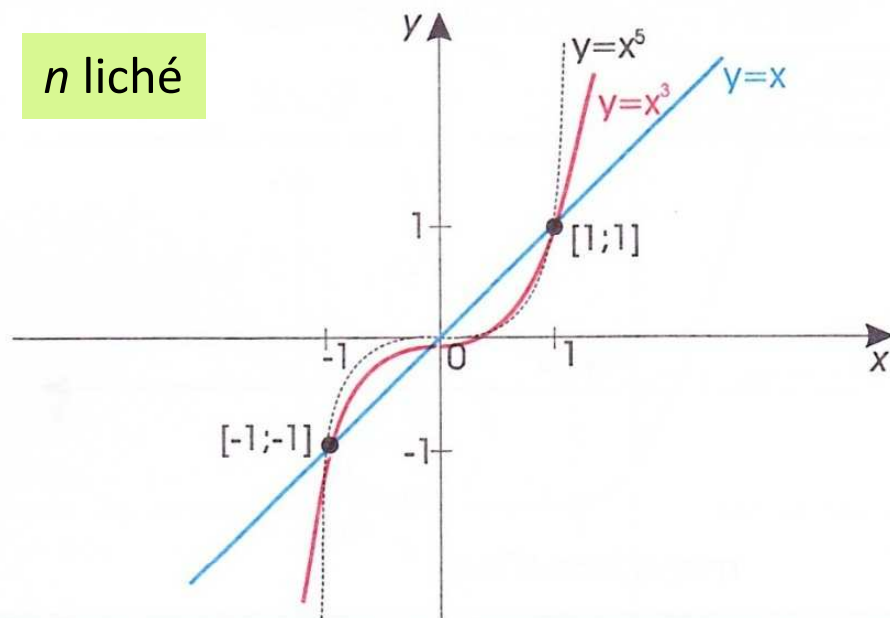
$$f : y = x^n, \quad n \in \mathbb{N}, D(f) = \mathbb{R}$$

Pro: $n = 1$: lineární funkce $f: y = x$

$n = 2$: kvadratická funkce $f: y = x^2$

$n = 3$: kubická funkce $f: y = x^3$

n liché



$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \mathbb{R}$

Je lichá.

Není ani shora, ani zdola omezená.

Je rostoucí, tedy prostá.

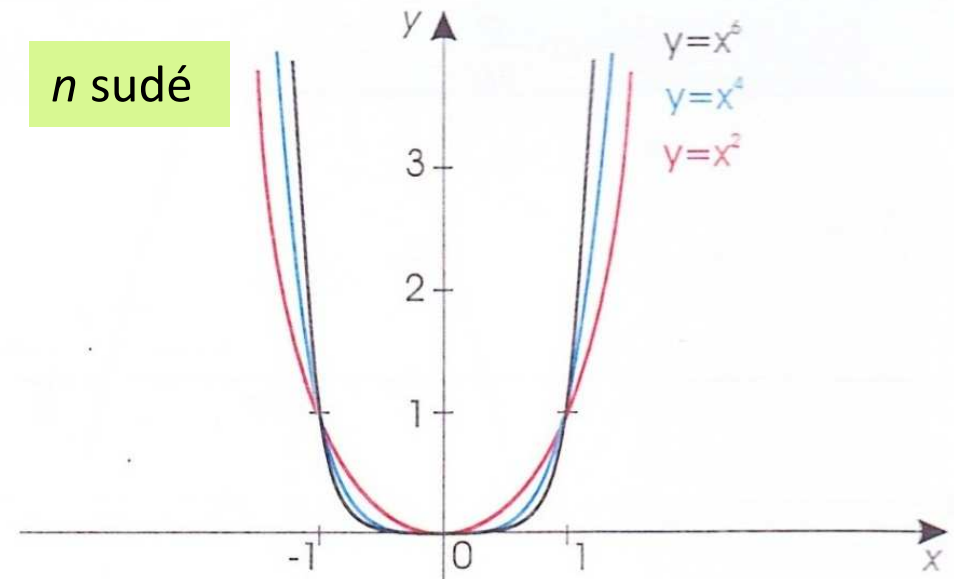
Nemá maximum, ani minimum.

Je spojitá v \mathbb{R} .

Graf: $n = 1$: přímka

$n > 1$: parabola n -tého stupně

n sudé



$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \langle 0, +\infty \rangle$

Je sudá.

