

KONSTRUKČNÍ GEOMETRIE

MA2BP_PKG, jaro 2013

(aktualizováno 30. května 2013)

Předmluva

Omnia sponte fluant, absit violentia rebus!

J.A.K.

Toto je trochu rozšířená osnova k přednášce z Konstrukční geometrie pro jarní semestr 2013. První motivace, předpoklady a cíle tohoto kurzu jsou zformulovány v úvodní kapitole. Probíraná látka je rozčleněna do tří hlavních bloků: klasická konstrukční geometrie, přehled užitečných geometrických zobrazení a úvod do zobrazovacích metod. Z dostupných učebnic geometrie nejčastěji používáme [A] a [Ha], odkud je též převzata většina ilustrací. Jedná se o moderní interpretace zásadního díla [E], jehož český překlad s komentáři [E_V] lze najít ve všech knihovnách a mnoha knihkupectvích. K úvodu do zobrazovacích metod používáme [Me, Ř] a [U]. K samostatnému studiu doporučujeme též celkem přístupný text [L] a velmi stručné, o to však poučnější, pojednání [Ha₂]. Hrubý odhad časového rozvržení semestru je následující:

- (1) klasická konstrukční geometrie — 3 až 4 týdny,
- (2) geometrická zobrazení — 2 až 3 týdny,
- (3) zobrazovací metody a další interakce — 7 až 9 týdnů.

Předmět je zakončen zkouškou, jež sestává z písemné a ústní části; přístup k písemné části je podmíněn zápočtem ze cvičení MA2BP_CKG, přístup k ústní zkoušce je podmíněn alespoň 50% úspěšností u písemky.

Níže navržená organizace textu je zatím hodně pracovní a nejspíš se během semestru několikrát pozmění; sledujte průběžně změny v aktualizacích. . .

Brno, 30. května 2013

Vojtěch Žádník

| | |
|---|-----------|
| I Úvod | 7 |
| 1 Eukleidovská a neeukleidovská geometrie | 7 |
| 2 Různá pojetí geometrie | 8 |
| 3 Předpoklady a cíle | 9 |
| II Klasická konstrukční geometrie | 11 |
| 4 Eukleidovy Základy | 11 |
| 5 Vybrané pojmy, vztahy a konstrukce | 17 |
| 6 Úloha Apollóniova a úlohy příbuzné | 35 |
| 7 Kuželosečky | 38 |
| 8 Typické úlohy | 41 |
| III Geometrická zobrazení | 43 |
| 9 Panoptikum geometrických zobrazení | 43 |
| 10 Přehled, zobecnění a vyhlídky | 58 |
| 11 Typické úlohy | 61 |
| IV Zobrazovací metody | 63 |
| 12 Úvod | 63 |
| 13 Volné promítání | 65 |
| 14 Mongeovo promítání | 67 |
| 15 Kótované promítání | 80 |
| 16 Axonometrie a kosoúhlé promítání | 80 |
| 17 Perspektiva | 86 |
| 18 Cyklografie | 89 |
| 19 Typické úlohy | 89 |
| V Dodatky | 95 |
| 20 K eukleidovským konstrukcím | 95 |
| 21 K úlohám Apollóniovým | 98 |
| 22 K neeukleidovským geometriím | 101 |

| | |
|-----------------------|------------|
| Literatura | 103 |
| Seznam obrázků | 105 |
| Rejstřík | 111 |
| Přílohy | 113 |

1 Eukleidovská a neeukleidovská geometrie

Eukleidovskou geometrií se tradičně myslí geometrie tak, jak je představena v Eukleidových Základech [E], resp. v jejich geometrických knihách (cca 300 př. K.). Jedná se ucelený deduktivní výklad odvozený z několika axiómů a postulátů. Axiómy se týkají obecných veličin. Postuláty jsou ryze geometrického charakteru a vymezují vztahy mezi primitivními pojmy (bod, přímka) a základními relacemi (**incidence**, **shodnost** a **rovnoběžnost**). V Základech se však používá několik dalších předpokladů, aniž by byly jakkoli formulovány (viz axiomy **uspořádání** a **spojitosti**). Přesný axiomatický popis, založený na tom Eukleidově, pochází od D. Hilberta [Hi] (kolem 1900), viz též [Ha, L] nebo Přílohu na str. 121.



Obrázek 1.1: [Ko] Miniatura Eukleida ze 6. století.

Už na první pohled je patrné, že jedny z klíčových rolí v Eukleidově geometrii hrají relace shodnosti (často formulovaná jako rovnost, příp. stejnost) a rovnoběžnosti. Uvědomte si, že v Eukleidově pojetí je shodnost docela abstraktní koncept; zejména (z pochopitelných důvodů) nepředstavuje žádné číselné vyjadřování délek úseček, velikostí úhlů apod.! Rovnoběžnost úzce souvisí s postulátem, který je v našem značení pátý a který je v rámci Eukleidova systému ekvivalentní s tvrzením, že „každým bodem ke každé přímce prochází jediná rovnoběžka“. Právě diskuze nad původní Eukleidovou formulací měla dalekosáhlé důsledky a vedla k vynálezu *neeukleidovských* geometrií.

Velmi hrubě řečeno, eukleidovská geometrie je založena zejména na relacích shodnosti a rovnoběžnosti. Uvažujeme-li geometrii s relací rovnoběžnosti, aniž bychom užívali shodnosti, jsme na stopě *afinní* geometrii, o které se několikrát zmiňujeme níže. Naopak, neuvažujeme-li rovnoběžnost, pouze shodnost, dospějeme ke geometriím neeukleidovským. Tyto jsou dvojího typu:

- *eliptická* — „žádné rovnoběžky“,
- *hyperbolická* — „více rovnoběžek“ (k jedné přímce jdoucí daným bodem).

Níže ukážeme, že eliptický případ není kompatibilní s axiomy uspořádání, což je také důvod, proč se nejdříve objevila geometrie hyperbolická. Právě tyto objevy a úplné porozumění neeukleidovským geometriím (kolem 1830) představují jedno z nejzajímavějších dobrodružství v historii matematiky; důležitá jména, která se v této souvislosti připomínají, jsou zejména J. Bolyai, N.I. Lobačevský a C.F. Gauss. Přestože je tato látka zajímavá také z konstrukčního hlediska, nemůžeme se jí v tomto kurzu moc zabývat. Hezký úvod a další odkazy lze najít např. v [Ha] nebo [D].

V širším (a méně obvyklém) smyslu se neeukleidovskou geometrií může také myslet jakákoli geometrie, která není eukleidovská. I o takových geometriích se ledacos naučíme; níže zmiňujeme např. geometrie afinní, projektivní a konformní.

2 Různá pojetí geometrie

V této části se zmíníme o různém pojetí geometrie podle použité metody (tedy nikoli podle objektu našich úvah nebo zájmů). Z naznačených možností budeme v tomto kurzu prosazovat zejména postoj syntetický a trochu snad taky transformační.

2.1 Stanovisko axiomatické

Tento postoj je představen již v Základech a netýká se samozřejmě pouze geometrie. Přísně axiomatický přístup je nutný při profesionálním nakládání s předmětem, je však akceptovatelný pouze velmi omezenou částí populace. I mezi odborníky může tato cesta skýtat jistá úskalí, o čemž svědčí např. několikasetleté polemiky nad postulátem o rovnoběžkách.

Ukázkou axiomatického přístupu ke geometrii v moderní a úplně podobě jsou Hilbertovy axiomy [Hi]. V této souvislosti se rozlišuje mezi axiomatickou teorií a jejím **modelem**. Je sice pravda, že v případě eukleidovské geometrie jsou všechny modely „stejně“, nicméně formálně je třeba rozlišovat. Např. to, co běžně nazýváme standardní eukleidovská rovina, je jen standardním modelem axiomatické teorie popsané axiomy na str. 121.

V této souvislosti je vhodné se alespoň zamyslet nad možnou axiomatizací afinní a projektivní geometrie, o nichž se zmiňujeme níže.

2.2 Stanovisko syntetické

Až někdy do 17.–18. století to byl v podstatě výhradní přístup ke geometrii. Syntetickou geometrií se myslí geometrie **bez souřadnic** nebo, poněkud úžeji, konstrukční geometrie, což je hlavní náplň tohoto kurzu.

Syntetická metoda má docela zřejmá omezení. Jednak dimenze prostoru, ve kterém formulujeme a řešíme nějaký problém, je pro většinu lidí shora omezena 3. Jednak existují úlohy, které nejsou syntetickým způsobem vůbec řešitelné (přitom analytické zdůvodnění neřešitelnosti může být celkem prosté). Zde máme na mysli zejména velmi proslulé tzv. geometrické problémy starověku, viz Dodatek 20.2.

2.3 Stanovisko analytické

Můžeme stručně charakterizovat jako stanovisko početní, obvykle je míněno počítání v souřadnicích. Počátky analytické geometrie jsou tradičně spojovány se jménem R. Descarta (kolem 1637), mělo by však být zřejmé, že se nemohlo jednat o analytickou geometrii, jak ji chápeme dnes!¹ Nicméně Descartovou inovací byla aplikace **algebry** k řešení geometrických úloh. Ve starší literatuře je často analytická geometrie jmenována jako algebraická, tento přívlstek má však dnes poněkud posunutý význam.

2.4 Stanovisko transformační

Všechny shodnosti eukleidovské roviny tvoří grupu. Tato je podgrupou grupy afinních transformací, jež je zase podgrupou grupy projektivních transformací. . . Stanovisko transformační, neboli Kleinovo, je založeno právě na pojmu **transformační grupy**. Tento postoj velmi pomáhá při organizaci geometrických informací a od své přesné formulace (1872) velmi ovlivnil další vývoj geometrie. Podle F. Kleina je ta či ona geometrie zcela charakterizována grupou odpovídajících geometrických transformací. V tomto duchu je geometrie studiem vztahů a vlastností, které jsou invariantní vzhledem k (tranzitivní) akci nějaké transformační grupy.

2.5 Stanovisko diferenciální

Toto pojetí je spojováno s B. Riemannem (okolo 1854) a dovoluje opravdu dalekosáhlá zobecnění. Zde je geometrie určena **infinitezimálně** tzv. Riemannovou metrikou, což je pole skalárních součinů na tečných prostorech k abstraktnímu Riemannovu prostoru. . . V tomto duchu jsou eukleidovské prostory Riemannovými prostory s „nulovou křivostí“, zatímco eliptické a hyperbolické prostory jsou Riemannovy prostory s nenulovou, ale „konstantní křivostí“. Tento přístup je nezbytný např. při studiu vlastností některých kartografických zobrazení.

3 Předpoklady a cíle

Kromě obvyklého přehledu školské geometrie (hlavně tedy stereometrie) nepředpokládáme žádné speciální znalosti a dovednosti. Nutnou podmínkou k uspokojivému absolvování předmětu by však měla být nadprůměrná zvědavost a touha po zorganizování většího množství poznatků. Tyto vlastnosti vlastně bereme u budoucích učitelů jako samozřejmost, nicméně zmiňujeme pro pořádek.

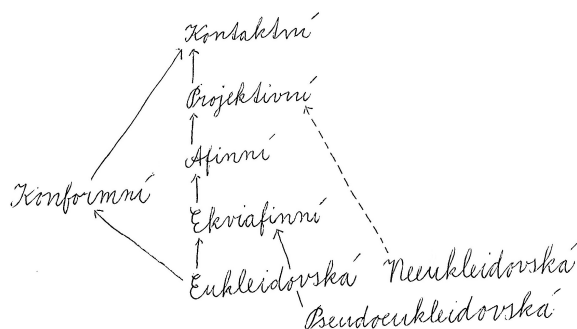
Cíle jsou jasné: chceme připomenout některé běžně známé geometrické pravdy, tento seznam podstatným způsobem rozšířit a hlavně si věci nějakým rozumným způsobem zorganizovat. Typické úlohy, které chceme umět řešit, zahrnují např.:

- sestrojít zlatý řez dané úsečky,
- sestrojít pravidelný pětiúhelník, resp. dvanáctistěn, příp. jejich průměty,
- pro daný mnohoúhelník sestrojít čtverec se stejným obsahem,
- sestrojít kružnici, která se dotýká tří daných kružnic, resp. cyklů, přímek nebo bodů,
- sestrojít průměty bodů, přímek, kružnic a dalších objektů v některé z diskutovaných zobrazovacích metod,

¹V té době stále nebyla vynalezena reálná čísla. . .

- sestrojít průnik přímky s rovinou, průsečnici dvou rovin apod.,
- určit vzájemnou polohu daných geometrických objektů,
- sestrojít řez roviny s tělesem a sestrojít tento řez ve skutečné velikosti,
- určit vzdálenost bodu od přímky, resp. roviny,
- chytře aplikovat geometrické transformace při řešení vybraných úloh,
- uvědomovat si, že ne všechny konstrukce lze realizovat eukleidovským pravítkem a kružítkem, a umět aspoň v několika konkrétních případech navrhnout alternativní řešení,
- apod.

Kromě řešení docela konkrétních výše uvedených problémů, bychom se také měli umět zorientovat v geometrických zobrazeních a klasifikovat geometrie v duchu Odstavce 2.4. Jistou nápovědu lze najít v následujícím schématu, viz též Část 10.



Obrázek 3.2: Hierarchie geometrií, o nichž se zmiňujeme v tomto textu.

Eukleidés z Alexandrie, Archimédés ze Syrakus, Apollónios z Pergy, . . .

4 Eukleidovy Základy

Velmi rámcový přehled Základů je následující:

- knihy I–IV a VI, planimetrie,
- knihy VII–IX, aritmetika,
- knihy XI–XIII, stereometrie.

Knihy V a X mají poněkud specifické postavení, viz dále.

4.1 Úvod

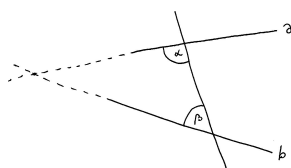
V každé knize najdeme řadu definic (např. pravý úhel je definován v Def.I.10, rovnoběžné přímky v Def.I.23). Některé pojmy/relace jsou nedefinované, neboli primitivní (např. shodnost), jiné jsou sice nějak definované, ale ve skutečnosti jsou též primitivní (např. bod, Def.I.1). Na začátku první knihy je formulováno několik axiomů a postulátů. Axiómy se týkají obecných veličin; na str. 115 jsou vyjmenovány jako Common notions a tady je nepřepisujeme. Postuláty jsou ryze geometrického charakteru:¹

- Každé dva různé body spojuje přímka.*
- Každou přímku lze na každé straně libovolně prodloužit.*
- Lze vytvořit kružnici s libovolným daným středem procházející libovolným jiným bodem.*
- Všechny pravé úhly jsou shodné.*

¹V různých edicích jsou axiomy/postuláty organizovány různě, viz např. [E_V]. My odkazujeme na vydání odvozená z překladu T. Heatha, viz [HTD].

- (v) *Když přímka protínající dvě jiné přímky tvoří vnitřní úhly na jedné straně menší než dva pravé, pak tyto dvě přímky — dostatečně prodlouženy — setkají se na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.*

V (i) je přímkou zřejmě myšlena úsečka, a to jediná. Postuláty (i)–(iii) představují jediné konstrukční nástroje, se kterými si celé Základy vystačí: ideální nekonečně dlouhé pravítko a ideální nekonečně rozkročitelné kružítko. Konstrukce, které lze realizovat s těmito nástroji se nazývají *eukleidovské konstrukce*, viz též 20. Postulát (iv) nám říká něco o primitivní relaci shodnosti. Postulát (v) je též přezdíván jako dodatečný, neboť je původně formulován dodatečně až před tvrzením I.29.² Často bývá nahrazován tzv. postulátem o rovnoběžkách, se kterým je ekvivalentní, viz 5.1.



Obrázek 4.1: Eukleidův dodatečný postulát: $\alpha + \beta < 2R \implies a$ a b se protínají, a to vlevo.

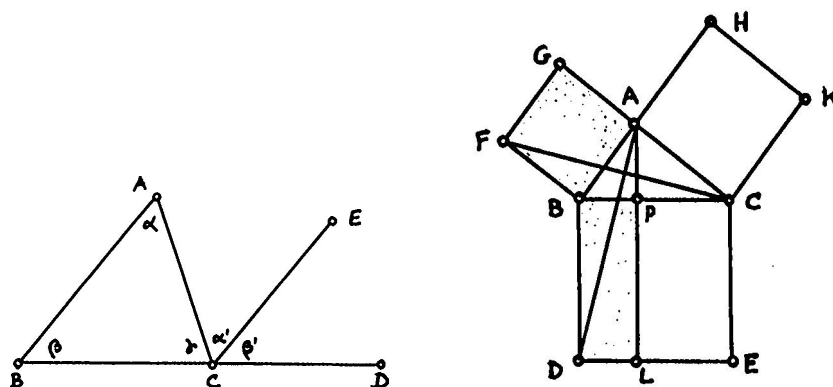
4.2 Přehled

Od str. 115 je přiložen stručný přehled nejcitovanějších tvrzení ze všech geometrických knih podle [Ha, str. 481–486]. Podrobnosti k jednotlivým knihám dále shrnujeme podle [A].

I. Základy planimetrie

Základní a dobře známá tvrzení a konstrukce včetně všech vět o shodnostech trojúhelníků (I.1–26); teorie rovnoběžek (I.27–31); věta o součtu úhlů v trojúhelníku (I.32); obsahy rovnoběžníků a trojúhelníků (I.33–45); Pythagorova věta a věta opačná (I.47–48).

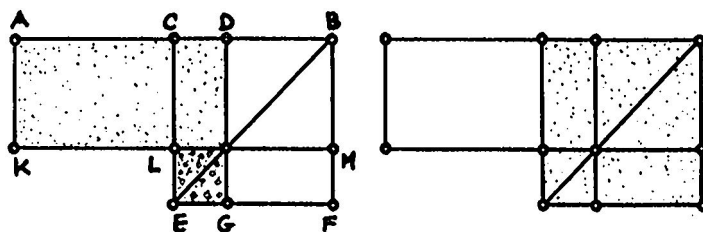
²I.29 = 29. věta v I. knize [E]



Obrázek 4.2: [A] I.32: $AB \parallel CE \implies \alpha' = \alpha$ a $\beta' = \beta$, tzn. $\alpha' + \beta' = \alpha + \beta$ a $\alpha + \beta + \gamma = 2R$. I.47 (jakožto dvakrát Eukleidova věta o odvěsňě): Pokud je trojúhelník ABC pravúhelný, potom platí, že obsah $FBA =$ obsah $FBC =$ obsah $ABD =$ obsah PBD , ...

II. O pravoúhelnících

Většina tvrzení se týká tzv. geometrické algebry — pomocí obsahů pravoúhelníků se demonstrují vztahy jako $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (II.5)³ apod.; konstrukce zlatého řezu (II.11); kosinová věta (II.12–13); kvadratura obecného mnohoúhelníku (Eukleidova věta o výšce) (II.14).



Obrázek 4.3: [A] II.5: Pokud je C střed úsečky AB , potom platí

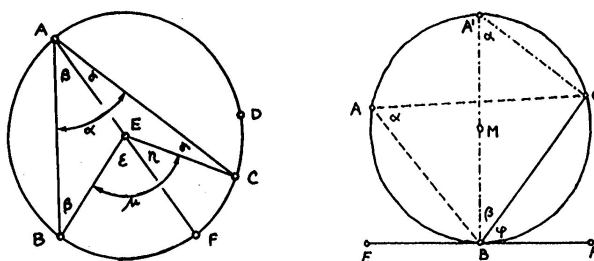
$$AD \cdot DB + CD^2 = CB^2.$$

Při značení $|AC| = |CB| =: a$ a $|CD| =: b$ totéž zapíšeme jako $(a+b)(a-b) + b^2 = a^2$.

III. Geometrie kružnic

Věty o kružnicích, jejich průnicích a dotyku, sečnách, tečnách a asociovaných úhlech: např. konstrukce tečny (III.16–17); věty o středových a obvodových úhlech (III.20–21), Thaletova věta (III.31), věta o úsekových úhlech (III.32); mocnost bodu ke kružnici (III.35–37).

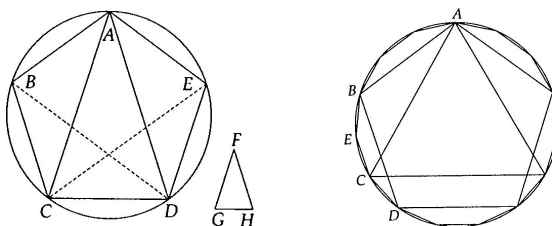
³V popisu obr. 4.3, jakož i v dále, značí $AD \cdot DB$ obsah pravoúhelníku se stranami AD a DB v duchu [E] (což je trochu něco jiného než reálné číslo $|AD| \cdot |DB|$), viz též 5.3.



Obrázek 4.4: [A] III.20: $\varepsilon = 2\beta$, $\eta = 2\gamma \implies \mu = 2\alpha$, ... III.32: $\alpha + \beta = R$ a $\varphi + \beta = R \implies \alpha = \varphi$.

IV. Pravidelné mnohoúhelníky

Konstrukce některých mnohoúhelníků vepsaných/opsaných dané kružnici a konstrukce kružnice opsané/vepsané danému mnohoúhelníku: jmenovitě pro obecný trojúhelník (IV.2–5), čtverec (IV.6–9), pravidelný pětiúhelník (IV.10–14), pravidelný šestiúhelník (IV.15), pravidelný 15-tiúhelník (IV.16).