Je zdola omezená, není shora omezená.

Je rostoucí pro $x \in \langle 0, +\infty \rangle$.

Je klesající pro $x \in \langle -\infty, 0 \rangle$.

Není prostá.

Nemá maximum, má minimum $[0,0]$.

Je spojitá v \mathbb{R} .

4 MOCNINNÁ FUNKCE SE ZÁPORNÝM CELÝM MOCNITELEM

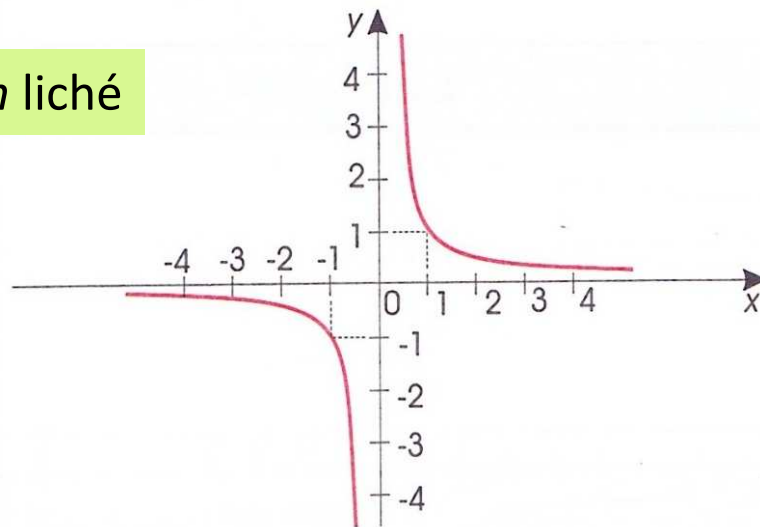
= funkce

$$f : y = x^{-n}, \quad n \in N, D(f) = R$$

Graf:

hyperbola stupně $n+1$

n liché



$$D(f) = R - \{0\}, H(f) = R - \{0\}$$

Je lichá.

Není ani shora, ani zdola omezená.

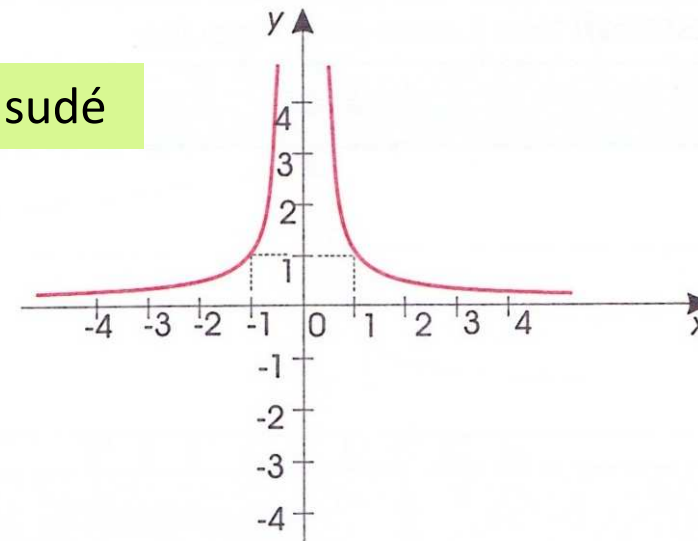
Klesá pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, +\infty)$.

Nemá maximum, ani minimum.

Je spojitá pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, +\infty)$.

Je prostá.

n sudé



$$D(f) = R - \{0\}, H(f) = (0, +\infty).$$

Je sudá.

Je omezená zdola, není shora omezená.

Je rostoucí pro $x \in (-\infty, 0)$.

Je klesající pro $x \in (0, +\infty)$.

Není prostá.

Nemá maximum, ani minimum.

Je spojitá pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, +\infty)$.

5 LOMENÁ RACIONÁLNÍ FUNKCE

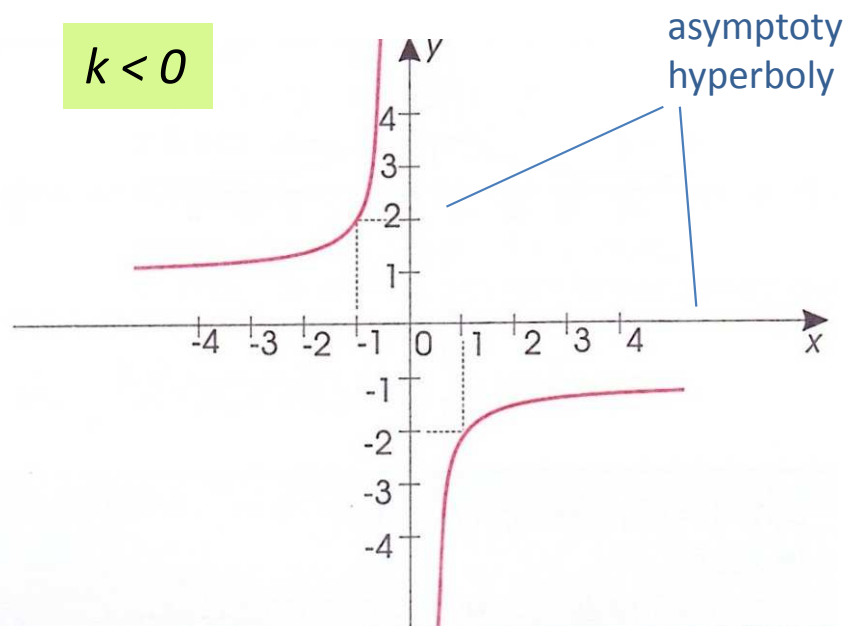
$$f: y = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad Q(x) \neq 0$$

Nepřímá
úměrnost:

$$f: y = \frac{k}{x}, \quad k \neq 0, D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Graf: rovnoosá hyperbola

$k < 0$



$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}, H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Je lichá.

Není ani shora, ani zdola omezená.

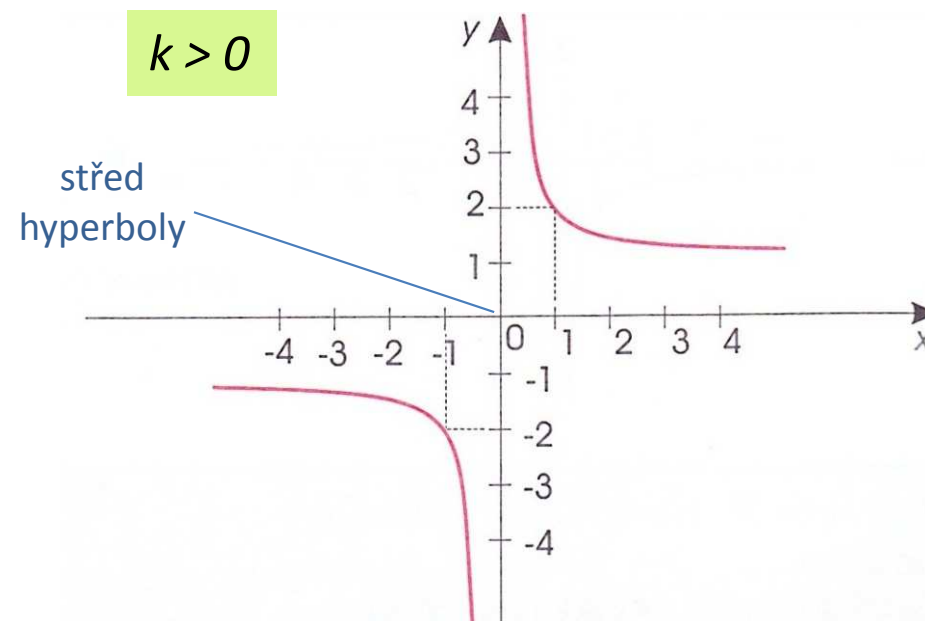
Je rostoucí pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, +\infty)$.

Je prostá.

Nemá maximum, ani minimum.

Je spojitá pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, +\infty)$.

$k > 0$



$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}, H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Je lichá.

Není ani shora, ani zdola omezená.

Je klesající pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, +\infty)$.

Je prostá.