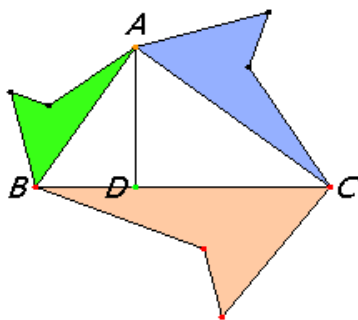
Obrázek 4.5: [E_V] Pravidelný pětiúhelník IV.11 a patnáctiúhelník IV.16.

V. Obecná teorie proporcí

Mnohem abstraktnější kniha než ostatní, nezávislá na předchozích, nutná pro následující; pojednává o poměrech a proporcích obecných veličin (proporce je rovnost dvou poměrů), přičemž se myslí i na nesouměřitelné veličiny (tj. veličiny, jejichž poměr není racionální číslo, viz Def.V.5); typické tvrzení pro představu: $a : b = c : d \implies a : c = b : d$ (V.16).

VI. Geometrie podobných útvarů

Základní tvrzení (VI.1) mluví o proporcích mezi obsahy trojúhelníků a velikostmi jejich základů za předpokladu, že mají stejnou výšku; konstrukce geometrického průměru (Eukleidova věta o výšce) (VI.13); vyjádření poměru obsahů podobných mnohoúhelníků pomocí koeficientu podobnosti (VI.19–20); pokračování geometrické algebry — řešení obecné kvadratické rovnice (VI.28–29); další zobecnění Pythagorovy věty (VI.31).



Obrázek 4.6: [E_J] VI.31: Pokud je trojúhelník ABC pravoúhlý a mnohoúhelníky nad stranami jsou podobné, potom obsah toho nad přeponou je roven součtu obsahů těch nad odvěsnami.

VII. Základní aritmetika

Eukleidův algoritmus k nalezení největšího společného dělitele daných čísel (VII.1–3); poměry a součiny čísel (VII.17–19);

VIII. a IX. Teorie čísel

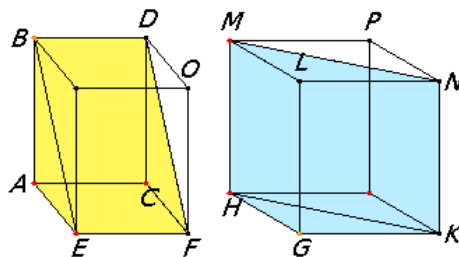
Geometrické posloupnosti čísel; čtvercová a kubická čísla; věta o počtu prvočísel (IX.20); sudá, lichá a dokonalá čísla.

X. Nesouměřitelné veličiny

Nejobsáhlejší kniha ze všech: definice (Def.X.1) a charakterizace (X.5–6) souměřitelných a nesouměřitelných veličin; existence nesouměřitelných veličin (X.10); vztahy mezi souměřitelností a poměry, součty a dalšími operacemi s veličinami; klasifikace nesouměřitelných veličin;

XI. Základy stereometrie

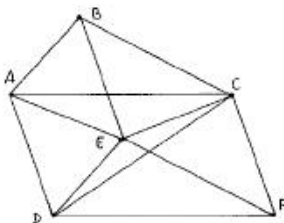
Věty o rovnoběžnosti a kolmosti přímek a rovin (XI.1–19); prostorové úhly (XI.20–23); o rovnoběžnostěnech a jejich objemech (XI.24–37); dvě věty s trojbokými hranoly (XI.38–39).



Obrázek 4.7: [E_J] XI.39: Pokud je výška žlutého hranolu na stěnu $ACEF$ stejná jako výška modrého hranolu na stěnu GHK a pokud má rovnoběžník $ACEF$ dvojnásobný obsah jako trojúhelník GHK , potom tyto hranoly mají stejný objem.

XII. Obsahy a objemy

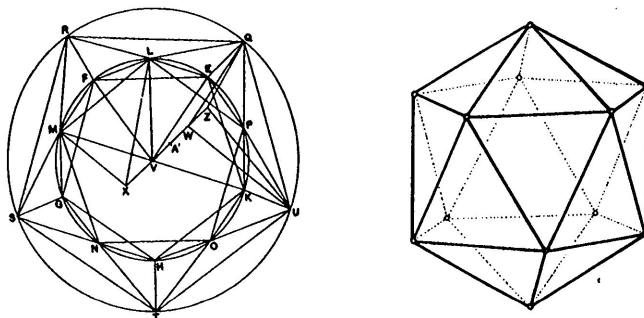
Myšleno obsahy a objemy pomocí Eudoxovy exhaustivní metody: obsah kruhu (XII.2); objem jehlanu (XII.3–9); objem válce a kužele (XII.10–15); objem koule (XII.18).



Obrázek 4.8: [Ha] XII.7: Objem trojbokého jehlanu je roven třetině objemu trojbokého hranolu se stejnou základnou a stejnou výškou.

XIII. Pravidelné mnohostěny

Věty o zlatém řezu (XIII.1–6); věty o pětiúhelníku (XIII.7–15); konstrukce pravidelných mnohostěňů (XIII.13–17), porovnání jejich stran a zdůvodnění, že jich není více (XIII.18).



Obrázek 4.9: [A] XIII.16: Pravidelný dvacetistěn.

4.3 Cvičení

- (1) Na vybraných pojmech porovnejte definice v Základech [E] s definicemi, jak se vyučují dnes, viz např. [L] (v rovině např. úsečka, pravý úhel — kolmost, kružnice, tečna, podobnost mnohoúhelníků; v prostoru např. kolmost přímky a roviny, kolmost dvou rovin, hranol, kulová plocha (sféra), podobnost mnohostěňů, ...).
- (2) Utvořte si představu o struktuře Základů nejlépe tak, že si zapamatujete řazení některých významných tvrzení v jednotlivých knihách.

5 Vybrané pojmy, vztahy a konstrukce

5.1 Postulát o rovnoběžkách

Jak jsme zmínili výše, postulát (v) je označován jako dodatečný, neboť je původně formulován až před tvrzením I.29 a nikoli na začátku s ostatními. To znamená, že prvních 28 tvrzení v I. knize je na něm **nezávislých** — jsou to např.:

I.4 Věta SUS.

I.8 Věta SSS.

I.11–12 Konstrukce kolmice k dané přímce daným bodem.

I.16 Věta o vnějším úhlu trojúhelníku. [Zde se poprvé silně používá nevyslovených předpokladů o uspořádání bodů na přímce.]⁴

I.17–20 Znamé nerovnosti v trojúhelníku (příčemž I.17 je tvrzení opačné k postulátu (v)).

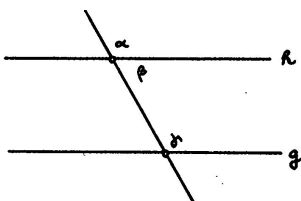
I.23 Konstrukce daného úhlu na dané polopřímce.

I.26 Věta USU.

I.27 Shodné střídavé úhly implikují rovnoběžnost přímek. [Zdůvodněno nepřímou pomocí I.16.]

Kromě uvedených je to však také:

I.31 Konstrukce rovnoběžky k dané přímce daným bodem. [Konstrukce podle I.23, zdůvodnění podle I.27.]



Obrázek 5.10: [A] I.27: $\alpha = \gamma \implies h \parallel g$. I.29: $h \parallel g \implies \alpha = \gamma$.

Naopak, řada dalších tvrzení je na pátém postulátu **závislá**, příp. je s ním ekvivalentní:

I.29 Věta o střídavých úhlech, viz obr. 5.11.

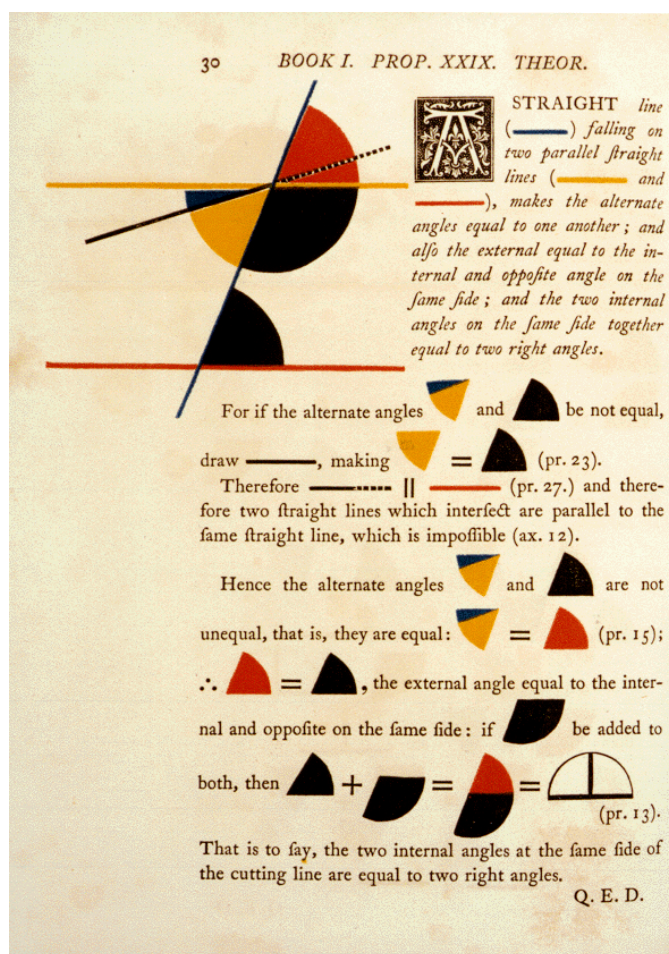
I.32 Věta o součtu úhlů v trojúhelníku, viz obr. 4.2.

I.47 Pythagorova věta, viz obr. 4.2.

Právě z I.29 přímo plyne jednoznačnost rovnoběžky sestrojené podle I.31. Následující tvrzení je asi nejnámější Věta, která je s postulátem (v) ekvivalentní:

Věta (*). *Každým bodem ke každé přímce prochází právě jedna rovnoběžka.*

⁴To je hlavní důvod, proč Věta I.16 a všechny její důsledky neplatí v eliptické geometrii (jež je lokálně modelovaná na sféře)!

Obrázek 5.11: [E_B] Věta I.29 v Byrnově vydání Základů.

Z nepřeborné zásobárny dalších vybíráme:

- *Součet vnitřních úhlů je ve všech trojúhelnících stejný.*
- *Existuje trojúhelník s libovolně velkým obsahem.*
- *Existují podobné trojúhelníky, které nejsou shodné.*
- *Každému trojúhelníku lze opsat kružnice.*
- *Množina bodů, které leží v jedné polorovině a mají stejnou vzdálenost od dané přímky, je přímka.*

5.2 Cvičení

Pomocí ideálních eukleidovských nástrojů sestrojte:

- (1) kolmici k dané přímce daným bodem,

(2) rovnoběžku k dané přímce daným bodem.

Pomocí omezených eukleidovských nástrojů (krátké pravítko, malé nebo dokonce zaseknuté kružítko) sestrojte:

(3) spojnici dvou bodů,

(4) rovnostranný trojúhelník,

(5) znovu (1) a (2).

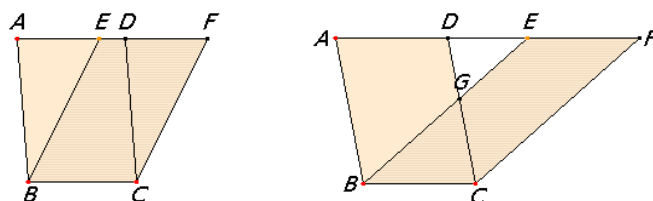
Dokažte, že

(6) postulát (v) je skutečně ekvivalentní s tvrzením (*) na str. 17,

(7) si umíte představit sférický trojúhelník, ve kterém neplatí I.16.

5.3 Kvadratura mnohoúhelníku

Kvadraturovat nějaký plošný útvar znamená sestrojít čtverec, který má stejný obsah. Posloupnost tvrzení v [E] (počínaje I.34 a vrcholice II.14) řeší tento problém pro libovolné mnohoúhelníky. Pojem obsahu není v Základech nijak vymezen, avšak nakládá se s ním jako s každou jinou veličinou podle vyslovených axiómů (viz Common notions na str. 115).



Obrázek 5.12: [E_J] I.35: Rovnoběžníky se stejnou základnou a výškou mají stejný obsah.

I.35–38 Rovnoběžníky, resp. trojúhelníky, se stejnou základnou a výškou mají stejný obsah.

I.42 Konstrukce rovnoběžníku, jež má stejný obsah jako daný trojúhelník.

I.43–45 Konstrukce rovnoběžníku, jež má stejný obsah jako daný mnohoúhelník.

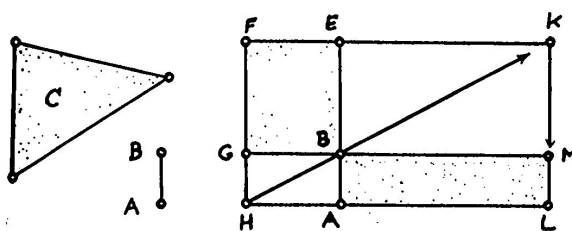
II.14 Konstrukce čtverce, jež má stejný obsah jako daný mnohoúhelník. [Shrnutí předchozího + Eukleidova věta o výšce, jejíž zdůvodnění je založeno na II.5.⁵]

Všechny argumenty jsou založeny na manipulaci se shodnými částmi, které se různě přidávají k daným nebo odebírají od daných útvarů. Tato pozorování celkem přirozeně vedou k následujícímu závěru, viz [Ha, část 24]:

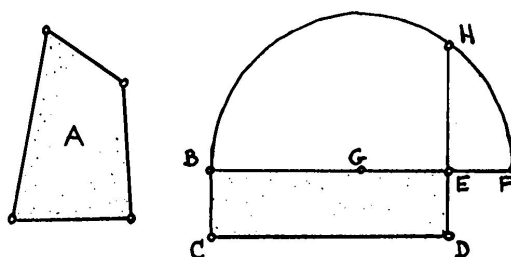
Věta (Wallaceova–Bolyaiova–Gerwienova). *Dva mnohoúhelníky mají stejný obsah právě tehdy, když jeden lze rozstříhat na části, z nichž lze složit ten druhý.*

Rozhodující je naučit se nějak stříhat stejnoploché pravoúhelníky, viz obr. 5.15.

⁵Jiné zdůvodnění založené na podobnosti trojúhelníků plyne z VI.8; konstrukce je samozřejmě tatáž, viz VI.13.



Obrázek 5.13: [A] I.44: Sestroj rovnoběžník $FEBG$, jehož obsah je stejný jako obsah daného trojúhelníku; doplň rovnoběžník $FEAH$ tak, aby AB byla daná úsečka; spoj $HB \rightsquigarrow K \rightsquigarrow M$ a L . Potom platí, že obsah trojúhelníku = obsah $FEBG$ = obsah $ABML$.



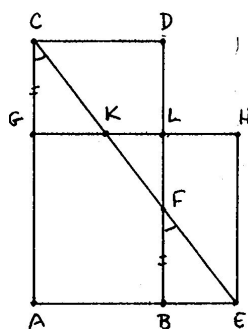
Obrázek 5.14: [A] II.14: Rovnoběžník $BCDE$ má stejný obsah jako daný mnohoúhelník, $ED = EF$, $G =$ střed BF , ... Potom (podle II.5 a I.47) platí

$$BE \cdot EF + EG^2 = GF^2 = GH^2 = EG^2 + EH^2,$$

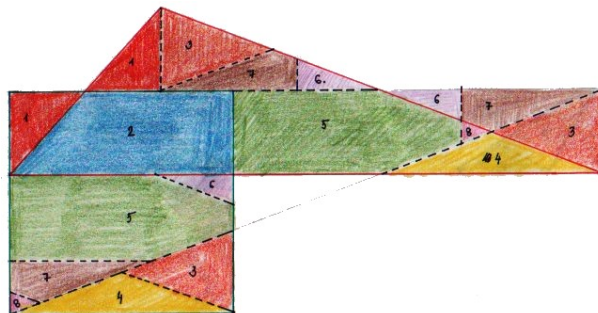
tzn. $BE \cdot EF = EH^2$ (Eukleidova věta o výšce).

5.4 Cvičení

- (1) Vymyslete nějaký způsob, jak modifikovat nápad na obr. 5.15 v případě, kdy bod L je v opačné polorovině vymezené přímkou CE .
 - (2) Dokažte, že umíte kvadraturovat obecný mnohoúhelník.
 - (3) Uvědomte si, že kvadraturu specifického mnohoúhelníku lze často provést specifickým a zpravidla efektivnějším způsobem. . .
 - (4) Uvědomte si, že kvadraturovat jiné útvary než mnohoúhelníky může být docela problém (viz 20.2).
- ⇒ (5) Sestrojte svůj vlastní důkaz Pythagorovy věty pomocí rozstříhání dvou menších čtverců.



Obrázek 5.15: [Ha] $ABCD$ dán, $AEGH$ sestrojen podle I.44, příp. II.14; trojúhelníky CGK a FBE jsou shodné, proto taky trojúhelníky CDF a KHE jsou shodné — stříh vedeme podél CF a GK .



Obrázek 5.16: [K. Nedvědová, 2009] Kvadratura obecného trojúhelníku se stříháním.

5.5 Mocnost bodu ke kružnici a odvozené pojmy

Mocnost bodu ke kružnici

Mocnost bodu ke kružnici je velice užitečný invariant, ke kterému dospějeme na konci následující posloupnosti úvah, viz obr. 5.17:

- Předpokládáme, že bod D leží vně kružnice.
- Zdůvodníme, že pro libovolnou sečnu vedenou bodem D platí:

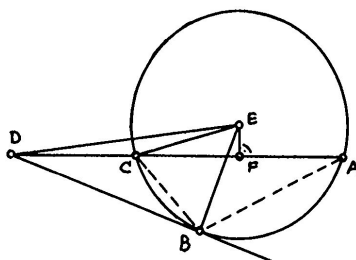
$$DC \cdot DA = DB^2. \quad (5.1)$$

- Tato veličina tedy nezávisí na sečně, ale je krásně určena pouze danou kružnicí a bodem D .
- Pomocí středu E a poloměru r kružnice můžeme tuto veličinu vyjádřit jako

$$|DB|^2 = |DE|^2 - r^2. \quad (5.2)$$

Mocnost bodu D ke kružnici se středem E a poloměrem r je reálné číslo definované rovností (5.2).

Podle definice je tedy mocnost kladná pro body vně kružnice, záporná pro bodu uvnitř kružnice a nula pro body na kružnici.



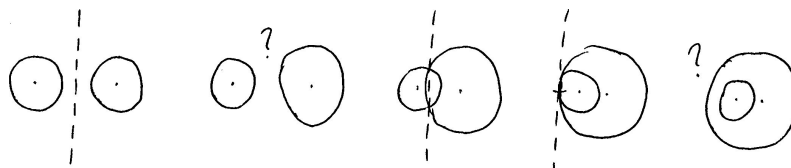
Obrázek 5.17: [A] III.36: Pro libovolnou sečnu jdoucí bodem D platí: $DC \cdot DA = DB^2 = \text{konst.}$

Rovnost (5.2) je zřejmě aplikací Pythagorovy věty pro trojúhelník DBE . Rovnost (5.1) lze zdůvodnit několikerým způsobem:⁶

- (a) Pomocí podobnosti trojúhelníků DCB a DBA [úhel u vrcholu D mají oba trojúhelníky společný a podle III.32 je úhel CAB shodný s DBC].
- (b) Pomocí II.6 a několikerým užitím Pythagorovy věty tak, jak je to představeno v III.36.

Chordála dvou kružnic

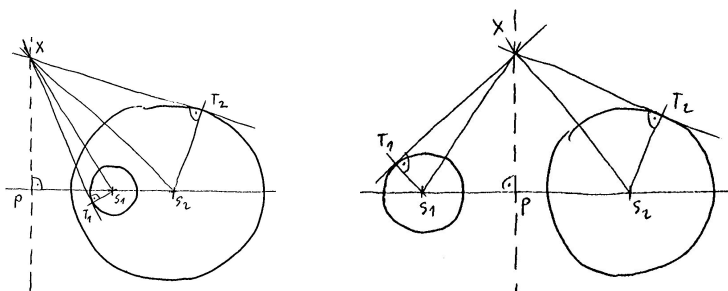
Uvažme dvě kružnice, které se protínají. Pak přímka určená jejich společnými body má tu vlastnost, že každý bod na ní ležící má stejnou mocnost k oběma kružnicím. V případě, že se dvě kružnice dotýkají, má jejich společná tečna (jdoucí společným bodem) zrovna takovou vlastnost. Obecně: množina bodů, která má stejnou mocnost ke dvěma daným kružnicím se nazývá *chordála dvou kružnic*.



Obrázek 5.18: Chordála dvou kružnic.

Při konstrukci chordály v případě, že se dané kružnice neprotínají, oceníme následující fakt:

Věta. *Chordála libovolných dvou nesoustředných kružnic je přímka, která je kolmá na spojnici jejich středů.*



Obrázek 5.19: Chordála je přímka kolmá na spojnici středů.

Při zdůvodnění používáme definici chordály a Pythagorovu větu: Uvažme libovolný bod X na chordále, patu kolmice na spojnici středů označíme P , viz obr. 5.19. Protože X má stejnou mocnost k oběma kružnicím, platí

$$\begin{aligned} |XS_1|^2 - r_1^2 &= |XS_2|^2 - r_2^2, \\ (|XP|^2 + |PS_1|^2) - r_1^2 &= (|XP|^2 + |PS_2|^2) - r_2^2, \\ |PS_1|^2 - r_1^2 &= |PS_2|^2 - r_2^2. \end{aligned}$$

Tzn., že bod P taky leží na chordále. Protože chordála má se spojnicí středů společný právě jeden bod, je to zrovna P . Pata kolmice z každého bodu na chordále tedy bude splývat s P , což znamená, že chordála je právě kolmice ke spojnici středů jdoucí tímto bodem. \square

Potenční střed tří kružnic

Množina bodů, která má stejnou mocnost ke třem daným kružnicím se nazývá *potenční střed tří kružnic*. Tento bod se občas zmiňujeme při konstrukcích; v generickém případě je určen jednoznačně. Uvědomte si, že ve speciálních případech potenční střed vůbec nemusí existovat (příp. je nevlastní) nebo naopak nemusí být určen jednoznačně. . .

5.6 Cvičení

- (1) Sestrojte (eukleidovsky!) tečnu k dané kružnici z daného bodu, svoji konstrukci zdůvodněte a porovnejte s konstrukcí III.17.
- (2) Sestrojte chordálu dvou kružnic, které se neprotínají.
- (3) Rozmyslete si různé limitní situace jako např. $r_1 \rightarrow 0$, $r_2 \rightarrow \infty$, $S_1 \rightarrow S_2$ apod.
- (4) Udejte příklad tří kružnic, které mají více potenčních středů.
- (5) Sestrojte kružnici, která prochází dvěma danými body a dotýká se dané přímky.

⁶Oba zmiňované postupy lze jednoduše modifikovat i pro případ, kdy bod D leží uvnitř kružnice; v takovém případě přímo dokážeme, že součin $DC \cdot DA$ nezávisí na sečně.

5.7 Zlatý řez

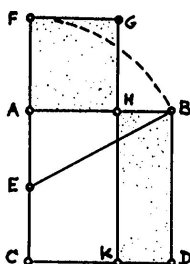
Základní konstrukce, kterou ještě několikrát zužitkujeme, je konstrukce zlatého řezu.

Bod H leží ve *zlatém řezu* úsečky AB , pokud platí

$$BA : AH = AH : HB \quad (5.3)$$

(nebo, symetricky, $AB : BH = BH : HA$).

Konstrukce podle II.11 s elegantním geometrickým zdůvodněním je představena na obr. 5.20.



Obrázek 5.20: [A] II.11 (konstrukce zlatého řezu úsečky AB): čtverec $ABCD$; G = střed AC ; kružnice $EB \rightsquigarrow F$; čtverec $AFGH$. Potom (podle II.6 a I.47) platí

$$CF \cdot FA + AE^2 = EF^2 = EB^2 = AE^2 + AB^2,$$

tzn. $CF \cdot FA = CF \cdot FG = AB^2$, odkud po odečtení $CA \cdot AH$ dostáváme $AH^2 = AB \cdot BH$, neboli $AH : BH = AB : AH$.

Ačkoli to na tomto místě bude vypadat trochu nemístně, naznačíme, jak uvedenou konstrukci zdůvodnit početně. Označíme $|AB| =: b$ a $|AH| =: x$ a postupně vyjadřujeme všechny veličiny sestrojené na obr. 5.20:

$$|AE| = |EC| = \frac{1}{2}b, \quad |EB| = \frac{\sqrt{5}}{2}b, \quad |AF| = |AH| = x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b.$$

Definice zlatého řezu v našem značení zní:

$$b : x = x : (b - x),$$

což je ekvivalentní s $b(b - x) = x^2$, neboli

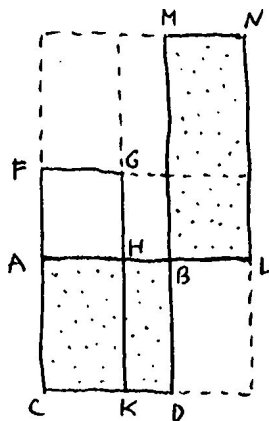
$$x^2 + bx - b^2 = 0. \quad (5.4)$$

Stačí tedy ověřit, že před chvílí sestrojená veličina x je kořenem této kvadratické rovnice, což skutečně je. . . \square

Toto počítání není samoúčelné — uvádíme proto, že konkrétní vyjádření neznámé x vždy nabízí jistý návod k její konstrukci (v případě, že je tato veličina sestrojitelná)! V této souvislosti doporučujeme cvičení 5.8(1), viz též cvičení 5.12(3–4) a odstavec 20.1.

Na závěr jedno užitečné tvrzení, viz obr. 5.21:

Věta. Pro čtyři body A, H, B, L na jedné přímce takové, že $AH = BL$ platí: bod H je ve zlatém řezu úsečky AB právě tehdy, když bod B je ve zlatém řezu úsečky AL .



Obrázek 5.21: Pokud $AH = BL$, potom H je zlatý řez $AB \iff B$ je zlatý řez AL .

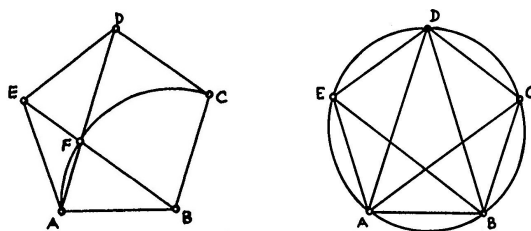
5.8 Cvičení

- (1) Připomeňte si klasickou konstrukci zlatého řezu a vymyslete nějakou svoji vlastní konstrukci (návod: sestrojte postupně $\sqrt{5}$, $\sqrt{5} - 1$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$).
- (2) Rovnice (5.4) má dva kořeny; vypočítejte také druhý kořen a zkuste jej nějak geometricky interpretovat.
- (3) Pro danou úsečku DF sestrojte bod A tak, aby F byl zlatým řezem úsečky DA .
- (4) Navrhněte nějaké alternativní řešení předchozí úlohy.

5.9 Pravidelný pětiúhelník

Postřehy

Předpokládejme nějaký hotový pentagram, který trochu prozkoumáme. Tento má jak stany, tak



Obrázek 5.22: [A] Analýza pravidelného pětiúhelníku.

vnitřní úhly shodné, má pět os symetrií atp. Odtud podle obr. 5.22 vyvozujeme několik postřehů:

- (1) $AD \parallel BC$ a $BE \parallel CD$, takže $BCDF$ je rovnoběžník,
- (2) trojúhelníky ADE a EAF jsou oba rovnoramenné a mají společný úhel, takže jsou podobné,
- (3) obvodové úhly BAC , CAD , DAE atd. jsou všechny shodné, takže trojúhelník ABD má tu vlastnost, že je rovnoramenný a úhly u základny jsou dvojnásobkem úhlu u vrcholu D .

Důsledky a konstrukce

Uvažme nejdřív, že máme danu stranu AB a chceme sestrojiti ostatní vrcholy.

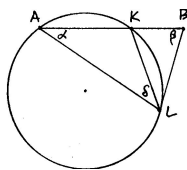
Z (1) plyne $FD = BC = CD = BF$. Pokud si ještě všimneme, že D leží na ose úsečky AB , pak máme rychlou, nikoli však eukleidovskou, konstrukci bodu D a odtud celého pětiúhelníku, viz obr. 20.5.

Z podobnosti trojúhelníků v (2) plyne $AD : DE = EA : AF$, přičemž však $DE = EA = DF$, tedy

$$AD : DF = DF : FA.$$

Tzn., že bod F leží na AD ve zlatém řezu, přičemž delší část tohoto řezu je shodná právě se stranou pětiúhelníku (čímž jsme mimochodem zreprodukovali XIII.8). Podle cvičení 5.8(3) umíme sestrojiti úhlopříčku AD a odtud celý pětiúhelník. . .

Postřeh (3) nás navádí k následující myšlence: sestrojme trojúhelník s uvedenými vlastnostmi a zbytek už je snadný! Toto je právě cesta, kterou najdeme v IV.10 (tzn. bez teorie podobnosti) a kterou zde pro svoji nezpochybnitelnou působivost představíme, viz obr. 5.23.⁷ Současně si tak připomeneme několik významných tvrzení z prvních knih Základů hezky pohromadě:



Obrázek 5.23: [Ha] IV.10: Na dané úsečce AB sestroj K ve zlatém řezu; sestroj trojúhelník ABL tak, aby $AL = AB$ a $BL = AK$. Potom platí, že trojúhelník ABL je rovnoramenný a $\beta = 2\alpha$.

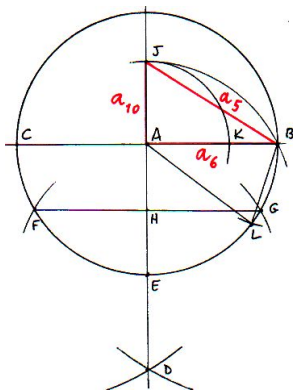
Zdůvodnění IV.10 je následující:

- z konstrukce bodu K plyne, že $BA \cdot BH = BL^2$ (II.11),
- doplníme-li pro lepší představu kružnici AKL , pak předchozí můžeme interpretovat jako mocnost bodu B ke kružnici, tudíž BL je tečnou (III.36–37),
- úsekový úhel BLK je shodný s LAB (III.32), jež značíme α , tudíž úhel ALB je roven $\alpha + \delta$,
- přitom trojúhelník ABL je rovnoramenný, takže $\beta = \alpha + \delta$ (I.5),
- úhel LKB je vnější úhel v trojúhelníku AKL , proto je také roven $\alpha + \delta$ (I.32),
- odtud plyne, že trojúhelník BLK je rovnoramenný (I.6), tudíž $KL = BL = AK$,
- proto také trojúhelník AKL je rovnoramenný, tzn. $\alpha = \delta$ (znovu I.5),
- celkem tedy opravdu platí $\beta = 2\alpha$. □

⁷Nenechte se splést značením, které nemá nic společného s obr. 5.22.

Poznámky

Vlastní konstrukce pětiúhelníku odvozená z uvedených postřehů by měla být vždy snadná bez ohledu na to, zda je tento zadán stranou nebo kružnicí opsanou či vepsanou, viz cvičení. Zmíníme raději několik dalších užitečných postřehů.



Obrázek 5.24: [Ha] Ke konstrukci pravidelného pětiúhelníku.

Na obr. 5.24 je připomenuta konstrukce zlatého řezu K úsečky AB včetně trojúhelníku ABL , o kterém byla řeč před chvílí. Velice zajímavým poznatkem je následující tvrzení, které nabízí jistou zkratku při konstruování pravidelného pětiúhelníku. Použijeme také např. při konstrukci pravidelného dvacetistěnu . .

Věta. Úsečky AB , AJ , resp. BJ představují strany pravidelného šestiúhelníku, desetiúhelníku, resp. pětiúhelníku vepsaného do naznačené kružnice. Zejména platí, že tyto úsečky tvoří strany pravoúhlého trojúhelníku!

Druhou část tvrzení lze najít v XIII.10 s ryze geometrickým zdůvodněním. V našem provedení tato část přímo plyne z konstrukce, takže dokážeme jenom část první, a to početně. Poloměr kružnice bereme jako jednotku, vzhledem k níž postupně vyjádříme ostatní veličiny:

Podle předpokladu je $|AB| = 1$. Bod K je ve zlatém řezu, velikost $|AJ| = |AK|$ známe z 5.7; z Pythagorovy věty v trojúhelníku ABJ vyjádříme $|BJ|$:

$$|AJ| = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1), \quad |BJ| = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Délku strany pravidelného n -úhelníku vepsaného do jednotkové kružnice označíme a_n . Zřejmě je $a_6 = |AB|$; stačí dokázat, že $a_{10} = |AJ|$ a $a_5 = |BJ|$. Středový úhel odpovídající straně vepsaného desetiúhelníku, resp. pětiúhelníku je 36° , resp. 72° . Odtud pomocí kosinové věty vyjádříme:

$$a_{10} = \sqrt{2 - 2 \cos 36^\circ}, \quad a_5 = \sqrt{2 - 2 \cos 72^\circ}.$$

Zmiňované úhly pozorujeme právě v trojúhelníku ABL , jehož všechny strany známe. Dvojnásobným užitím kosinové věty v tomto trojúhelníku umíme vyjádřit

$$\cos 36^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1), \quad \cos 72^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1).$$

Dosadíme do předchozího vyjádření a po drobné úpravě skutečně pozorujeme, že $a_{10} = |AJ|$ a $a_5 = |BJ|$. \square

Uvedené počítání opět není samoúčelné — chceme čtenáře připravit na fenomén sestrojitelnosti geometrických veličin, ke kterému se vracíme v 20. Některé pravidelné mnohoúhelníky totiž nejsou sestrojitelné eukleidovským pravítkem a kružítkem, přičemž zdůvodnění tohoto faktu je možné pouze podobně negeometrickým způsobem. . .

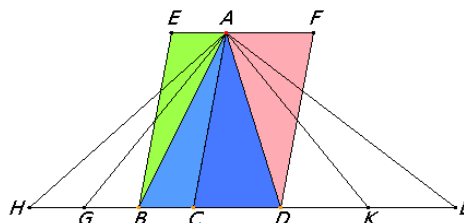
5.10 Cvičení

- (1) Alespoň trojím způsobem sestrojte pravidelný pětiúhelník, je-li dána jeho strana.
 - (2) Sestrojte pravidelný pětiúhelník vepsaný do dané kružnice, příp. opsaný dané kružnici.
 - (3) Dokažte tvrzení IV.10 pomocí podobnosti.
 - (4) Dokažte tvrzení XIII.10 bez počítání.
- ⇒ (5) Sestrojte pravidelný patnáctiúhelník a pokuste se o jiný netriviální mnohoúhelník.

5.11 Teorie podobnosti

Několikrát jsme v předchozím výkladu se značnou výhodou využili podobnosti nějakých trojúhelníků. Protože podobné obraty jsou velice hojné a užitečné, považujeme za účelné připomenout několik věcí.

Základní věty



Obrázek 5.25: [E_J] VI.1: Poměr obsahů trojúhelníků (resp. rovnoběžníků) se stejnou výškou je stejný jako poměr délek jejich základen.

V Základech je podobnostem věnována VI. kniha, jež začíná základním tvrzením VI.1, viz obr. 5.25. Uvědomte si, že vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku je důsledkem této věty a nikoli naopak! Důkaz VI.1 založen na I.38 a definici rovnosti poměrů z V. knihy. Tato definice (Def.V.5) říká, že veličiny a, b jsou *ve stejném poměru* jako veličiny c, d ,

$$a : b = c : d,$$

pokud pro každá čísla m, n platí:

$$na \stackrel{\cong}{=} mb \iff nc \stackrel{\cong}{=} md.$$

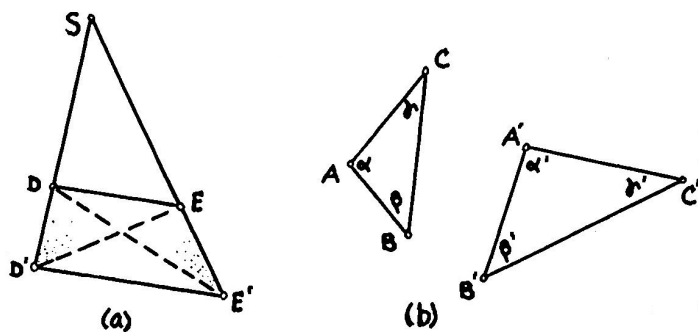
Možná to zní komplikovaně, ale opak je pravdou: Čísly se samozřejmě myslí celá čísla, veličiny jsou pro moderního čtenáře čísla reálná. S touto interpretací můžeme předchozí definici převyprávět

tak, že se se nám ihned vybavuje definice rovnosti reálných čísel sestavených z racionálních čísel pomocí tav. Dedekindových řezů...⁸

Následující věta VI.2 je bezprostředním důsledkem VI.1 (a I.38–39).

Věta (VI.2). *Přímka je rovnoběžná s jednou stranou trojúhelníku právě tehdy, když protíná zbylé dvě strany úměrně.*

Odtud (a z I.27, resp. I.29!) dále plyne VI.4–5, viz obr. 5.26. Důkazy jsou velmi přímočaré, viz cvičení.



Obrázek 5.26: [A] VI.2: $SD' : SD = SE' : SE \iff D'E' \parallel DE$. VI.4–5: $\alpha = \alpha'$ a $\beta = \beta'$ a $\gamma = \gamma' \iff b : c = b' : c'$ a $c : a = c' : a'$ a $a : b = a' : b'$.

Další pojmy

Trojúhelníky (obecněji, mnohoúhelníky) jsou *podobné*, pokud mají po dvou shodné vnitřní úhly a strany u shodných úhlů mají úměrné. Ekvivalenci VI.4–5 můžeme sugestivněji přepsat jako

$$\alpha = \alpha' \text{ a } \beta = \beta' \text{ a } \gamma = \gamma' \iff a' : a = b' : b = c' : c,$$

což znamená, že je lhostejné, zda podobnost trojúhelníků definujeme pomocí vnitřních úhlů nebo pomocí poměrů odpovídajících stran. Pokud jsou trojúhelníky podobné, pak poměr $a' : a = b' : b = c' : c$ nazýváme *koeficientem podobnosti*, což je kladné reálné číslo.

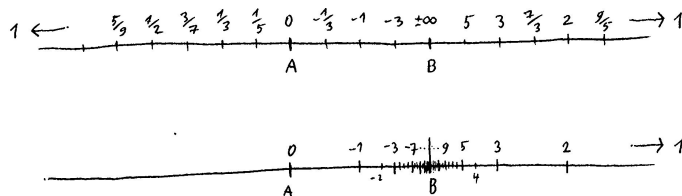
Předpokládejme, že na obrázku k VI.2 platí $DE \parallel D'E'$. Potom trojúhelníky SDE a $SD'E'$ jsou podobné — v tomto případě navíc *stejnolehlé*. Stejnolehlost je nejsympatičtější podobnost a budeme ji používat velice často. Stejnolehlost je určena středem, v našem případě S , a koeficientem, který je určen poměrem $SD' : SD = SE' : SE$. Schválně neříkáme, že koeficient stejnohlelosti je onen poměr, protože připouštíme také záporné hodnoty. Přesnější popis najdete v části 9.3. Stejnolehle trojúhelníky používáme k přenášení dělicího poměru tří bodů z jedné přímky na druhou.

Dělicí poměr trojice kolineárních bodů (A, B, C) je reálné číslo d takové, že platí $\overrightarrow{AC} = d \cdot \overrightarrow{BC}$; značíme a symbolicky zapisujeme takto:

$$d = (ABC) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}. \quad (5.5)$$

⁸Viz Algebra a aritmetika 3 (MA2BP_PAL3).

Komu se v těchto souvislostech vektory moc nezamlouvají, může dělicí poměr d definovat tak, že $|d| = |AC| : |BC|$, přičemž znaménko se určuje podle toho, zda bod C leží mezi A, B , či nikoli. . . Definice samozřejmě závisí na pořadí bodů ve trojici, viz cvičení 5.12(2).



Obrázek 5.27: K dělicímu poměru. . .

5.12 Cvičení

- (1) Dokažte VI.2 a VI.4–5.
- (2) Pro danou úsečku AB sestrojte bod C tak, aby dělicí poměr trojice (ABC) byl $d = -4$; vyjádřete dělicí poměr trojic (BAC) , (BCA) , . . .
- (3) Řešte předchozí úlohu pro jiné hodnoty d , např. $d = \pm 1, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}, \dots$
- (4) Pro dané dvě úsečky s velikostmi a a b sestrojte úsečku délky $a \cdot b$, resp. $\frac{a}{b}$.

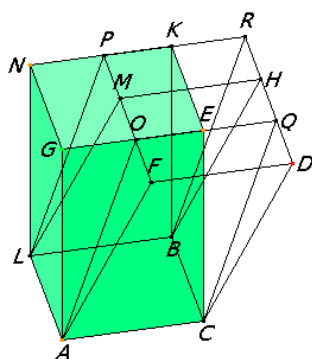
5.13 Trocha stereometrie

Některé definice

rovnoběžnost, kolmost, . . .

Objemy jednoduše

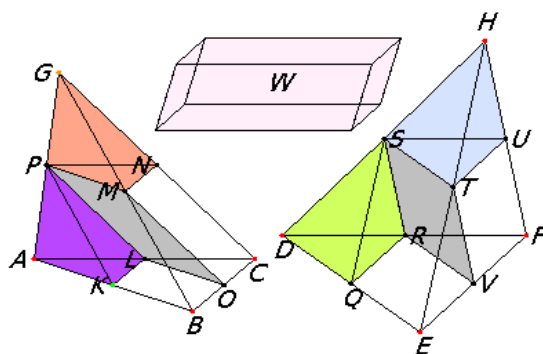
Tvrzení o objemech rovnoběžnostěnů najdeme v XI. knize Základů; celá teorie je velmi analogická tomu, co známe z I. knihy pro rovnoběžnostěny. To v důsledku znamená, že dva rovnoběžnostěny mají stejný objem právě tehdy, když jeden lze rozstříhat na části, z nichž lze složit ten druhý; sr. s Větou 5.3 na str. 19.



Obrázek 5.28: [E_J] XI.30: Rovnoběžnostěny se stejnou základnou a stejnou výškou mají stejný objem.

Objemy pomocí Eudoxovy metody

Může to vypadat překvapivě, ale následující diskuze o jehlanech je podstatně komplikovanější: Věta XII.5 je dokázána Eudoxovou exhaustivní metodou! Zajímavý výsledek M. Dehna (1900) však ukazuje, že to obecně ani jinak nejde. Zdůvodnění je — podobně jako v případě klasifikace eukleidovskey sestrojitelných veličin — veskrze algebraické. Trojrozměrná analogie Věty 5.3 na str. 19 platí pouze pro mnohostěny, které mají stejný tzv. Dehnův invariant, viz např. [Ha, část 27].