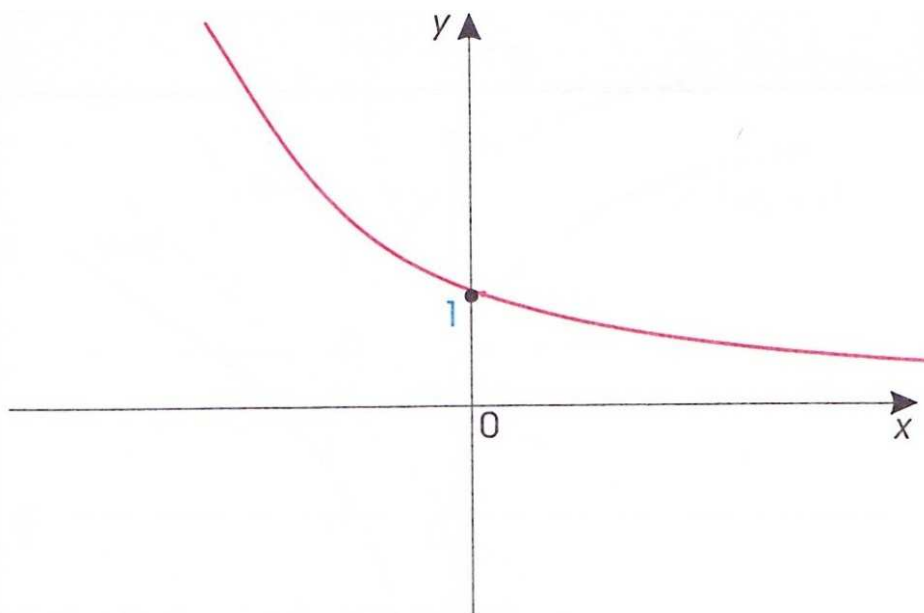
Nemá maximum, ani minimum.

Je spojitá pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, +\infty)$.

6 EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

$$f : y = a^x, \quad a > 0, a \neq 1, D(f) = \mathbb{R}$$

$$0 < a < 1$$



$$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = (0; \infty).$$

Není ani sudá, ani lichá.

Je omezená zdola ($a^x > 0$), není omezená shora.

Je klesající, tedy prostá.

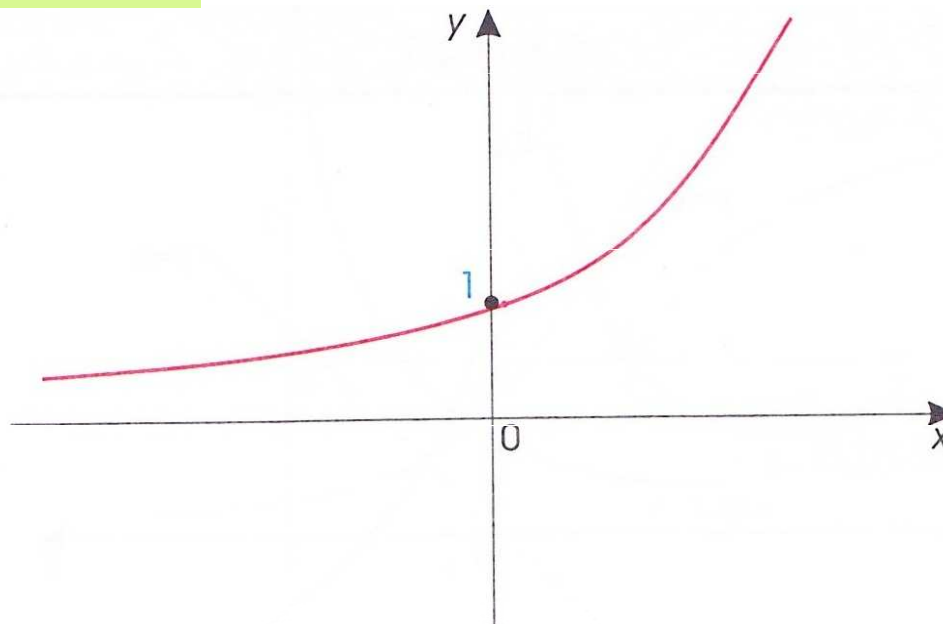
Nemá maximum, ani minimum.

Je inverzní k funkci logaritmické.

Je spojitá v \mathbb{R} .

Graf: exponenciální křivka
(exponenciála)

$$a > 1$$



$$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = (0; \infty).$$

Není ani sudá, ani lichá.

Je omezená zdola ($a^x > 0$), není omezená shora.

Je klesající, tedy prostá.

Nemá maximum, ani minimum.

Je inverzní k funkci logaritmické.