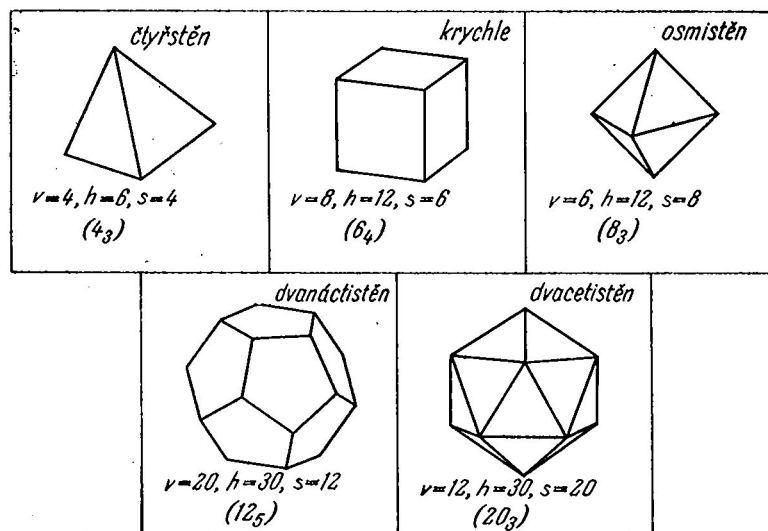
Obrázek 5.29: [Ha] XII.5: Poměr objemů jehlanů se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich základů.

Z věty XII.5 plyne XII.7 (viz obr. 4.8) a další. Teprve poté lze ukázat, že objem obecného jehlanu (resp. kužele) je třetinový vzhledem k objemu hranolu (resp. válce) se stejnou základnou a stejnou výškou. . .

5.14 Platónská tělesa

Celé Základy vrcholí popisem konstrukcí pěti pravidelných konvexních mnohostěňů, jejich klasifikací a diskuzí poměrů jejich stran vzhledem k poloměru opsané sféry (XIII.13–18). *Pravidelný konvexní mnohostěň* může být definován jako konvexní mnohostěň, jehož stěny jsou pravidelné

mnohoúhelníky a který má stejný počet stěn kolem každého vrcholu. Odtud pak skutečně plyne, že takový mnohostěn je vepsán do koule, má všechny stěnové úhly shodné atd. [Ha, Věta 44.4]. Pravidelné konvexní mnohostěny jsou známy jako Platónská tělesa.⁹



Obrázek 5.30: [Ko] Pravidelné konvexní mnohostěny.

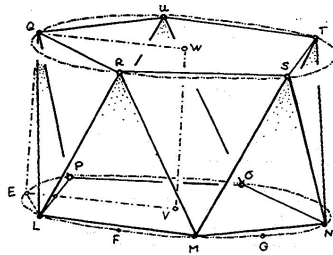
K problému zobrazení Platónských (a jiných) těles se vrátíme v Kapitole IV, kde budeme potřebovat právě poznatky z knihy XIII. Prozatím nabízíme na ochutnávku několik postřehů ke konstrukci pravidelného dvacetistěnu (XIII.16) a dvanáctistěnu (XIII.17).

Pravidelný dvacetistěn

- (1) Do kružnice se středem V vepíšeme pravidelný desetiúhelník $LFMGN \dots$; vrcholy L, M, N, O, P jsou vrcholy pravidelného pětiúhelníku, vrcholy E, F, G, \dots představují kolmé průměty horního pětiúhelníku $QRSTU$ z bubínkovitého základu. K jeho sestrojení potřebujeme zjistit výšku $VW = EQ$:

Všechny zvýrazněné trojúhelníky jsou podle předpokladu rovnostranné, zejména např. $QL =$ strana vepsaného pětiúhelníku. Přitom LE je strana pravidelného desetiúhelníku vepsaného do téže kružnice a trojúhelník LEQ je pravoúhlý. Z tvrzení XIII.10 (které jsme parafrázovali jako Větu 5.9 na str. 27) plyne, že $EQ = VW =$ strana vepsaného pravidelného šestiúhelníku, tj. poloměr startovní kružnice.

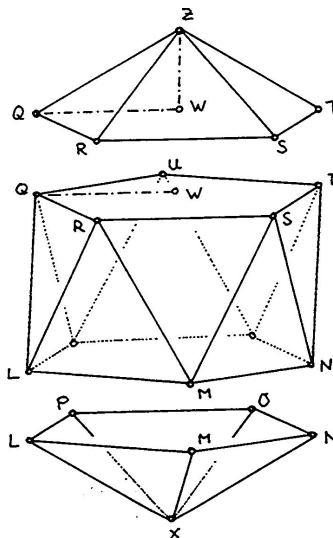
⁹Poloprávidelné konvexní mnohostěny jsou známy jako Archimédovská tělesa, pravidelné nekonvexní mnohostěny jako Keplerova tělesa, viz Přílohy.



Obrázek 5.31: [A] Pravidelný dvacetistěn poprvé: z XIII.10 plyne, že $EVWQ$ je čtverec.

(2) K sestrojení čepiček potřebujeme znát výšku WZ :

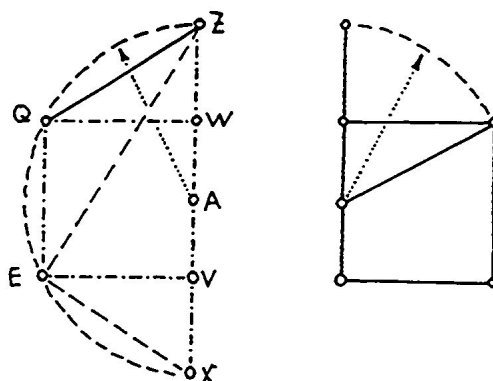
Trojúhelník QWZ je pravoúhlý, QZ = strana vepsaného pětiúhelníku a QW = strana vepsaného šestiúhelníku. Znovu podle XIII.10 zjišťujeme, že $WZ = LE$ = strana vepsaného desetiúhelníku, a tu již máme sestrojenou.



Obrázek 5.32: [A] Pravidelný dvacetistěn podruhé: z XIII.10 plyne, že $WZ = LE$.

(3) Pro kontrolu pravidelnosti sestrojeného dvacetistěnu ukážeme, že je vepsán do koule:

Na obr. 5.24 je naznačeno, jak jsou sestrojeny strany vepsaného pěti- a desetiúhelníku (což je odvozeno z konstrukce II.11). Porovnáním s naznačeným řezem vidíme, že body Z, Q, \dots leží na kružnici. . .



Obrázek 5.33: [A] Pravidelný dvacetistěn potřetí: řez dvacetistěnem a řez zlatý.

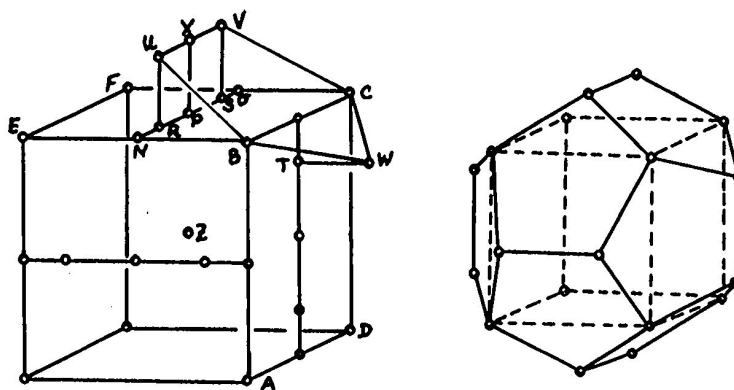
- (4) Na předchozím obrázku vidíme vztah mezi stranou QZ pravidelného dvacetistěnu a poloměrem opsané sféry $AZ = AQ = \dots$. Znovu podle XIII.10 víme, že $AW = WZ$, tudíž bod W je ve čtvrtině úsečky XZ . Při obvyklém označení $a = |QZ|$ a $r = |AZ|$ platí

$$\frac{r}{a} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}. \quad (5.6)$$

Pravidelný dvanáctistěn

Pravidelný dvanáctistěn je sestroyen tak, že se nad krychli postaví vhodné pětiúhelníkové střechy. Pro danou krychli umíme sestroyit stranu pětiúhelníkové stěny pomocí zlatého řezu; jediné, co potřebujeme dozjistit, je výška hřebene UV nad stěnou krychle. V XIII.17 se dokazuje, že tato vzdálenost je rovna právě polovině právě sestroyené strany. Pro vyznačené body na obr. 5.34 to znamená, že $RPXU$ je čtverec (N je středem BE , P je středem NO , R je ve zlatém řezu PN).

Poměr mezi stranou dvanáctistěnu a poloměrem opsané sféry je vyjádřen v XIII.18. .



Obrázek 5.34: [A] Pravidelný dvanáctistěn. . .

5.15 Cvičení

- (1) Ověřte (5.6) a srovnajte s vyjádřením v XIII.18.

(2) Připravte se na konstrukci dalších Platónských těles. . .

6 Úloha Apollóniova a úlohy příbuzné

Úkolem je sestrojiti kružnici, která se dotýká tří daných kružnic. Jako obvykle — sestrojiti znamená sestrojiti eukleidovským pravítkem a kružítkem. To v důsledku znamená, že se pídíme hlavně po dotykových bodech, teprve poté kreslíme výslednou kružnici. Jako limitní případy uvažujeme místo daných kružnic také body a přímky v různých kombinacích; takové úlohy jsou jednodušší, a proto s nimi začínáme. Každá verze úlohy může mít různé počty řešení podle vzájemné polohy tří daných objektů (v generickém případě pozorujeme řešení osm). Všeliké specifické případy a polohy necháváme na cvičení a do písemek. . .

Původní Apollóniovo (kolem 250 př.K.) řešení se nezachovalo, několik poznámek je známo díky Pappovy z Alexandrie (kolem 400). Následující výklad částečně sleduje rekonstrukci podle F. Vièta (kolem 1600). Protože metod řešení je skutečně velmi mnoho, vracíme se k problému ještě v Dodatku 21.

6.1 Nejjednodušší případy

BBB

Stará známá kružnice opsaná trojúhelníku; konstrukčně to znamená sestrojiti 2–3 **osy úseček**; pro různé nekolineární body má úloha jedině řešení.

PPP

Jedno z řešení je kružnice vepsaná trojúhelníku; konstrukčně to znamená sestrojiti několik **os úhlů**; úloha má nejvýše čtyři řešení.

BBP

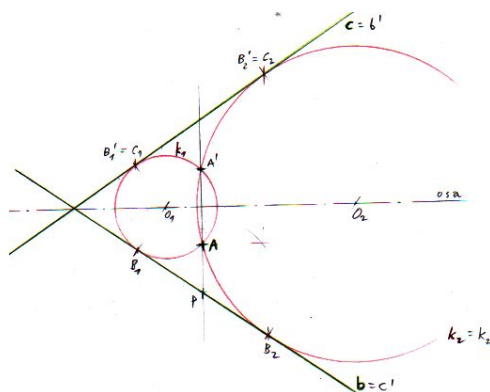
Tuto úlohu jsme řešili jako cvičení 5.6(5) pomocí postřehů založených na **mocnosti** bodu ke kružnici: Každý bod na přímce AB má stejnou mocnost ke všem kružnicím procházejícím body A, B ; řešení k se navíc dotýká přímky c , pro bod $P = AB \cap c$ tedy platí $PA \cdot PB = PC^2$. Stačí sestrojiti velikost úsečky PC , kterou nanese na přímku c . Úloha má nejvýše dvě řešení.

Obrázek 6.35: Řešení BBP pomocí mocnosti: (1) P je průsečík přímek AB a c ; (2) velikost $|PC| = |PX|$ je sestrojena pomocí Eukleidovy věty o odvěsně; (3) kružnice k je určena body A, B, C .

BPP

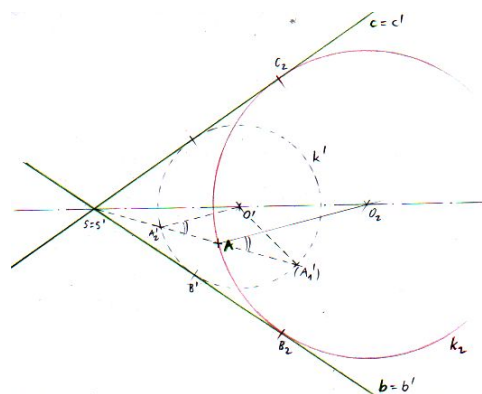
Tady nás napadají hned dva elementární způsoby řešení. Úloha má nejvýše dvě řešení.

(a) Postřeh: Každé řešení je samo k sobě **symetrické** podle naznačené osy úhlu. Stačí sestrojiti symetrický bod A' , zapomenout na jednu přímku a řešit úlohu BBP, kterou již umíme.



Obrázek 6.36: Řešení BPP pomocí osové souměrnosti: (1) A' je symetrický k A podle osy; (2) k je kružnice, která prochází body A, A' a dotýká se b (úloha BBP); (3) body dotyku s přímkami b a c jsou symetrické podle osy.

- (b) Postřeh: Dvě kružnice řešení jsou **stejnolehle** se středem stejnohlosti v průsečíku daných přímek. Obecněji, k je stejnohhlá se stejným středem s libovolnou kružnicí, která se dotýká b a c (a leží ve správném kvadrantu)...



Obrázek 6.37: Řešení BPP pomocí stejnohlosti: (1) k' je libovolná kružnice, která se dotýká b a c ; (2) k' chápeme jako stejnohhlý obraz k : A' je průsečík polopřímky SA s kružnicí k' ; (3) střed O je vzor středu O' vzhledem k této stejnohlosti: $AO \parallel A'O'$; (4) podobně je to s dotykovými body B a C ...

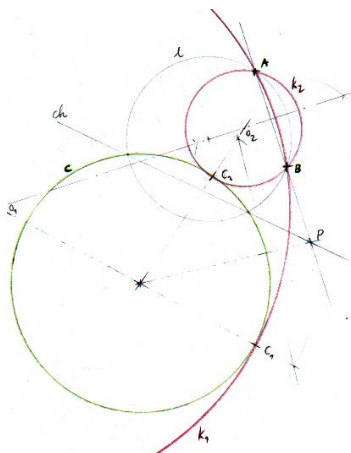
6.2 Mírná zobecnění

První dvě úlohy, kde se v zadání objevuje kružnice...

BBK

Můžeme řešit podobně jako BBP: Každý bod na přímce AB má stejnou **mocnost** ke všem kružnicím procházejícím body A, B ; řešení k se navíc dotýká c , na přímce AB tedy existuje bod

(P), který má tutéž mocnost také ke kružnici c . Stačí sestavit P a odtud tečny ke kružnici c . . . Úloha má nejvýše dvě řešení.



Obrázek 6.38: Řešení BBK pomocí mocnosti: (1) l je libovolná kružnice procházející A, B ; (2) ch je chordála kružnic l a c ; (3) bod P je průsečíkem chordály a přímky AB ; (4) C je dotykový bod tečny z bodu P ke kružnici c ; (5) kružnice k je určena body A, B, C .

PPK

Zobecnujeme řešení BPP(b): Každé dvě kružnice jsou **stejnolehlé**, nyní se díváme na kružnici danou a kružnici řešení. Stačí určit střed stejnohlelosti A . . . Úloha má nejvýše osm řešení.

Obrázek 6.39: Řešení PPK pomocí stejnohlelosti: (1) b' a c' jsou přímky rovnoběžné s b a c , které se dotýkají kružnice A ; (2) b' a c' chápeme jako stejnohlelé obrazy přímek b a c : střed stejnohlelosti $A = A'$ je průsečíkem přímky MM' s kružnicí a ; (3) střed O je vzor středu O' vzhledem k této stejnohlelosti: O je průsečík $O'A$ s osou; (4) podobně je to s dotykovými body B a C . . .

6.3 Pomocné konstrukce a postřehy

Společné tečny dvou kružnic, kružnice vs. cykly, dilatace.

6.4 Cvičení

- (1) Řešte PPK na obr. 6.39 znovu pomocí dilatace.
- (2) Řešte BPK v takové poloze, že daný bod leží na dané přímce.
- (3) Řešte KKK za předpokladu, že dvě z daných kružnic mají stejný průměr.
- (4) Řešte podobné úlohy v podobně specifických případech. . .

7 Kuželosečky

7.1 Elipsa

Elipsa je rovinná křivka, která může být definována mnoha různými způsoby. Některé nejnámější stručně připomeneme a hlavně naznačíme, proč jsou navzájem ekvivalentní. V odst. 10.3 pak uvádíme ještě jeden možný pohled na elipsu. . .

Elipsa je:

(a) uzavřená kuželo-sečka, tj. řez kuželové plochy takovou rovinou, která protíná všechny její povrchové přímky,

(b) množina bodů v rovině, jež mají konstantní součet vzdáleností od nějakých dvou bodů E a F :

$$|EX| + |XF| = \text{konst.},$$

(c) množina bodů v rovině, jež mají konstantní poměr vzdáleností od nějakého bodu F a nějaké přímky d , přičemž

$$|XF| : |Xd| = \text{konst.} < 1,$$

(d) křivka určená kvadratickou rovnicí (vzhledem k nějaké vhodné souřadné soustavě)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ resp. } y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2.$$

Body E, F jsou tzv. *ohniska*, přímka d je tzv. *řídící přímka* (elipsa má dvě ohniska a dvě řídící přímky); kvadratická rovnice v (d) je tzv. *středová*, resp. *vrcholová rovnice* elipsy; $2a =$ délka hlavní osy, $2b =$ délka vedlejší osy, číslo p je tzv. *parametr elipsy* a platí $p = \frac{b^2}{a}$; konstanta v (b) je rovna $2a$; konstanta v (c) je rovna $\frac{e}{a}$, kde $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ je tzv. *výstřednost* elipsy;

Historicky původní je definice (a), ostatní charakterizace jsou odtud odvozené. Diskuzi začneme ukázkou z klasického a velmi zevrubného pojednání o kuželosečkách od Apollónia z Pergy.

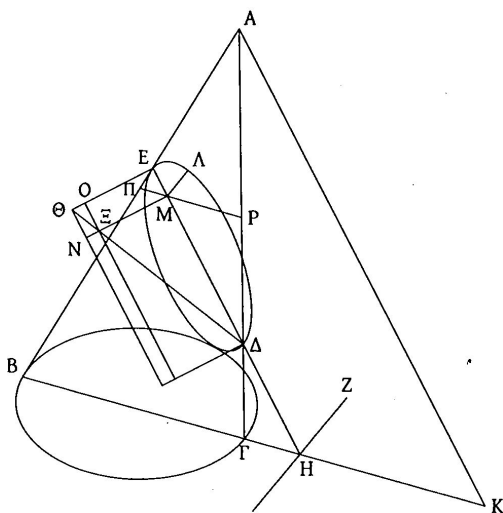
Věta (Apollóniova). *Při značení jako na obr. 7.40 platí:*

$$\Lambda M^2 = \Xi M \cdot ME, \tag{7.7}$$

kde Λ je libovolný bod na elipse a M je pata kolmice z Λ na ΔE . Přitom Ξ je na úhlopříčce pevného přiloženého obdélníku se stranami ΔE a $E\Theta$, kde $E\Theta$ je určena vztahem $\Delta E : E\Theta = AK^2 : (BK \cdot K\Gamma)$.

Úsečka $E\Theta$ je sestavená poněkud uměle, za chvíli však bude jasné, že odpovídá právě parametru elipsy. Odvození (7.7) plyne právě z definující rovnosti pro úsečku $E\Theta$ a podobností několika trojúhelníků:

$$\frac{\Delta M}{M\Xi} = \frac{\Delta E}{E\Theta} = \frac{AK}{BK} \frac{AK}{K\Gamma} = \frac{EM}{M\Pi} \frac{\Delta M}{MP}.$$



Obrázek 7.40: [Š] Ke 13. větě z I. knihy Apollóniových Kuželoseček...

Když levou stranu rozšíříme ME , budou mít poměry na obou stranách stejný číselník, odkud plyne rovnost jmenovatelů:

$$MΞ \cdot ME = MΠ \cdot MP.$$

Navíc rovina $ΠΠ$ je rovnoběžná s podstavou, tudíž řezem kuželové plochy touto rovinou je kružnice a $ΠΠ$ je její průměr. Podle Thaletovy věty je úhel $ΠΛP$ pravý a podle Eukleidovy věty o výšce platí:

$$MΠ \cdot MP = MΛ^2.$$

Dosazením do předchozí rovnice tak dostáváme (7.7). □

Odtud vyplývá ekvivalence mezi definicemi (a) a (d):

Označíme si $|EΘ| =: 2p$, dále $|EΔ| =: 2a$, $|EM| := x$ a $|MΛ| =: y$. Z podobnosti trojúhelníků $ΘEΔ$ a $ΘOΞ$ umíme při tomto značení vyjádřit $|ΞM| = 2p - \frac{p}{a}x$. Rovnici (7.7) pak můžeme přepsat jako

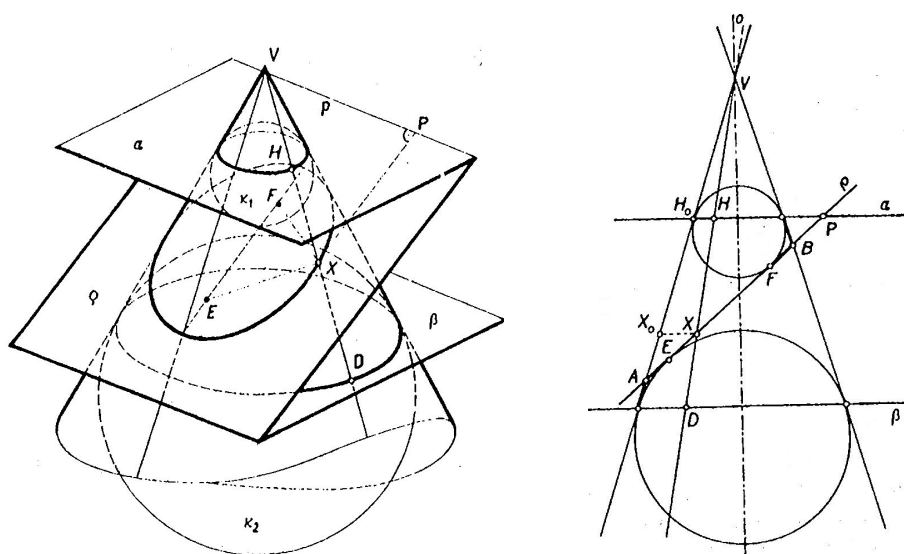
$$y^2 = \left(2p - \frac{p}{a}x\right)x,$$

což je právě vrcholová rovnice elipsy v (d). Vztah mezi vrcholovou a středovou rovnicí elipsy je snad jasný...

Věta (Dandelinova–Queteletova). *Předpokládejme, že řezem rotační kuželové plochy rovinou je elipsa. Pak ohniska této elipsy jsou právě body dotyku kulových ploch, které se dotýkají jak kužele, tak roviny řezu.*

Celé následující zdůvodňování je odvozeno z jednoduchého poznatku, že všechny tečny z daného bodu k dané kulové ploše jsou stejně dlouhé (myslíme samozřejmě úsečky od daného bodu k bodům dotyku).

Na obr. 7.41 značí E, F dotykové body kulových ploch s řeznou rovinou, X je libovolný bod na elipse, body H, D jsou průsečíky příčky VX s dotykovými kružnicemi kužele a vepsaných koulí. Chceme ukázat, že platí $|EX| + |XF| = \text{konst.}$, tj., že E a F jsou právě ohniska elipsy:

Obrázek 7.41: [Ku₂] K Dandelinově–Queteletově větě...

Podle výše uvedeného poznatku je $|EX| = |DX|$ a $|XF| = |XH|$, tudíž

$$|EX| + |XF| = |DX| + |XH| = |DH|.$$

Protože je kužel rotační, je vzdálenost $|DH|$ stále stejná pro všechny povrchové přímky, což jsme právě měli dokázat. \square

Odtud vidíme, proč jsou definice (a) a (b) ekvivalentní. Navíc z uvedeného lze velmi snadno doplnit také ekvivalenci s definicí (c) — stačí pojmenovat ony řídicí přímky:

Důsledek. *Řídicí přímky elipsy jsou právě průsečnice $\rho \cap \alpha$ a $\rho \cap \beta$ na obr. 7.41.*

Pro průsečnici $p = \rho \cap \alpha$, ohnisko F a pro libovolný bod X na elipse chceme ukázat, že platí $|XF| : |Xp| = \text{konst.} < 1$, tj., že p je její řídicí přímka:

Vzdálenost $|Xp|$ měříme jako vzdálenost $|XP|$, kde P je pata kolmice z X na p ; v pomocném bočním průmětu vidíme tuto vzdálenost nezkráceně. Před chvílí jsme si uvědomili, že $|XF| = |XH|$; tuto vzdálenost vidíme v bočním průmětu jako velikost pootočené úsečky $|X_0H_0|$ (pro jistotu dodáváme, že $HH_0 \parallel XX_0$). Platí tedy:

$$|XF| : |Xp| = |X_0H_0| : |XP|.$$

Protože trojúhelníky AH_0P a AX_0X (v bočním průmětu!) jsou stejnolehle, platí:

$$|X_0H_0| : |XP| = |AH_0| : |AP|,$$

což je konstanta (určená výhradně vzájemnou polohou rovin ρ , α a kužele). Navíc je zřejmé, že tato konstanta je < 1 , což jsme měli dokázat. \square

7.2 Hyperbola**7.3 Parabola****7.4 Některé další vlastnosti a pojmy**

Konstrukce tečny, pól/polára, osculační kružnice, Apollóniova kružnice. . .

8 Typické úlohy

9 Panoptikum geometrických zobrazení

V této části zmiňujeme několik exemplářů geometrických zobrazení, z nichž některá jsme zmiňovali už v předchozím výkladu. Doplnujeme několik dalších užitečných příkladů, v další části všechno zobecníme a zorganizujeme.

Až na několik výjimek (!) se jedná o zobrazení eukleidovské roviny, resp. prostoru do sebe...

9.1 Shodnosti

Dva trojúhelníky jsou shodné, když mají shodné všechny dvojice odpovídajících si stran a vnitřních úhlů. O shodných trojúhelnících mluví věty SUS, SSS apod. . .

Dva shodné trojúhelníky jednoznačně určují shodné zobrazení roviny do sebe takové, že jeden trojúhelník je obrazem toho druhého.

Zobrazení je *shodné*, když zachovává vzdálenosti bodů, tj. pro libovolné body A, B a jejich obrazy A', B' platí:

$$|A'B'| = |AB|. \quad (9.1)$$

Uvědomte si, že z uvedené definice skutečně vyplývá, že shodná zobrazení mají všechny další vlastnosti, které od nich očekáváme; shodná zobrazení zejména

- (a) zobrazují přímky na přímky,
- (b) zachovávají odchylky přímek,
- (c) zachovávají obsahy.

Přímo z definice také plyne, že každé shodné zobrazení je prosté. Shodná transformace roviny do sebe je proto nutně bijekce. Bijektivní shodné zobrazení se stručně nazývá *shodnost*. Shodností v rovině je pouze několik málo typů, jmenovitě:

- (1) identita,
- (2) posunutí,
- (3) otáčení,
- (3') středová souměrnost,
- (4) osová souměrnost,
- (5) posunutá (osová) souměrnost.

Středová souměrnost je právě otáčení o přímý úhel, proto ji podřazujeme obecnému otáčení. První tři transformace jsou přímé (zachovávají orientaci), poslední dvě nepřímé (mění orientaci).

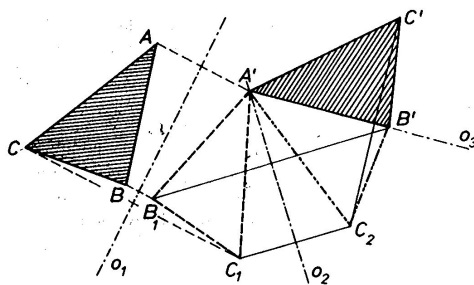


Obrázek 9.1: [Mar] Posunutá souměrnost.

Složením dvou shodností dostaneme zase shodnost a tímto způsobem lze ověřit, že výše uvedený výčet úplný. Při tomto experimentování si nelze nevšimnout, že jenom skládáním osových souměrností vyčerpáme všechny typy shodností. Ve skutečnosti platí o něco silnější tvrzení, které snadno zdůvodníte nad obr. 9.2:

Věta. Každou shodnost v rovině lze realizovat jako složení nejvýše tří osových souměrností.

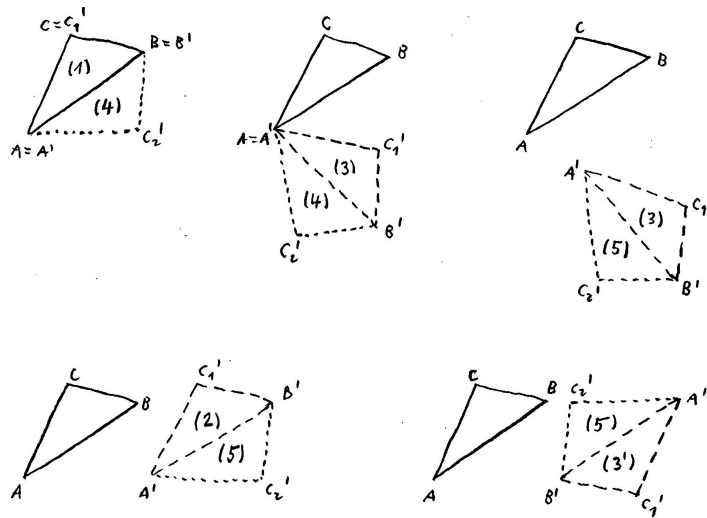
To je taky důvod, proč se osovým souměrnostem říká *základní shodnosti*...



Obrázek 9.2: [Sek] Každá shodnost v rovině je složením nejvýše tří osových souměrností.

Každá shodnost v rovině je jednoznačně určena obrazem $A'B'C'$ nějakého trojúhelníku ABC . Předepíšeme-li libovolně obraz $A'B'$ úsečky AB , pak bod C' je určen skoro jednoznačně, přesněji řečeno dvojnásobně: jedna možnost odpovídá přímé shodnosti, druhá nepřímé. Všechny typy shodností v rovině lze tedy systematicky vyčerpát také tak, že uvažujeme všechny typově různé obrazy úsečky AB , viz obr. 9.3.

Shodností se s úspěchem užívá při řešení mnoha konstrukčních úloh. Jeden příklad je na obr. 6.36, další ukázky ve cvičeních...



Obrázek 9.3: Přehled shodností pomocí obrazů trojúhelníku.

9.2 Cvičení

- (1) Připomeňte si definice všech výše jmenovaných shodností, zejména popište jejich určující prvky.
- (2) Pro dva dané shodné trojúhelníky rozhodněte, zda jsou osově souměrné (zformulujte nějaké přirozené kritérium).
- (3) Pokud je odpověď v předchozí úloze záporná, pak:
 - pojmenujte odpovídající shodnost a popište její určující prvky,
 - vyjádřete tuto shodnost jako složení osových souměrností,
 - alespoň dvojnásobným způsobem sestrojte obraz libovolného dalšího bodu.

9.3 Podobnosti

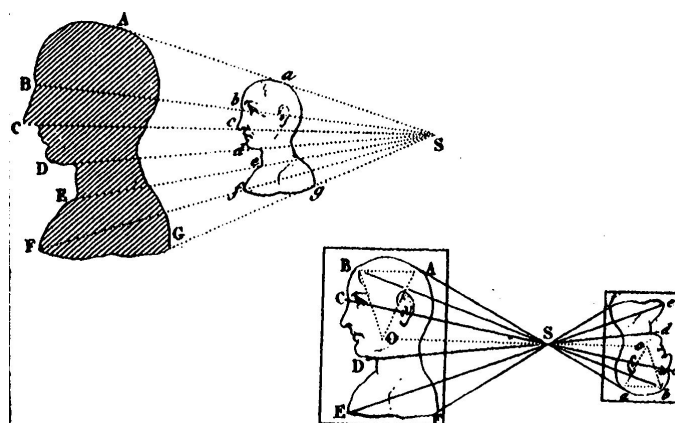
Stejnolehlost (homotetie)

O stejnoolehlosti jsme mluvili už v odstavci 5.11 na str. 29:

Stejnolehlost je transformace určená středem S a koeficientem $k \in \mathbb{R}$ tak, že obraz X' libovolného bodu X leží na přímce SX a platí:

$$(X'XS) = k, \text{ tzn. } \overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX}, \text{ neboli } X' = S + k \cdot \overrightarrow{SX}. \quad (9.2)$$

Speciální, příp. degenerované případy, které zpravidla za stejnoolehlost neprohlašujeme, jsou: středová souměrnost pro $k = -1$, identita pro $k = 1$, příp. ještě nulové zobrazení pro $k = 0$. Nezávisle na znaménku koeficientu k je stejnoolehlost v rovině vždy přímým zobrazením. Střed stejnoolehlosti je jejím jediným pevným bodem.



Obrázek 9.4: [Be] Stejnolehlost v rovině je vždy přímá.

Z věty VI.2 (obr. 5.26) víme, že obrazem přímky v libovolné stejnoolehlosti je přímka s ní rovnoběžná, speciálně přímky procházející středem stejnoolehlosti se zobrazují samy do sebe. Pokud tedy skládáme stejnoolehlosti, pak výsledné transformace nemusejí být nutně stejnoolehlostmi, musí však mít právě popsanou vlastnost. Takových transformací je jenom několik — upřesnění je v následující větě, zdůvodnění plyne hlavně z VI.2.

Věta. *Uvažujme stejnoolehlosti h_i se středy S_i a koeficienty k_i ($i = 1, 2$); složené zobrazení $h_2 \circ h_1$ označíme h . Potom platí:*

- (1) $k_1 k_2 = 1$ a $S_1 = S_2 \implies h$ je identita,
- (2) $k_1 k_2 = 1$ a $S_1 \neq S_2 \implies h$ je posunutí o vektor $\mathbf{v} = (1 - k_2) \overrightarrow{S_1 S_2}$,
- (3) $k_1 k_2 \neq 1 \implies h$ je stejnoolehlost s koeficientem $k = k_1 k_2$ a středem

$$S = S_1 + \frac{1 - k_2}{1 - k_1 k_2} \overrightarrow{S_1 S_2}.$$

U úloh s kružnicemi se často odkazujeme na následující tvrzení, které lze snadno vyvodit opět z VI.2 a Thaletovy věty:

Věta. *Stejnolehlym obrazem kružnice je kružnice. A navíc každé dvě kružnice jsou stejnoolehlé — koeficient stejnoolehlosti je roven poměru poloměrů, možné středy stejnoolehlosti jsou nejvýše dva.*

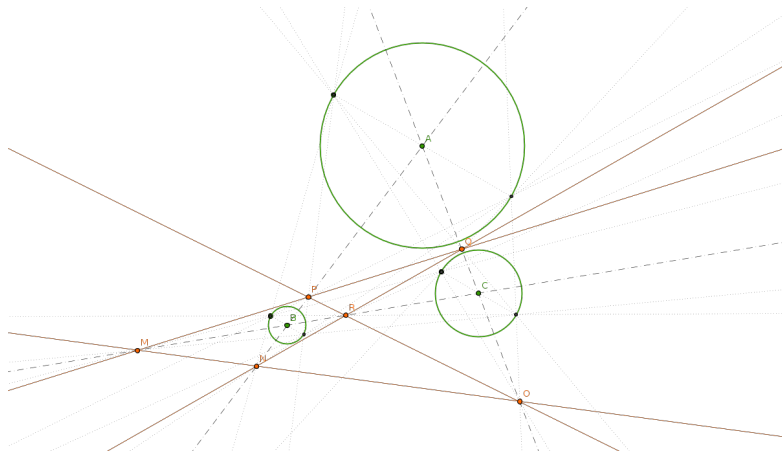
Jako bezprostřední důsledek předchozích dvou tvrzení zmiňujeme další velmi klasickou větu.

Věta (Mongeova). *Šest středů stejnoolehlosti tří kružnic tvoří vrcholy tzv. úplného čtyřstranu, viz obr. 9.5.*

Stejnolehlost jsme užili např. v Apollóniových úlohách na obr. 6.37 nebo obr. 6.39, při přenášení dělicího poměru tří bodů apod. Další aplikace najdete ve cvičeních. . .

Obecná podobnost

O podobnostech jsme se zmiňovali již v odst. 5.11. Dva podobné trojúhelníky určují jednoznačně podobné zobrazení roviny do sebe takové, že jeden je obrazem druhého.



Obrázek 9.5: Mongeova věta: Vnější středy stejnohlosti tří kružnic leží na přímce a stejně tak každé dva vnitřní a jeden vnější střed leží na přímce.

Zobrazení je *podobné*, když pro libovolné body A, B a jejich obrazy A', B' platí:

$$|A'B'| = k \cdot |AB|, \quad (9.3)$$

kde k je kladná reálná konstanta, tzv. koeficient.

Podobné zobrazení s koeficientem $k = 1$ je shodné. Podobná neshodná zobrazení nezachovávají vzdálenosti, ani obsahy; nicméně pokud se vzdálenosti mění k -krát, obsahy se mění k^2 -krát. Odchytky se zachovávají, sr. s odst. 5.11.

Podobně jako pro shodná zobrazení: každé podobné zobrazení je prosté, podobné zobrazení roviny do sebe je nutně bijekce a bijektivní podobné zobrazení se stručně nazývá *podobnost*. Pokud obecnou podobnost s koeficientem k složíme s nějakou stejnohlostí s koeficientem $\frac{1}{k}$, pak výsledné zobrazení je jistě shodnost. Odtud můžeme vydedukovat následující tvrzení:

Věta. *Každou podobnost lze realizovat (mnoha různými způsoby) jako složení shodnosti a stejnohlosti.*

Celkem zajímavý a nesamozřejmý výsledek je v následující větě, kterou jednoduše zdůvodníme v příštím semestru. Existuje také konstrukční zdůvodnění, jež necháváme pro zájemce jako cvičení.

Věta. *Každá vlastní podobnost má právě jeden pevný bod.*

Vlastní podobností se myslí podobnost, která není shodnost. Pevný bod vlastní podobnosti se nazývá *střed podobnosti*.

9.4 Cvičení

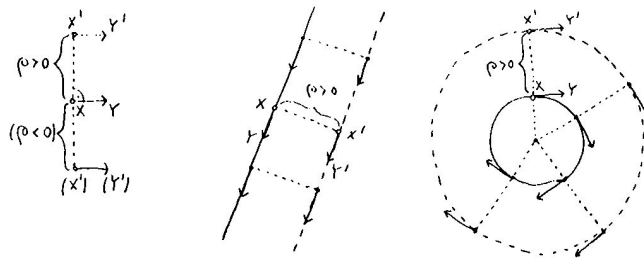
- (1) Dokažte větu o skládání stejnohlostí; v případě (3) aspoň zdůvodněte, že výsledný střed stejnohlosti S leží na přímce S_1S_2 .

- (2) Zdůvodněte také ostatní citovaná tvrzení a představte si různé limitní případy.
- (3) Pro dva dané podobné trojúhelníky rozhodněte, zda jsou stejnohlé (zformulujte nějaké přirozené kritérium).
- (4) Pokud je odpověď v předchozí úloze záporná, pak:
- vyjádřete odpovídající podobnost jako složení stejnohlelosti a shodnosti,
 - sestrojte obraz libovolného dalšího bodu v rovině,
 - zkuste určit střed této podobnosti.
- (5) Sestrojte přímkou spojující daný bod s nedostupným bodem mimo rýsovací plochu, který je dán jako průsečík dvou různoběžných přímek.

9.5 Dilatace

Dilataci zmiňujeme poprvé v odstavci 6.3, podruhé ve cvičení 6.4(1). Na rozdíl od všech ostatních zobrazení v tomto textu — **dilatace není bodové zobrazení!** To znamená, že nemá smysl mluvit o obrazu bodu X , protože ten může být při jedné a téže dilataci zobrazen kamkoli. Dilatace není zobrazení na množině bodů, je to však zobrazení na množině tzv. orientovaných dotykových (kontaktních) elementů, jež můžeme reprezentovat polopřímkami. Obecně se takovým zobrazením říká *kontaktní zobrazení*.

Dilatace je kontaktní zobrazení určené reálným číslem $\rho \neq 0$ tak, že obraz orientovaného kontaktního elementu zastoupeného polopřímkou XY je reprezentován polopřímkou $X'Y'$, která je posunuta o vzdálenost ρ kolmo k XY , a to na správnou stranu v závislosti na orientaci. Konvence je taková, aby směrový vektor \overrightarrow{XY} a vektor posunutí $\overrightarrow{XX'}$ (v tomto pořadí) tvořily kladnou bázi, když ρ je kladné, a zápornou bázi, když ρ je záporné.



Obrázek 9.6: Dilatace není bodové zobrazení, dilatace je kontaktní zobrazení! Vlevo je naznačen obraz dotykového elementu XY v závislosti na znaménku ρ ; další dva obrázky ilustrují obraz orientované přímky, resp. kružnice jakožto obálky jejich dotykových elementů pro $\rho > 0$.

Pokud říkáme, že „dilatujeme křivku“ o nějakou hodnotu ρ , myslíme tím jednak orientovanou křivku, hlavně však spolu se všemi jejími orientovanými tečnami! Všechna kontaktní zobrazení — tedy i dilatace — mají tu vlastnost, že zachovávají dotyk křivek.¹

¹Každé bodové zobrazení je kontaktní, přesněji řečeno: určuje jednoznačně kontaktní zobrazení...

Dilatace se hojně užívá k redukci složitosti obecnějších Apollóniových úloh; právě tato metoda dominuje ve Viětově rekonstrukci původního řešení.

9.6 Kruhá inverze

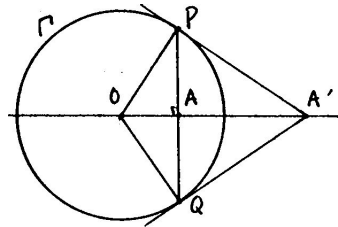
Kruhá inverze je transformace určená tzv. řídicí kružnicí (se středem S a poloměrem r) tak, že obraz X' libovolného bodu $X \neq S$ leží na polopřímce SX a platí:

$$|SX| \cdot |SX'| = r^2.$$

Přímo z definice a Eukleidovy věty o odvěsně plyne možný konstrukční návod k sestrojení obrazu daného bodu, viz obr. 9.7. Z definice také plyne několik dalších zřejmostí:

- (a) *Kruhá inverze je involutivní transformace (podobně jako např. osová souměrnost).*
- (b) *Všechny body na řídicí kružnici jsou pevné, tzn. zobrazují se samy na sebe.*
- (c) *Všechno, co je vně řídicí kružnice se zobrazuje dovnitř a naopak.*
- (d) *Každá přímka procházející středem inverze se zobrazuje sama do sebe, přičemž jediné pevné body jsou průsečíky s řídicí kružnicí a $\lim_{X \rightarrow S} X'$ je nevlastní bod této přímky.*

Z uvedeného je patrné, proč v definici vylučujeme případ $X = S$: obrazem středu inverze by mohl být libovolný bod v nekonečnu, tudíž by nebyl určen jednoznačně. Nicméně právě tuto vlastnost budeme v dalším s oblibou využívat!