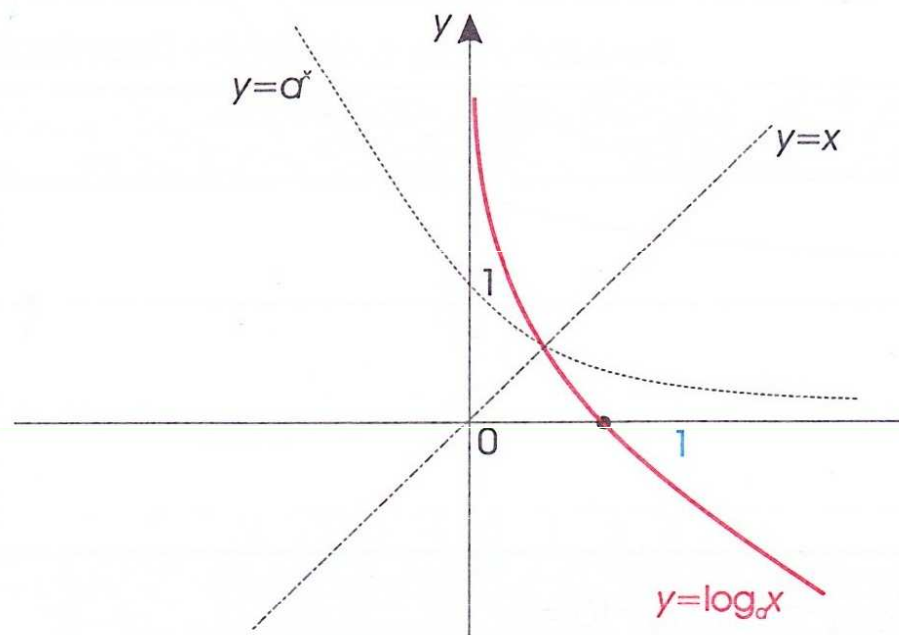
Je spojitá v \mathbb{R} .

7 LOGARITMICKÁ FUNKCE

$$f : y = \log_a x, \quad a > 0, a \neq 1, D(f) = (0; \infty)$$

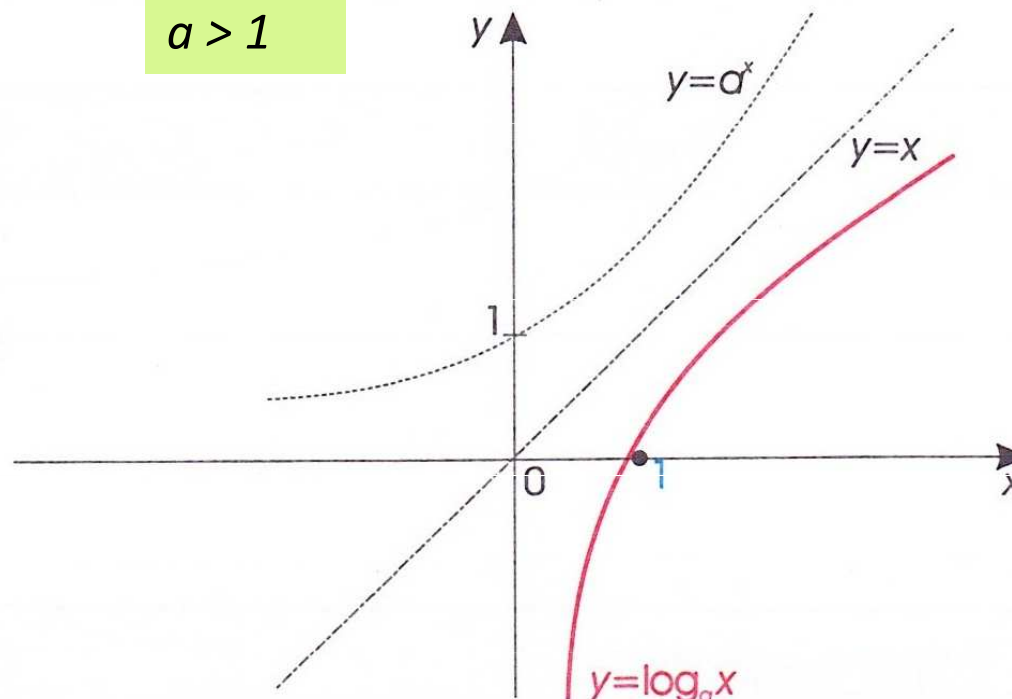
Graf: logaritmická křivka

$$0 < a < 1$$



$D(f) = (0; \infty)$, $H(f) = \mathbb{R}$.
Není ani sudá, ani lichá.
Není omezená zdola, ani shora.
Je klesající, tedy prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je inverzní k funkci exponenciální.
Je spojitá v $(0; \infty)$.