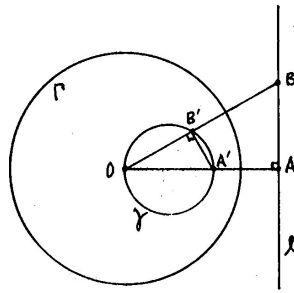


Obrázek 9.7: [Ha] Obraz bodu při kruhové inverzi určené kružnicí Γ .

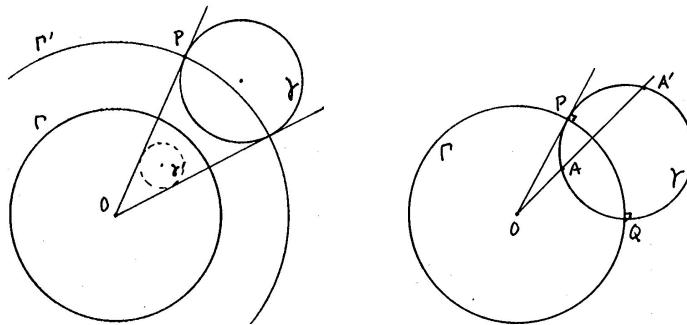
Kruhá inverze má mnoho dalších nezřejmých, ale velmi užitečných vlastností; některé z nich teď postupně představíme.

Věta. *Při kruhové inverzi s řídicí kružnicí Γ a středem S platí:*

- (e) *Přímka neprocházející středem S se zobrazuje na kružnici procházející středem S , a naopak.*
- (f) *Kružnice kolmá ke Γ se zobrazuje sama do sebe. Naopak, každá kružnice procházející dvojicí inverzních bodů je kolmá ke Γ .*
- (g) *Obecná kružnice neprocházející středem S se zobrazuje do jiné kružnice neprocházející S .*



Obrázek 9.8: [Ha] Obrazem přímky při kruhové inverzi je kružnice procházející středem, a naopak.



Obrázek 9.9: [Ha] Obrazem kružnice neprocházející středem je opět kružnice; kružnice se zobrazuje sama do sebe právě tehdy, když protíná řídicí kružnici kolmo.

Zdůvodnění je následující:

□

Kruhová inverze v žádném případě nezachovává vzdálenosti bodů (ani jejich poměry), přímky a kružnice zobrazuje na přímky nebo kružnice. Něco se přece jenom zachovává:

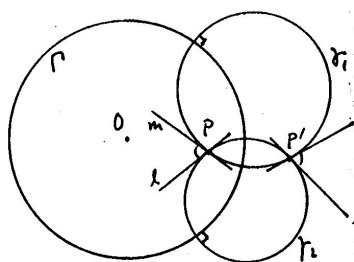
Věta. *Kruhová inverze je konformní zobrazení, tzn. zachovává odchylky protínajících se křivek.*

Zdůvodňujeme nad obr. 9.10: Odchylku jakýchkoli dvou křivek v jejich společném bodě P reprezentujeme přímkami m a l . Tutéž odchylku můžeme také reprezentovat pomocí dvou kružnic — z nekonečného množství možností vybíráme takové kružnice γ_1 a γ_2 , které jsou kolmé k řídicí kružnici Γ . Tyto kružnice se zobrazují samy do sebe, obrazem bodu P je jejich druhý společný bod P' a odchylka m a l se transformuje na odchylku kružnic v bodě P' . Nicméně tato odchylka je táž jako v bodě P , což jsme chtěli dokázat. □

Kruhovou inverzi zmiňujeme zejména v souvislosti s Apollóniovými úlohami (k jejichž řešení byla poprvé užita v r. 1879)...

9.7 Cvičení

- (1) Pomocí kruhové inverze řešte znovu některé Apollóniovy úlohy zmiňované v části 6.
- ⇒ (2) Dokažte, že s pomocí dilatace a kruhové inverze umíte vyřešit obecnou Apollóniovu úlohu.
- (3) Vyjádřete stejnolehlost s daným středem a koeficientem jako složení kruhových inverzí.



Obrázek 9.10: [Ha] Kruhová inverze je konformní zobrazení.

9.8 Afinní zobrazení

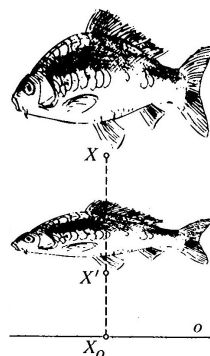
Zkosení (elace)

Chápeme-li rovnoběžník $BCFE$ na obr. 5.12 jako obraz rovnoběžníku $BCDA$ při nějaké transformaci, pak jméno této transformace zní *elace* (často přezdívaná jako zkosení, smyk apod.). Elace má přímku pevných bodů (v tomto příkladu BC), již zoveme *osou*. Elace je určena osou o a dvojicí bodů $A \mapsto A'$ (v tomto příkladu $A' = E$) takovou, že $AA' \parallel o$. Pokud není jasné, jak je těmito daty elace určena, čtěte dál...

Elace není shodnost ani podobnost, nicméně zřejmě zachovává orientaci, tzn. elace je přímá. Navíc tvrzení I.35 říká, že elace zachovává obsahy...

Osová afinita

Elace je speciálním případem transformace, které se říká *osová afinita*. Jiným příkladem osově afinity je např. transformace na obr. 9.11. Tato osová afinita má vodorovnou osu (= přímku



Obrázek 9.11: [Ku] Typická (i když trochu specifická) osová afinita: zkracování v jednom směru...

pevných bodů) a v tomto směru se „nic neděje“. Ve vsílém směru se všechno zkracuje a podstatné je, že „všude stejně“! Bez přílišných uvozovek můžeme totéž vyslovit následovně:

Osová afinita je transformace určená osou o a dvojicí bodů $A \mapsto A'$, a to tak, že pro obraz X' libovolného bodu X platí

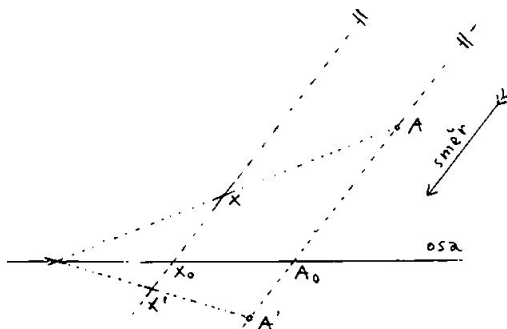
$$XX' \parallel AA' \text{ a } (X'X X_0) = (A'A A_0) = \text{konst.}, \quad (9.4)$$

kde X_0 , resp. A_0 , značí průsečík přímky XX' , resp. AA' , s osou o .

Konstantě $(A'A A_0)$ se říká *modul* (nebo taky *charakteristika*), směru přímky AA' se říká *směr* osově afinity.

Uvědomte si, že přímo z definice (a věty VI.2) plyne návod ke konstrukci obrazu libovolného bodu X . Z definice dále plyne, že osová afinita zachovává dělicí poměr bodů na jakékoli přímce (tedy ne jen na ose nebo ve směru AA'). Speciálními, resp. mezními případy osově afinity jsou:

- osová souměrnost (směr $\perp o$ a modul $= -1$),
- tzv. šikmá souměrnost (směr $\not\perp o$ a modul $= -1$),
- elace (směr $\parallel o \implies$ modul $= 1$),
- rovnoběžné promítání do přímky o (směr $\parallel o$ a modul $= 0$).



Obrázek 9.12: Obraz bodu v osově afinitě. . .

Obecné afinní zobrazení

Osová afinita je speciálním případem *afinního zobrazení*:

Zobrazení je *afinní*, když

- zobrazuje kolineární body na kolineární body,
- zachovává dělicí poměry bodů,
- zachovává rovnoběžnost.

Kolineární body jsou body, které leží na jedné přímce, tedy také body splývající. Podmínka (b), resp. (c) tedy má smysl pouze v případě, kdy se různé kolineární body nezobrazí do jednoho bodu. Z (a) a (b) plyne, že afinní zobrazení zobrazuje přímky na přímky, resp. na body (tedy nikoli např. na úsečky). Za předpokladu (a) jsou vlastnosti (b) a (c) ekvivalentní. . .

Definice afinního zobrazení tedy může být vyslovena různými způsoby, např. takto:

Zobrazení je *afinní*, když

(a') zobrazuje přímky na přímky nebo body,

(b') zachovává rovnoběžnost přímek.

Bijektivní afinní zobrazení se nazývá *afinita*. Výše zmiňované rovnoběžné promítání do přímky tedy určitě není afinita. Osově afinity a rovnoběžná promítání do přímky nazýváme *základní afinní transformace*; jsou to právě ty afinní transformace, které mají přímku pevných bodů.

Zobecnění některých základních tvrzení z odstavců o shodnostech a podobnostech je následující:

Věta. *Každá afinní transformace v rovině*

- je jednoznačně určena obrazem tří bodů v obecné poloze,
- lze vyjádřit jako složení nejvýše tří základních afinních transformací.

První fakt by měl být celkem jasný a dokazuje se konstruktivně, viz cvičení. Druhý fakt se zdůvodňuje velmi podobným způsobem, jako věta 9.1 o rozkladu shodností. . . Při těchto rozkladech máme vždy celkem hodně volnosti, nyní dokonce ještě daleko více než při rozkládání shodností.

9.9 Cvičení

- (1) Z uvedených definic dokažte, že každá shodnost/podobnost je afinita, ale kruhová inverze nikoli.
- (2) Pro dva dané trojúhelníky rozhodněte, zda je jeden obrazem druhého vzhledem k nějaké osově afinitě (zformulujte nějaké přirozené kritérium).
- (3) Pokud je odpověď v předchozí úloze záporná, pak:
 - vyjádřete odpovídající afinitu jako složení osových afinit,
 - sestrojte obraz libovolného dalšího bodu v rovině.
- (4) Vyjádřete stejnolehlost s daným středem a koeficientem jako složení osových afinit.
- (5) Předp., že tři dané body jsou obrazy sousedních vrcholů pravidelného n -úhelníku ($n = 4, 5, 6, 8, 10, \dots$); sestrojte obrazy ostatních vrcholů.

9.10 Projektivní zobrazení

Středové promítání

Typické projektivní zobrazení je středové promítání. V rovině máme na mysli středové promítání do přímky, jež je určeno středem S a přímkou o : obraz X' libovolného bodu X je jednoduše průsečík $X' = SX \cap o$.

Středové promítání nezachovává dělicí poměr tří bodů, avšak zachovává *dvojpoměr* čtyř bodů na přímce (což za chvíli dokážeme).

Dvojpoměr čtveřice kolineárních bodů (A, B, C, D) je reálné číslo definované jako poměr dělicích poměrů $(ABC) : (ABD)$; vzhledem k (5.5) píšeme následovně:

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}. \quad (9.5)$$

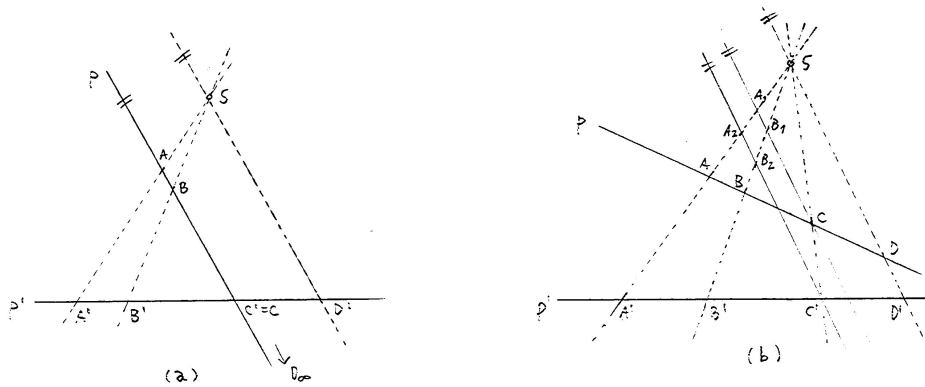
Vzhledem k tomu, že $\lim_{D \rightarrow \infty} (ABD) = 1$, platí $\lim_{D \rightarrow \infty} (ABCD) = (ABC)$, což zapisujeme jako:

$$(ABCD_\infty) = (ABC).$$

Pro dané tři kolineární body je poloha čtvrtého body na téže přímce jednoznačně určena dvojpoměrem. Číselné vyjádření samozřejmě závisí na pořadí bodů ve čtveřici. . .

Věta (Pappova). *Při středovém promítání se zachovávají dvojpoměry kolineárních bodů.*

Ukážeme nejdříve ve speciálním případě, poté obecně. Odkazujeme opět na tvrzení VI.2 o stejnohlých trojúhelnících, viz obr. 9.13:



Obrázek 9.13: Dvojpoměr se středovým promítáním nemění!

- (a) Trojúhelníky $A'AC'$ a $A'SD'$ jsou stejnohlé a $C' = C$, tudíž $\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'D'}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{SD'}}$. Trojúhelníky $B'BC'$ a $B'SD'$ jsou taky stejnohlé, tudíž $\frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{B'D'}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{SD'}}$. Odtud dělením obou rovnic dostáváme

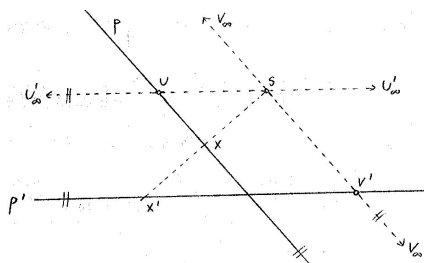
$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'D'}} : \frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{B'D'}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{B'C'}} : \frac{\overrightarrow{A'D'}}{\overrightarrow{B'D'}}.$$

Výraz nalevo je právě $(ABC) = (ABCD_\infty)$, napravo je $(A'B'C'D')$, takže v tomto specifickém případě skutečně platí $(ABCD_\infty) = (A'B'C'D')$.

- (b) Uvažujme dvě obecné přímky se středovými průměty libovolné čtveřice bodů. Vedeme pomocné rovnoběžky jdoucí body C a C' : Z předchozího odstavce plyne, že $(A_1B_1C) = (ABCD)$ a současně $(A_2B_2C') = (A'B'C'D')$. Navíc ale ze stejnohlosti pomocných trojúhelníků plyne $(A_1B_1C) = (A_2B_2C')$, takže i v tomto obecném případě platí $(ABCD) = (A'B'C'D')$. \square

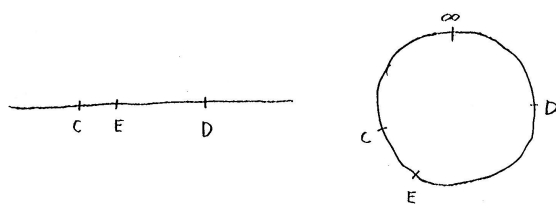
Projektivní rozšíření

V předchozím odstavci jsme si mohli všimnout, jak je výhodné uvažovat *nevlastní body*, tj. body v nekonečnu. Uvědomte si, že diskutované středové promítání mezi dvěma (různoběžnými) přímkami p a p' zobrazuje jednu přímku na druhou, pouze když uvážíme také nevlastní body: na p existuje bod U , který se zobrazuje do nevlastního bodu přímky p' , a na p' máme bod V' , jehož vzor je nevlastní bod přímky p . Takovým bodům říkáme *úběžníky*.



Obrázek 9.14: Středové promítání zobrazuje projektivní přímky na projektivní přímky.

Projektivní přímka je tzv. projektivním rozšířením standardní přímky, což je rozšíření právě o její nevlastní bod. Uvědomte si, že každá přímka má od přírody právě jeden nevlastní bod — projektivní přímka je tedy něco jiného, než rozšířená reálná osa, jak ji známe z analýzy!



Obrázek 9.15: Na standardní přímce je bod E mezi body C a D . Na projektivní přímce nemá relace „mezi“ valného smyslu.

Podobně, *projektivní rovina* je standardní rovina rozšířená o její nevlastní body (které tvoří projektivní přímku). Body, které nejsou nevlastní jmenujeme *vlastní*. Projektivní přímky v projektivní rovině se tedy vždy protínají — pokud se náhodou protínají v nevlastním bodě, mluvíme o rovnoběžnosti. . .

Osová (středová) kolineace

Podobně jako rovnoběžné promítání můžeme chápat jako speciální případ promítání středového (kdy střed je někde v nekonečnu), můžeme taky osovou afinitu chápat jako speciální případ *osové kolineace*:

Osová kolineace je transformace určená osou o , středem S a dvojicí bodů $A \mapsto A'$, a to tak, že pro obraz X' libovolného bodu X platí

$$XX' \cap AA' = S \quad \text{a} \quad (X'X X_0S) = (A'A A_0S) = \text{konst.}, \quad (9.6)$$

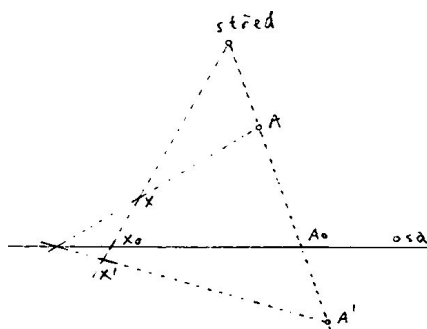
kde X_0 , resp. A_0 , značí průsečík přímky XX' , resp. AA' , s osou o .

Konstantě $(A'A A_0S)$ se říká *modul* (nebo taky *charakteristika*) osové kolineace. V literatuře se často místo přívlastku osová užívá středová. . .

Uvědomte si, že přímo z definice (a Pappovy věty) plyne návod ke konstrukci obrazu libovolného bodu X . Odtud dále plyne, že osová kolineace zachovává dvojpoměry bodů na jakékoli přímce (tedy ne jen na ose nebo přímce procházející středem).

Uvědomte si, že osová kolineace je dobře definovaná pouze jako transformace v projektivní (tedy nikoli standardní) rovině, tzn. že nevlastní body se můžou zobrazit do vlastních a naopak. Střed a všechny body na ose jsou pevnými body. Speciálními, resp. mezními případy osové kolineace jsou:

- osová afinita (střed S je nevlastní),
- stejnolehlost (osa o nevlastní),
- posunutí (S i o nevlastní),
- středové promítání do přímky o (modul = 0).



Obrázek 9.16: Obraz bodu v osové kolineaci. . .

Obecné projektivní zobrazení

Osová kolineace a středová promítání jsou tzv. *základní projektivní zobrazení*. . .

Zobrazení je *projektivní*, když

- (a) zobrazuje kolineární body na kolineární body,
- (b) zachovává dvojpoměry.

Stručně a ekvivalentně můžeme definici vyslovit takto:

Zobrazení je *projektivní*, když

- (a') zobrazuje projektivní přímky na projektivní přímky nebo body.

Bijektivní projektivní zobrazení se nazývá *kolineace* nebo *projektivita*...

Zobecnění některých základních tvrzení z předchozích odstavců je následující:

Věta. *Každá projektivní transformace v rovině*

- je jednoznačně určena obrazem čtyř bodů (z nichž žádné tři nejsou kolineární),
- lze vyjádřit jako složení nejvýše čtyř základních projektivních transformací.

První fakt zdůvodníme konstruktivně zobecněním afinního případu; klíčovou dovedností, kterou při sestrojování obrazu obecného bodu používáme, je přenášení dvojpoměru čtveřice bodů, viz cvičení! Druhý fakt by neměl nikterak překvapovat; opět pozorujeme ohromné množství možností...

Na závěr jedno klasické tvrzení, na které musíme narazit, když se snažíme charakterizovat osovou kolineaci:

Věta (Desarguesova). *Pro libovolné dva trojúhelníky XYZ a $X'Y'Z'$ v projektivní rovině platí: přímky XX' , YY' , ZZ' prochází jedním bodem právě tehdy, když průsečíky přímk XY a $X'Y'$, YZ a $Y'Z'$, XZ a $X'Z'$ leží na jedné přímce.*

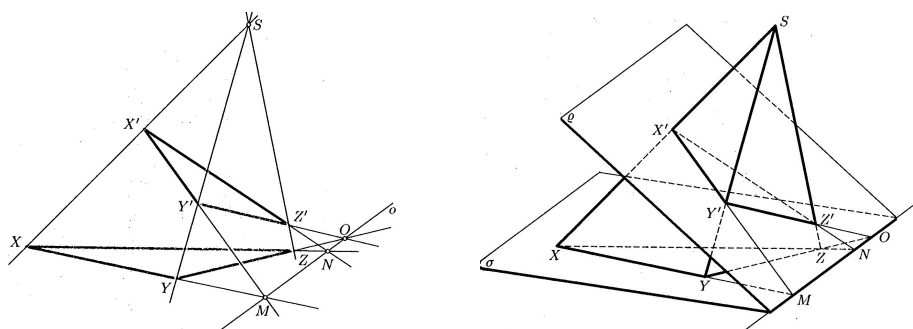
Toto je další případ tvrzení, jehož planimetrický důkaz je značně netriviální, které je však velmi srozumitelné s vhodnou trojrozměrnou interpretací, viz obr. 9.17:

Při zdůvodňování první implikace se odkážeme na poznatek, že každé dvě roviny se protínají v přímce (vlastní či nevlastní). Při zdůvodňování druhé implikace se odkážeme na poznatek, že každé tři roviny musí mít — v našem případě — společný právě jeden bod (vlastní či nevlastní). \square

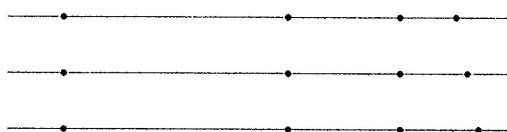
V této souvislosti asi nikoho nepřekvapí, že první aplikace osové kolineace (resp. afinity) potkáme při sestrojování řezů jehlanovitých (resp. hranolovitých) těles, viz cvičení 13.3...