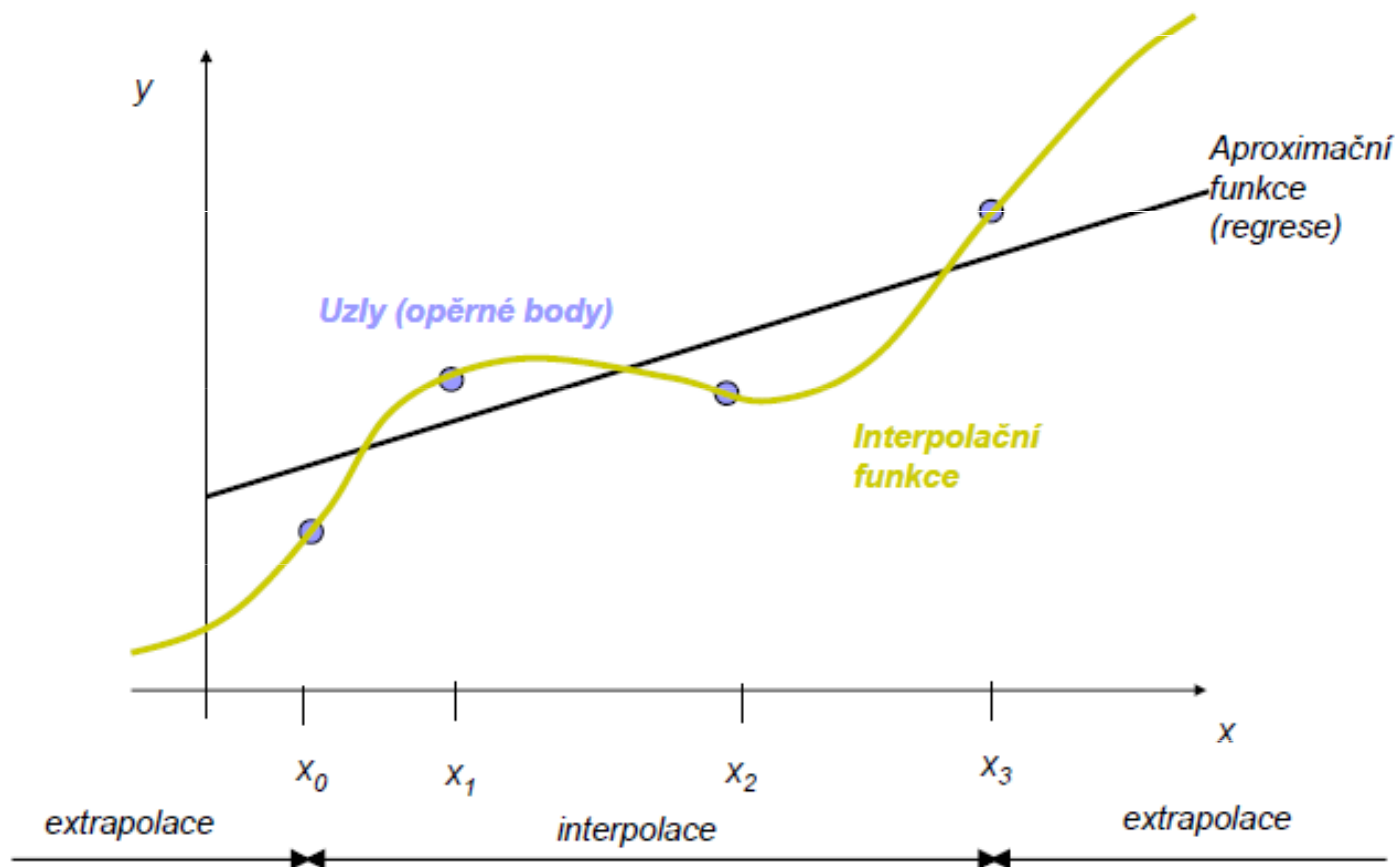
$$a > 1$$



$D(f) = (0; \infty)$, $H(f) = \mathbb{R}$.
Není ani sudá, ani lichá.
Není omezená zdola, ani shora.
Je rostoucí, tedy prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je inverzní k funkci exponenciální.
Je spojitá v $(0; \infty)$.

Interpolace a extrapolace, aproximace

- **Interpolační funkcí** rozumíme funkci f , která *splňuje* interpolační podmínky $f(x_i) = y_i$, $i=0, \dots, n$, tedy graf interpolační funkce prochází opěrnými body.
- Graf **aproximační funkce** **neprochází nutně** danými opěrnými body, ale vystihuje jejich rozložení (minimalizuje odchylku od zadaných opěrných bodů).
- **Extrapolací** rozumíme využití interpolační funkce mimo interval $\langle x_0, x_n \rangle$.



Interpolace polynomem

Pro $(n+1)$ opěrných bodů určujeme polynom

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

splňující interpolační podmínky

$$f(x_i) = \sum_{j=0}^n a_j x_i^j = y_i$$

Příklad:

Pro dvojici opěrných bodů $(0,2)$, $(1,1)$
určíme interpolační polynom

Přímý výpočet:

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

$$a_0 + a_1 x_0 = y_0 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot 0 = 2$$

$$a_0 + a_1 x_1 = y_1 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot 1 = 1$$

$$a_0 = 2, a_1 = -1$$

$$f(x) = 2 - x$$

B) Derivace funkce

1 Pojem derivace

Je-li funkce f definována v okolí bodu x_0 a existuje-li limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Potom tuto limitu označujeme $f'(x_0)$ a nazýváme ji **derivací funkce f v bodě x_0** .

Derivace funkce f v bodě x_0 je tedy číslo:

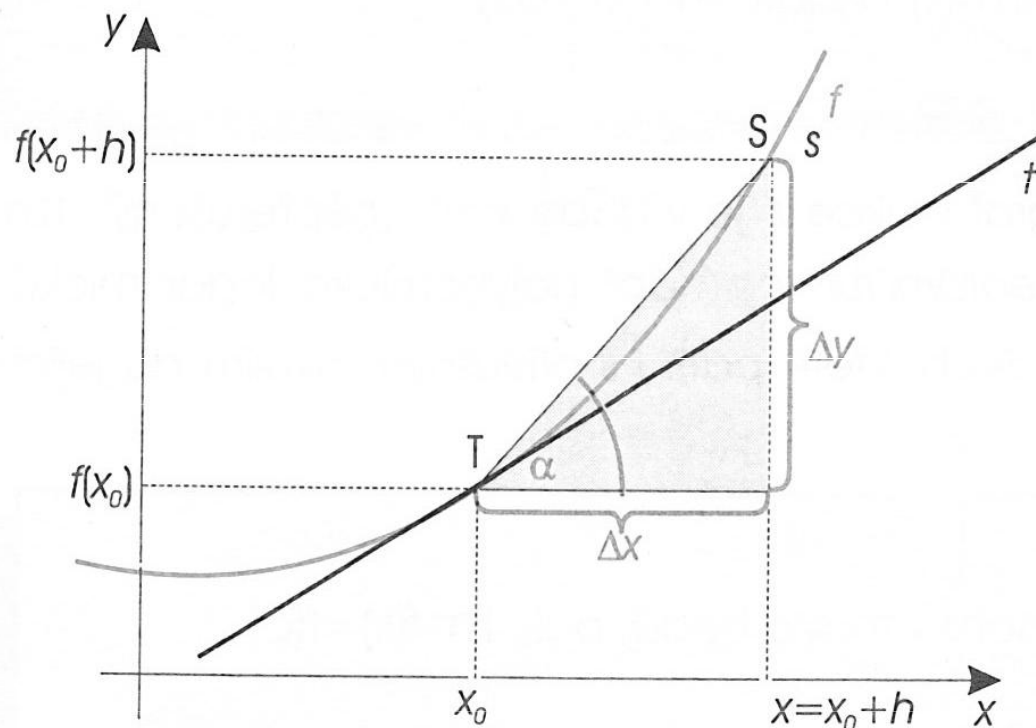
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Pozn.: Při označení $x = x_0 + h$ a $x - x_0 = h$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

2 Geometrický význam derivace funkce

Pro směrnicí tečny k_T ke grafu funkce f v bodě T $[x_0, y_0]$ platí: $k_T = f'(x_0)$



Platí totiž: směrnicí sečny ST je

$$k_S = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Pokud se bude bod S přibližovat k bodu T, bude se poloha sečny „blížit“ poloze tečny v bodě T $[x_0, y_0]$.