9.11 Cvičení

- (1) Pro dané čtyři kolineární body A, B, C, D a tři kolineární body K, L, M sestrojte bod N tak, aby $(KLMN) = (ABCD)$. (Uvažujte také jiné permutace bodů ve čtveřici...)
- (2) Rozhodněte, která ze čtveřic bodů na obr. 9.18 je projektivním obrazem čtveřice stejně vzdálených bodů.



Obrázek 9.17: [Ku] Desarguesova věta a její trojrozměrná interpretace. . .



Obrázek 9.18: [St] Která čtveřice je projektivním obrazem čtveřice ekvidistantních bodů?

- (3) Sestrojte projektivní obraz čtvercového dláždění roviny.
- (4) Pro dva dané čtyřúhelníky rozhodněte, zda je jeden obrazem druhého vzhledem k nějaké osově kolineaci (zformulujte nějaké přirozené kritérium).
- (5) Pokud je odpověď v předchozí úloze záporná, pak:
- vyjádřete odpovídající projektivní transformaci jako složení osových kolineací,
 - sestrojte obraz libovolného dalšího bodu v rovině.
- (6) Předp., že čtyři dané body jsou obrazy sousedních vrcholů pravidelného n -úhelníku ($n = 5, 6, 8, 10, \dots$); sestrojte obrazy ostatních vrcholů.

10 Přehled, zobecnění a vyhlídky

10.1 Přehled a hierarchie

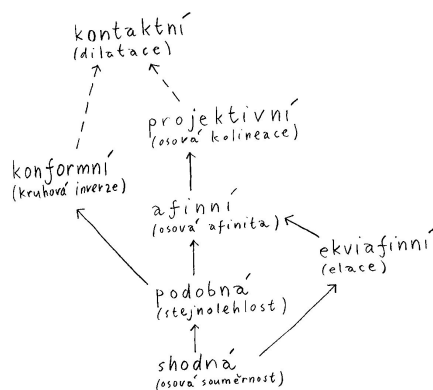
Všechna dosud diskutovaná zobrazení si na závěr zorganizujeme. V následující tabulce uvádíme, které vlastnosti se při tom či onom zobrazení zachovávají, přičemž podstatné invarianty jsou zvýrazněny symbolem \oplus . V následujícím přehledu samozřejmě nevystupuje dilatace; ten kdo už

zapomněl proč, nechť se znovu podívá do odst. 9.5.

| | vzdál. | kolin. | děl. pom. | dvojpom. | obs. | odch. |
|---------------|----------|----------|-----------|----------|----------|----------|
| shodná | \oplus | + | + | + | + | + |
| podobná | – | \oplus | + | + | – | \oplus |
| kruh. inverze | – | – | – | – | – | \oplus |
| elace | – | \oplus | \oplus | + | \oplus | – |
| afinní | – | \oplus | \oplus | + | – | – |
| projektivní | – | \oplus | – | \oplus | – | – |

Zobrazením, která zachovávají odchylky protínajících se křivek se říká *konformní*. Platí, že všechna konformní zobrazení lze vyčerpávat skládáním podobných zobrazení a kruhových inverzí. . .

Afinní zobrazení, jež zachovávají obsahy plošných útvarů, se jmenují *ekviafinní*. Platí, že všechna ekviafinní zobrazení lze vyčerpávat skládáním shodností a elací. . .



Obrázek 10.19: Hierarchie geometrických zobrazení (v závorce uveden typický představitel z každé třídy).

Jako jednoduché důsledky výše uvedených definicí a vztahů uvádíme:

Důsledky.

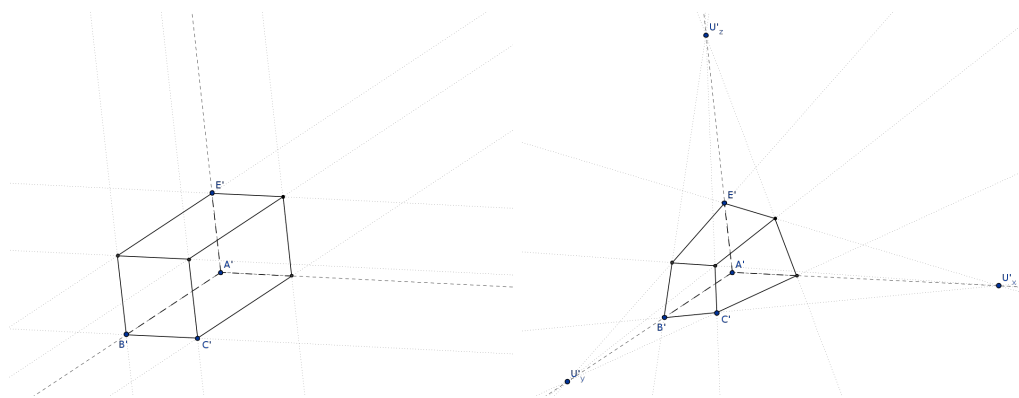
- (1) Projektivní zobrazení, které zobrazuje všechny vlastní body na vlastní (ekvivalentně, nevlastní body na nevlastní), je afinní.
- (2) Projektivní zobrazení, které je konformní, je podobné.
- (3) Podobné zobrazení, které je ekviafinní, je shodné.

10.2 Zobecnění

Téměř všechny výše uvedené definice dovolují bezprostřední zobecnění z roviny do trojrozměrného prostoru (a obecněji do prostorů vyšších dimenzí). Máme na mysli zejména definice shodných, podobných, afinních a projektivních zobrazení. U projektivních zobrazení potřebujeme rozšířit definici projektivního rozšíření také na prostor, což není žádný problém. . .

Hierarchie zobrazení na obr. 10.19 bude úplně stejná, ať už ji chápeme v dimenzi 2, 3 nebo jiné. Co se však jistě změní, je role základních zobrazení: základní shodnost v prostoru není osová souměrnost, ale souměrnost podle roviny; základní kolineace v prostoru není osová kolineace, ale kolineace s rovinou pevných bodů; základní konformní zobrazení v prostoru není kruhová inverze, ale sférická inverze; apod.

V následující kapitole budeme zevrubně studovat rovnoběžná, resp. středová promítání prostoru do roviny, což jsou také základní afinní, resp. projektivní zobrazení. Začneme s diskuzí nad možnými průměty krychle (či obecného rovnoběžnostěnu), viz obr. 10.20:



Obrázek 10.20: Afinní a projektivní průmět krychle...

Afinní průmět krychle je určen např. obrazy 4 vrcholů, které neleží v jedné stěně — k sestavení ostatních vrcholů stačí několik málo rovnoběžek. Projektivní průmět krychle je určen obrazy 4 vrcholů, které neleží v jedné rovině, a úběžníky tří čtveřic navzájem rovnoběžných hran — průměty rovnoběžných hran prochází těmito body a konstrukce ostatních vrcholů je pak analogická předchozímu případu.

Podobně jako ve cvičeních 9.9 a 9.11 bychom nyní měli být schopni sestavit obraz libovolného dalšího bodu v prostoru — stačí několik pomocných přímek a průsečíků s již sestavenými hranami a umění přenášení dělicího poměru, příp. dvojpoměru kolineárních bodů (viz též obr. 13.2 a okolní poznámky). Odtud vyvozujeme zobecnění základních tvrzení z odst. 9.8 a 9.10:

Věta. *Afinní zobrazení trojrozměrného prostoru (kamkoli) je jednoznačně určeno obrazem čtyř bodů v obecné poloze.*

Projektivní zobrazení trojrozměrného prostoru (kamkoli) je jednoznačně určeno obrazem čtyř bodů v obecné poloze a úběžníky tří přímek, které jsou těmito body určeny a které neleží v jedné rovině.

Uvědomte si, že způsobů určení toho či onoho zobrazení je jistě více (více se postupně naučíme v další kapitole). Pro příklad si stačí všimnout, že projektivní průmět krychle na obr. 10.20 je také zcela určen obrazy 4 vrcholů jedné stěny, obrazem jednoho dalšího vrcholu a jedním úběžníkem...

10.3 Další postřehy

Korespondence mezi rovinami ρ a σ na obr. 9.17 je normální středové promítání mezi rovinami, ale aby to bylo zajímavější, tak se tomu říká *perspektivní kolineace* nebo jen *perspektiva*. (V případě, že střed je nevlastní, mluvíme o *perspektivní afinitě*.) V tomto duchu můžeme osovou kolineaci v rovině chápat jako průmět prostorové perspektivní kolineace do roviny.

Tyto postřehy nám silně připomínají ještě jednu podobnou situaci: kružnice a elipsa na obr. 7.40 jsou v úplně stejném vztahu jako dva trojúhelníky na obr. 9.17. Planimetrická interpretace této korespondence je samozřejmě opět osová kolineace, což má užitečné konstrukční důsledky, viz 11.1.

Obecně platí následující:

Věta. *Projektivním obrazem kružnice je kuželosečka a každá kuželosečka je projektivním obrazem kružnice.*

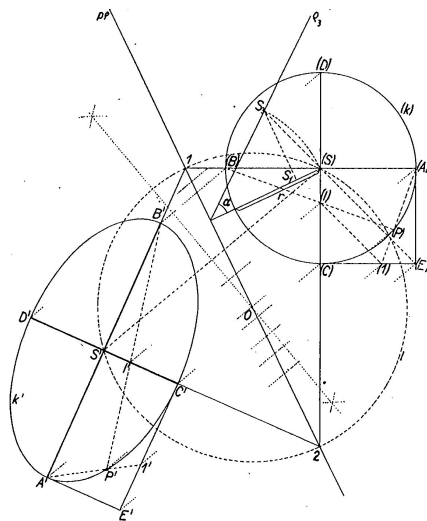
11 Typické úlohy

11.1 Úlohy s kuželosečkami

Pokud se stane, že kuželosečka je obrazem kružnice v nějaké osové kolineaci (afinitě), pak elementární konstrukce zmiňované v 7.4, mají docela zajímavé alternativy, které nyní probereme. Taková řešení často bývají hodně názorná a ještě se k nim budeme vracet v odstavci 19.2. Jedná se o následující základní úlohy, které formulujeme pro elipsu danou jako obraz kružnice v osové afinitě, nicméně lze je snadno zobecnit pro obecnou kuželosečku jakožto obraz kružnice v osové kolineaci:

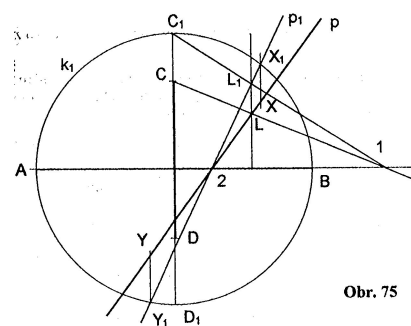
- (1) sestrojiti hlavní průměry elipsy,
- (2) sestrojiti tečny k elipse z daného bodu (v daném směru),
- (3) sestrojiti průnik přímky s elipsou.

Řešení (1) je na obr. 11.21.



Obrázek 11.21: [KV] Hlavní průměry elipsy pomocí osové afinity. . .

Úloha (2) je mezním případem úlohy (3), takže začneme s (3), viz obr. 11.22. Uvědomte si, že žádnou elementární alternativu k této konstrukci neznáme. . .



Obr. 75

Obrázek 11.22: [Ř] Průnik přímky s elipsou pomocí osové afinity.

V této kapitole zmiňujeme několik metod zobrazování trojrozměrného prostoru do roviny. Nejprve uděláme stručný přehled, poté se podíváme na vybrané případy podrobněji.

12 Úvod

Promítání rozlišujeme na

- *středová* (z vlastního středu),
- *rovnoběžná* (z nevlastního středu).

U rovnoběžného promítání dále podle polohy směru promítání k průmětně rozlišujeme na

- *kolmá*,
- *šikmá*.

Při jakémkoli promítání je za každým bodem v průmětně schována celá přímka v prostoru. Chceme-li tedy jednoznačně specifikovat skutečnou polohu bodu v prostoru, potřebujeme buď nějakou dodatečnou informaci nebo tzv. *sdrúžený průmět* na nějakou jinou průmětnu: na mapách se k průmětům význačných bodů přidávají kóty (viz 15), v technické praxi se poloha bodu v prostoru nejčastěji specifikuje jeho *nárysem* a *púdorysem* (tj. kolmými průměty na dvě navzájem kolmé průmětny, viz 14).

Středová, resp. rovnoběžná promítání jsou (základní) projektivní, resp. afinní zobrazení, o nichž už ledacos víme z předchozího textu. Věta 10.2 na str. 60 nám říká, jak může být každé takové promítání určeno; promítání zadaná tímto způsobem nazýváme *volná* (viz část 13).

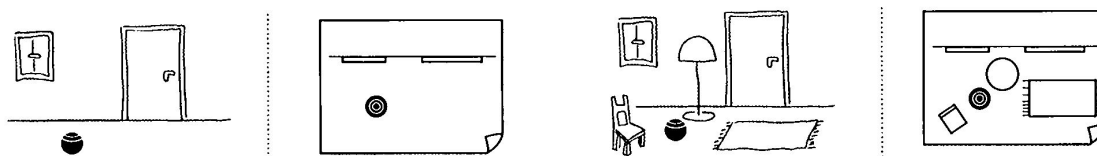
12.1 Základní úlohy

Velice typickým problémem, se kterým se budeme potýkat nejdříve, je sestrojení průmětu tělesa zadaného nárysem a púdorysem (příp. úloha opačná). Přibližné řešení takových úloh je vlastní

již malým dětem, viz obr. 12.1; my navíc umíme klíčové postřehy pojmenovat a dokonce i konstruktivně zrealizovat! Připomeňme, že základní dovedností, kterou musíme i nadále bezpečně ovládat, bylo

- (1) přenášení dvojpoměru, resp. dělicího poměru kolineárních bodů.

V dalším budeme některé postupy zefektivňovat a hlavně se naučíme měřit úsečky a úhly (které se promítáním zkreslují) ve skutečných velikostech.



Obrázek 12.1: [SMS] K danému průmětu pokoje načrtněte jeho půdorys.

Je-li dáno těleso svým nárysem a půdorysem a vzhledem k těmto průmětnám je zadána nějaká nová průmětna a střed/směr promítání, pak k sestrojení průmětu tělesa do této nové průmětny potřebujeme umět sestrojiti průnik několika promítacích paprsků s touto rovinou. (Zcela stejný úkol pozorujeme při sestrojování stínu vrženého daným tělesem do dané roviny při daném typu osvětlení.) Při těchto úlohách narážíme na problém, ve kterém se velice často chybuje — rozpoznat, zda dvě přímky dané svými průměty jsou ve skutečnosti rovnoběžné, různoběžné nebo mimoběžné. *Základní polohové úlohy*, které musíme bezpečně ovládat, tedy jsou:

- (2) rozpoznat vzájemnou polohu dvou přímek,
- (3) sestrojiti průnik přímky s rovinou.

Podobná úloha k (2) je např. určit vzájemnou polohu bodu a roviny. Speciálním případem úlohy (3) je konstrukce *stopníků*, tzn. průsečíků přímky s průmětnami. Související úlohy jsou: průnik dvou rovin (speciálně, konstrukce *stop*, tj. průsečnic roviny s průmětnami), řez tělesa rovinou, průsek dvou těles apod.

Při konstrukcích se dále neobejdeme bez umění měření vzdáleností, resp. nanášení dané vzdálenosti na danou přímku, a podobně s odchylkami přímek. Pokud měříme vzdálenost bodu od roviny, neobejdeme se bez pomocné kolmice (a její paty...). *Základní metrické úlohy*, které musíme bezpečně ovládat, tedy jsou:

- (4) určit vzdálenost dvou bodů,
- (5) určit odchylku dvou přímek,
- (6) sestrojiti kolmici.

Související úlohy jsou: určit vzdálenost bodu od přímky, určit vzdálenost dvou přímek, určit odchylku přímky od roviny, sestrojiti kolmou rovinu k dané přímce apod.

12.2 Výhled

Jednou motivačí k dalšímu studiu této kapitoly je touha (kterou cítíme minimálně od odst. 5.13) po názorném a správném zobrazování různých těles, zejména těch hezkých, viz část 19. Poté, co

si uvědomíme základní zákonitosti a osvojíme si některé základní konstrukce, zjistíme, že umíme zobrazit téměř cokoli, viz např. obr. na str. 124.

Většinu dílčích problémů, které při komplexnějších úlohách potkáváme, představujeme v části 14. V této části také diskutujeme několik obecně platných principů, které se týkají vzájemných poloh, vzdáleností, kolmostí a odchylek rovin/přímek/bodů. Ostatní části jsou veskrze informativní. . .

13 Volné promítání

Volné promítání rozlišujeme jak středové, tak rovnoběžné, přičemž přívlastek *volné* znamená, že průmětna a střed/směr promítání nejsou vzhledem k zobrazovanému objektu nijak specifikovány. Volný průmět nějakého tělesa tak bývá zadán průměty několika málo bodů. Protože středová promítání jsou projektivní zobrazení a rovnoběžná promítání jsou afinní, víme z odst. 10.2 kolik bodů vlastně potřebujeme, aby průmět byl určen jednoznačně. Promítáním prostoru do roviny však nikdy nevyčerpáme všechna možná projektivní/afinní zobrazení, proto průměty určujících bodů nemůžou být úplně libovolné. Následující věta upřesňuje, jak se věci mají v případě rovnoběžného promítání:

Věta (Pohlkeova–Schwarzova). *Rovnoběžným průmětem tří navzájem kolmých a stejně dlouhých úseček se společným krajním bodem může být jakákoli trojice úseček v rovině se společným krajním bodem, přičemž nejvýše jedna z těchto úseček nebo nejvýše jedna dvojice těchto úseček může mít nulovou délku, resp. odchylku.*

Za stejně dlouhými navzájem kolmými úsečkami si samozřejmě představujeme nějakou souřadnou soustavu. Každý bod v prostoru je jednoznačně určen svými souřadnicemi vzhledem k této soustavě, což se geometricky interpretuje pomocí rovnoběžek se souřadnými osami, viz obr. 13.2 (bod O značí počátek a X, Y, Z jednotky na souřadných osách). Protože nás nezajímá číselné vyjadřování těchto souřadnic, většinou je zadáváme pomocí kolmých průmětů to rovin určených osami x, y (púdorys) a x, z (nárys).¹

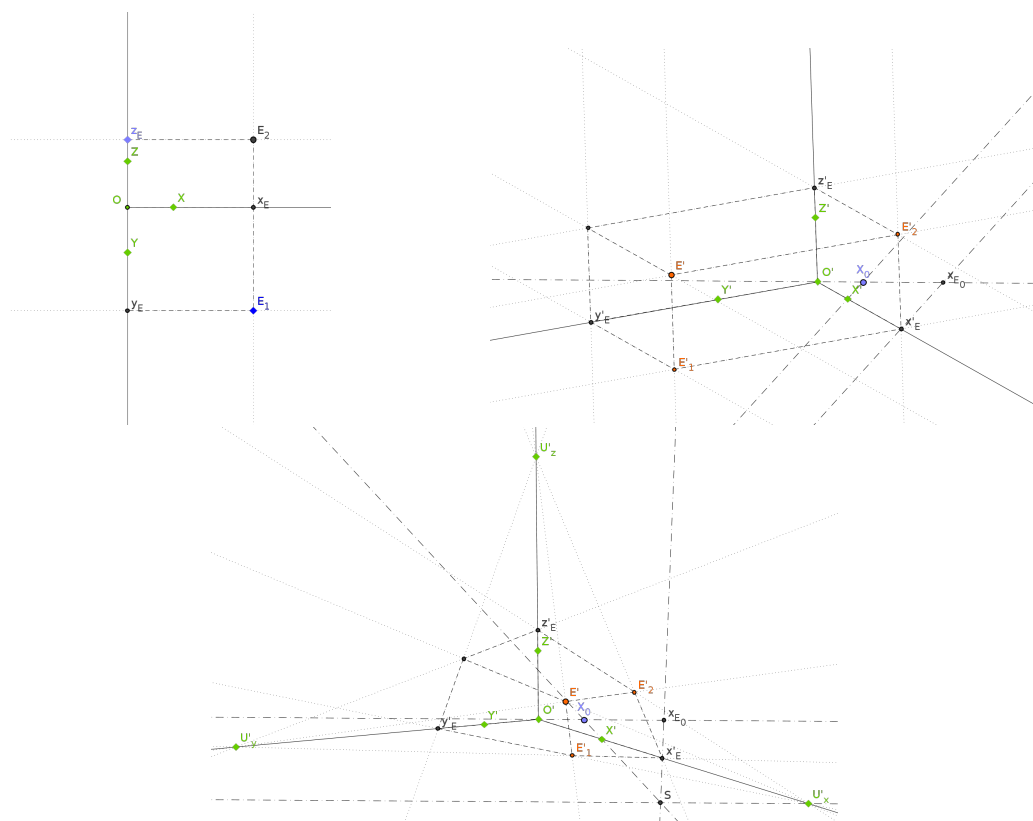
13.1 Zobrazení bodu

Z uvedeného je jasné, jak můžeme sestavit průmět libovolného bodu E v prostoru, viz obr. 13.2:

- Volné rovnoběžné promítání je určeno obrazy O', X', Y', Z' ; pomocné body na osách sestrojíme tak, aby byly zachovány dělicí poměry; k sestrojení průmětu E' stačí několik rovnoběžek se souřadnými osami.
- Volné středové promítání je určeno obrazy O', X', Y', Z' a úběžníky souřadných os; pomocné body na osách sestrojíme tak, aby byly zachovány dvojpoměry; k sestrojení průmětu E' stačí několik přímek procházejících úběžníky.