Pro směrnicí tečny tedy dostaneme:

$$k_T = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Rovnici tečny pak můžeme psát ve tvaru:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

3 Derivace základních funkcí

| Funkce $f: y = f(x)$ | Vzorce pro derivaci funkce f | Podmínky platnosti vzorce ($x \in D(f')$) |
|-----------------------------|--------------------------------|--|
| $y = c (c \in \mathbb{R})$ | $y' = 0$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = x^n, n \in \mathbb{N}$ | $y' = nx^{n-1}$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = x^k, k \in \mathbb{Z}$ | $y' = kx^{k-1}$ | $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ |
| $y = x^r, r \in \mathbb{R}$ | $y' = rx^{r-1}$ | $x \in (0, +\infty)$ |
| $y = e^x$ | $y' = e^x$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ | $y' = a^x \ln a$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = \ln x$ | $y' = \frac{1}{x}$ | $x \in (0, +\infty)$ |
| $y = \log_a x (a > 0)$ | $y' = \frac{1}{x \ln a}$ | $x \in (0, +\infty)$ |
| $y = \sin x$ | $y' = \cos x$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = \cos x$ | $y' = -\sin x$ | $x \in (-\infty, +\infty)$ |
| $y = \operatorname{tg} x$ | $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right)$ |
| $y = \operatorname{cotg} x$ | $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ | $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$ |

4 Vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

Jestliže funkce $f: u = f(x)$, $g: v = g(x)$ mají derivaci v každém bodě $x \in M$, pak pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu těchto funkcí platí pro všechna $x \in M$ (u podílu $g(x) \neq 0$) následující vzorce:

$$\text{a) } (u + v)' = u' + v',$$

$$\text{b) } (u - v)' = u' - v',$$

$$\text{c) } (uv)' = u'v + uv',$$

$$\text{d) } (cu)' = cu', \quad c \in \mathbb{R},$$

$$\text{e) } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

5 Derivace složených funkcí

Jestliže funkce $z = g(x)$ má derivaci v bodě x_0 a jestliže funkce $y = f(z)$ má derivaci v bodě $z_0 = g(x_0)$, **má složená funkce $y = f(g(x))$ derivaci v bodě x_0 a platí:**

$$[f(g(x_0))]\' = f\'(g(x_0)) \cdot g\'(x_0)$$

6 Aplikace: vyšetřování průběhu funkce

6. 1 Monotónnost funkce

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má v každém bodě $x \in (a; b)$ derivaci $f'(x_0)$. Pak platí:

- Je-li $f'(x_0) > 0$ pro každé $x \in (a; b) \Rightarrow f$ je **rostoucí** na $\langle a, b \rangle$.
- Je-li $f'(x_0) < 0$ pro každé $x \in (a; b) \Rightarrow f$ je **klesající** na $\langle a, b \rangle$.

6 Aplikace: vyšetřování průběhu funkce

6. 2 Extrémy funkce

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci a je-li $f'(x_0) = 0$, pak x_0 nazýváme **stacionárním bodem**. V tomto bodě x_0 může, ale nemusí mít funkce lokální extrém – jedná se o bod „podezřelý“ z extrému.

Nechť $f'(x_0) = 0$ a necht' existuje v bodě x_0 druhá derivace. Pak:

- Je-li $f''(x_0) < 0$ → má funkce f v bodě x_0 ostré **lokální maximum**.
- Je-li $f''(x_0) > 0$ → má funkce f v bodě x_0 ostré **lokální minimum**.

6 Aplikace: vyšetřování průběhu funkce

6. 3 Konkávní a konvexní funkce, inflexní body

Pro funkci, která je **konvexní** na intervalu I platí:

$$f''(x) > 0, \text{ pro každé } x \in I$$

Pro funkci, která je **konkávní** na intervalu I platí:

$$f''(x) < 0, \text{ pro každé } x \in I$$

Inflexní bod, je bod, ve kterém graf funkce přechází z konvexního tvaru do konkávního nebo naopak.

Inflexní body získáme tak, že druhou derivaci funkce položíme rovnu nule a vypočítáme kořeny vzniklé rovnice: $f''(x) = 0$.

Literatura

- Kaňka M. a kol. Učebnice matematiky pro ekonomické fakulty. Praha: Victoria Publishing, 1996.
- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Hrubý, D., Kubát, J. Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. Praha: Prometheus, 1997.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Matematika/08_MI_KAP%202_1.pdf