Naopak, je-li dán volný průmět bodu, umíme sestavit pomocné body na osách a přenesením dělicích poměrů, resp. dvojpoměrů jsme schopni určit sdružené průměty, tzn. souřadnice tohoto bodu. . .

¹Toto jsou tzv. Mongeovy sdružené průměty bodu; více k této zobrazovací metodě najdete v části 14.



Obrázek 13.2: Průměty bodu ve volném rovnoběžném a volném středovém promítání; čerchovanými čarami je naznačena konstrukce pomocného bodu na ose x ...

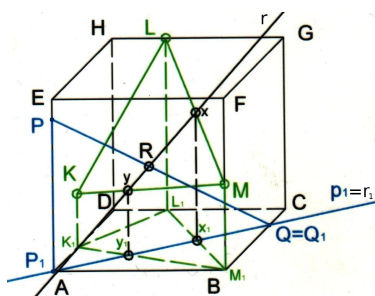
13.2 Průnik přímky a roviny

Na obr. 13.3 uvádíme možné řešení základní polohové úlohy — průnik přímky (p) s rovinou (ρ) — ve volném rovnoběžném promítání.² Tento průnik (R) vždy sestrojujeme jako průsečík dvou přímek. Abychom měli jistotu, že naznačené přímky se ve skutečnosti protínají, musí ležet v jedné rovině! Proto:

- (1) nejdřív zvolíme pomocnou (v podstatě libovolnou) rovinu obsahující danou přímku;
- (2) sestrojíme průsečnici r této roviny s rovinou ρ ;
- (3) hledaný bod je průsečíkem přímek p a r .

Všimněte si, že pomocné body při konstrukci průsečnice r jsou právě průniky několika přímek ležících v ρ s pomocnou rovinou. Abychom se neocitli v bludném kruhu, musí být pomocná rovina volena hodně speciálně...

²Tady předpokládáme, že přímka a rovina jsou různoběžné, ostatní případy diskutujeme v odst. 14.2.




Obrázek 13.3: [M. Ingrštová, 2010] Průnik přímky $p = PQ$ a roviny $\rho = KLM$ (bod K patří do stěny $ADHE$ v naznačeném tělese): (1) pomocnou rovinu obsahující p volíme ve směru hrany AE ; (2) průsečnice rovin r je určena pomocnými body x a y , které odvozujeme z jejich „púdorysů“ x_1 a y_1 ; (3) bod $R = p \cap r$ je právě hledaným průnikem $p \cap \rho$.

13.3 Cvičení

(1) V úloze na obrázku obr. 13.3:

- sestrojte průniky přímek KL , LM a KM s rovinou podstavy $ABCD$,
- sestrojte řez roviny KLM s krychlí,
- pojmenujte korespondenci mezi body na sestrojeném řezu a body na podstavním čtverci $ABCD$.

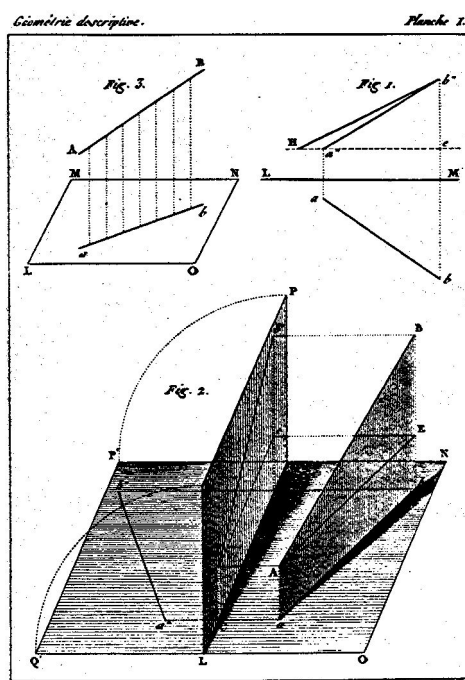
(2) Nyní si odmyslete krychli, modifikujte zadání a řešte podobné úlohy.

(3) V pravidelném pětibokém hranolu s podstavami $ABCDE$ a $FGHIJ$ jsou dány body K , L a M tak, že $(AFK) = -\frac{1}{3}$, $(BHL) = -2$ a $(JIM) = 2$. Sestrojte volný středový průmět tohoto hranolu a jeho řez rovinou KLM . 

14 Mongeovo promítání

Mongeovo promítání je kolmé (a tedy rovnoběžné) promítání na dvě navzájem kolmé průmětny. Průmětnům říkáme púdorys a nárys, proto se odpovídající průmětny jmenují púdorysná a nárysná.

V následujících odstavcích postupně představíme všechny základní úlohy zmiňované v odst. 12.1. Mongeovo promítání je k nezaplacení zejména při řešení metrických úloh. . .

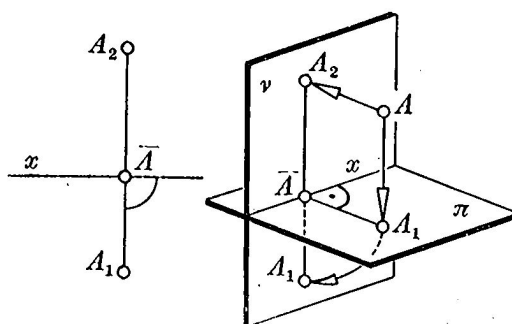


Obrázek 14.4: [Ka] Ukázka z prvního vydání Mongeovy Deskriptivní geometrie (1798).

14.1 Zobrazení bodu, přímky a roviny

Bod

Na obr. 14.5 je ukázáno, jak bodu v prostoru odpovídá jeho půdorys (značíme s indexem 1) a nárys (s indexem 2). Přímka x značí průsečnici průměten. Zejména by nám nemělo uniknout, že body A_1 a A_2 představují sdružené průměty nějakého bodu v prostoru, právě když přímka A_1A_2 je kolmá na x . Každý bod je svými sdruženými průměty určen naprosto jednoznačně.



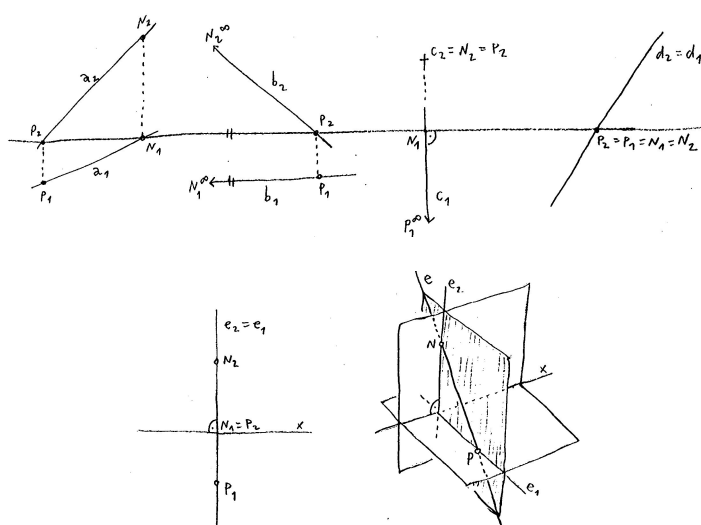
Obrázek 14.5: [Me] Mongeovy sdružené průměty bodu.

Přímka

Sdružené průměty přímky jsou zpravidla přímky, ale nemusí tomu tak být pokaždé — je-li přímka kolmá k některé průmětně, pak odpovídajícím průmětem je bod. Přímka je svými sdruženými průměty určena jednoznačně právě tehdy, když není kolmá k ose x , tzn. neleží v rovině, která je kolmá k oběma průmětnám současně. V každém případě je přímka určena jednoznačně sdruženými průměty dvou různých bodů, které na ní leží. . .

Pro lepší představu často používáme tzv. *stopníky*, což jsou průsečíky přímky s průmětnami. Pokud je přímka s některou průmětnou rovnoběžná, pak odpovídající stopník je nevlastní. . .

Různé polohy přímek s jejich stopníky jsou na obr. 14.6. Uvědomte si, že konstrukce stopníků je velmi speciálním případem základní polohové úlohy — průnik přímky s rovinou.

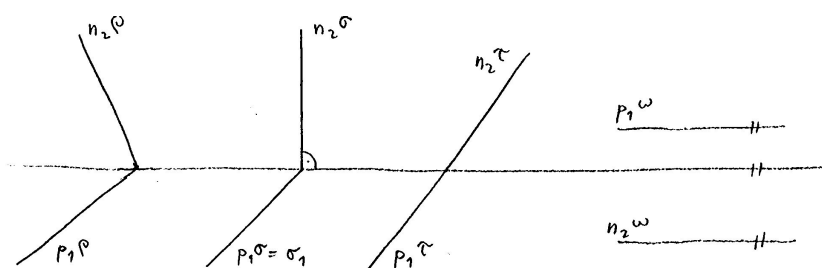


Obrázek 14.6: Sdružené průměty přímek a jejich stopníky; přímka e je jednoznačně určena teprve svými stopníky (nebo nějakým jiným dodatkem).

Rovina

Je-li rovina kolmá k některé průmětně, pak odpovídajícím průmětem této roviny je přímka; v opačném případě je jejím průmětem celá průmětna. Rovina je jednoznačně určena sdruženými průměty tří různých (a nekolineárních) bodů, které v ní leží.

Jiný a zpravidla názornější způsob určení roviny je pomocí tzv. *stop*, což jsou průsečnice s průmětnami. Nárys půdorysné stopy a půdorys nárysné stopy splývají s osou x , proto je na obrázcích nepopisujeme. Pokud rovina neobsahuje osu x , pak je svými stopami jednoznačně určena. V případě, že je rovina s některou průmětnou rovnoběžná, je odpovídající stopa nevlastní. . .

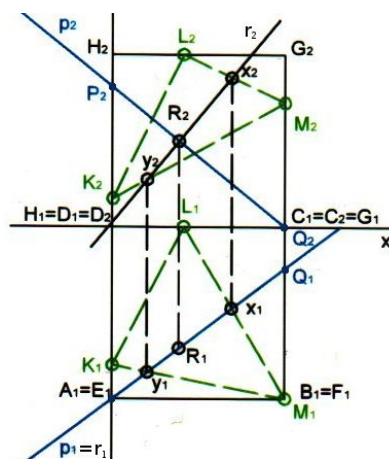


Obrázek 14.7: Rovina je (skoro vždy) určena svými stopami.

14.2 Polohové úlohy

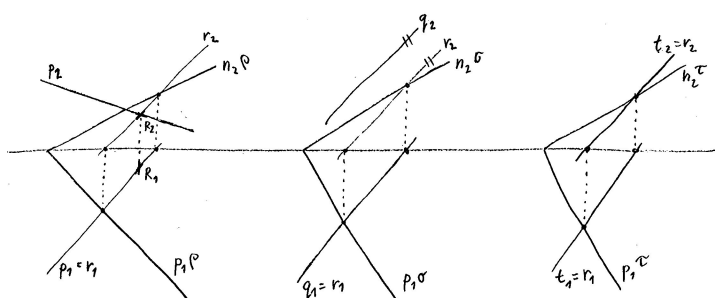
Průnik a vzájemná poloha přímky a roviny

Doslovné překreslení konstrukce průniku přímky a roviny z obr. 13.3 v Mongeově promítání je na obr. 14.8. Motivace a zdůvodnění je v odst. 13.2. Přímka r , jež leží v dané rovině a jejíž půdorys se kryje s půdorysem p , je tzv. *krycí přímka*...



Obrázek 14.8: [M. Ingrštová, 2010] Průnik přímky $p = PQ$ a roviny $\rho = KLM$: (1) r je krycí přímka pro směr kolmý k půdorysně ($r_1 = p_1$); (2) její nárys je určen body x, y ; (3) bod $R = p \cap r$ je právě hledaným průnikem $p \cap \rho$.

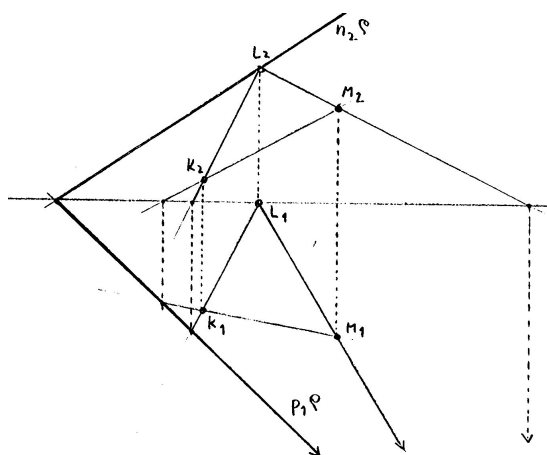
Pokud by se náhodu stalo, že výše sestavená přímka r se s p neprotíná, pak to znamená, že přímka p a rovina ρ jsou rovnoběžné. Pokud by se stalo, že r a p splývají, pak to znamená, že p leží celá v ρ . Takto jsme vyčerpali všechny možné vzájemné polohy přímky a roviny v prostoru. Všechny tyto možnosti v případě, že rovina je dána svými stopami, najdete na obr. 14.9.



Obrázek 14.9: Vzájemné polohy přímky a roviny: různoběžnost ($p \cap \rho = R$), rovnoběžnost ($q \parallel \sigma$), incidentnost ($t \subset \tau$).

Průnik a vzájemná poloha dvou rovin

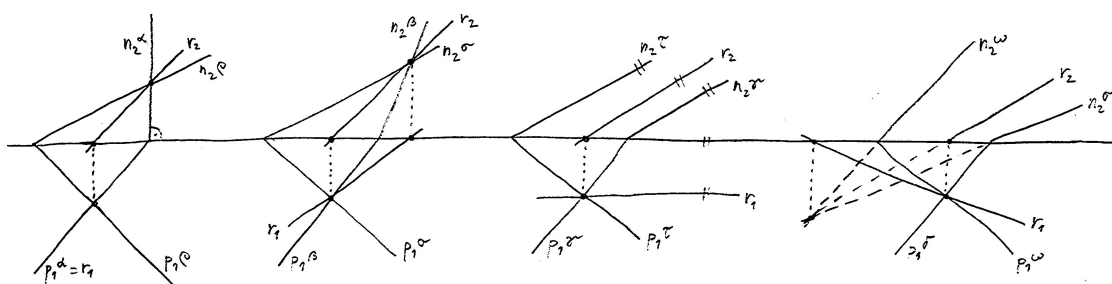
Speciálním případem průniku dvou rovin jsou stopy roviny, což jsou průsečnice s průmětnami. Konstrukce stop roviny dané třemi body je na obr. 14.10. Podobně by se postupovalo v případě, že rovina je dána dvěma přímkami, bodem a přímkou apod.



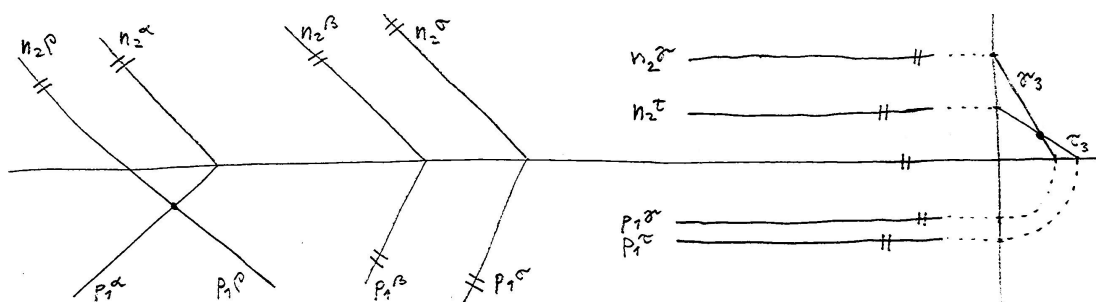
Obrázek 14.10: Stopy roviny $\rho = KLM$ jsou určeny stopníky několika přímek ležících v ρ .

Jsou-li dvě obecné roviny dány stopami, je konstrukce jejich průniku obzvlášť názorná, viz obr. 14.11. Obecně stačí sestrojít průnik nějaké přímky z jedné roviny s rovinou druhou a tuto konstrukci zopakovat aspoň dvakrát, viz cvičení 14.3(4)...

Generická poloha dvou rovin je různoběžnost. Pokud jsou roviny náhodou rovnoběžné, pak obě dvojice jejich stop musí být taky rovnoběžné. Pozor, opačné tvrzení obecně neplatí, viz obr. 14.12. Pro úplnost: roviny splývají, právě když obě dvojice jejich stop splývají.



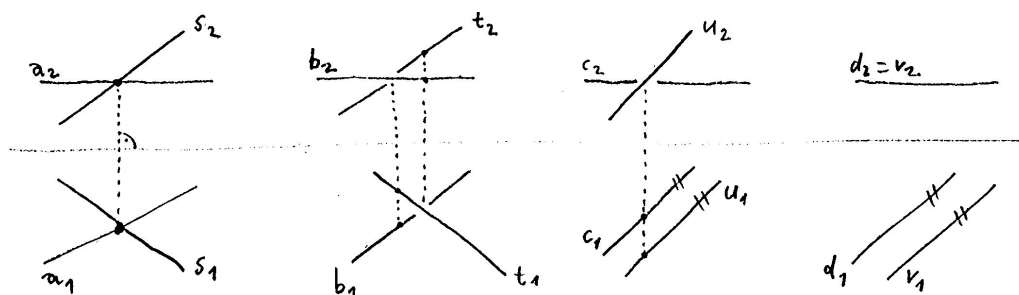
Obrázek 14.11: Průsečnice rovin zadaných stopami.



Obrázek 14.12: Vzájemné polohy dvou rovin: různoběžnost, rovnoběžnost a ještě jedna různoběžnost.

Vzájemná poloha dvou přímek

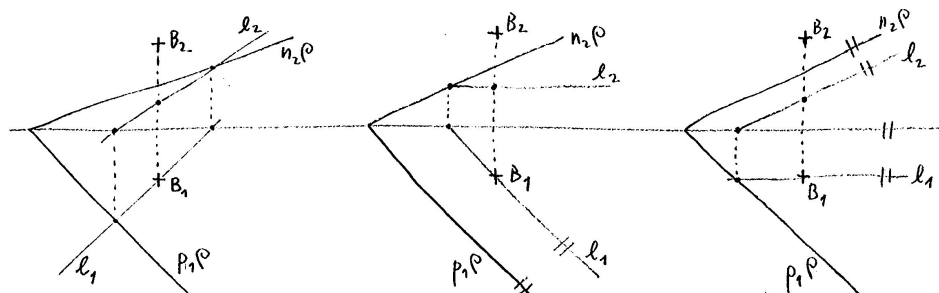
Všechny možné vzájemné polohy představujeme na obr. 14.13; v mimoběžném případě naznačíme viditelnost křížení v každém průmětu. Pro úplnost: přímky splývají, právě když obě dvojice jejich sdružených průmětů splývají.



Obrázek 14.13: Vzájemné polohy dvou přímek: různoběžnost, dvakrát mimoběžnost a rovnoběžnost.

Další postřehy

Předchozí diskuzi ještě doplníme poznámkou o vzájemné poloze bodu a přímky, resp. bodu a roviny. V obou případech rozlišujeme pouze dvě možnosti: bod na daném objektu buď leží nebo nikoli. Rozpoznat vzájemnou polohu bodu a přímky je samozřejmě triviální; v případě bodu a roviny si musíme pomoci právě nějakou (krycí) přímkou, viz obr. 14.14.



Obrázek 14.14: Vzájemná poloha bodu B a roviny ρ : l je libovolná přímka v ρ taková, že $l_1 \ni B_1$; sestrojíme nárys l_2 a uděláme závěr — $B \in \rho \iff B_2 \in l_2$.

Z uvedeného by mělo být zřejmé, jak by se řešila např. úloha sestrojít nárys bodu ležícího v dané rovině, je-li dán jeho půdorys apod.

Specifické přímky l na obr. 14.14 jsou tzv. *hlavní přímky* roviny ρ , což jsou přímky ležící v této rovině rovnoběžné s některou z průmětů. To v důsledku znamená, že hlavní přímky jsou rovnoběžné s některou ze stop roviny ρ . Přímky ležící v ρ , které jsou kolmé k některé ze stop, jsou tzv. *spádové přímky* roviny ρ .

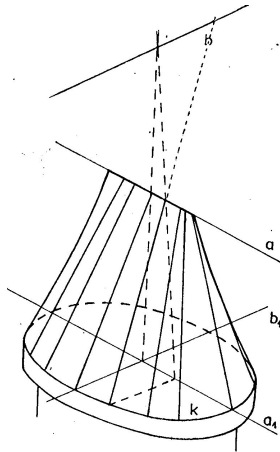
Příčky

Jiné typické polohové úlohy, na které bohužel nemáme moc času, jsou konstrukce *příček* mimoběžných přímek (příčka je přímka, která protíná dané mimoběžky). Každé dvě mimoběžky mají nekonečně hodně příček a tyto bývají jednoznačně vymezeny až nějakou dodatečnou podmínkou jako např. aby příčka procházela daným bodem, aby měla daný směr, aby byla nejkratší apod. Pomocí příček lze vytvářet zajímavé přímkové plochy, které se taky hojně objevují v technické praxi. Např. společné příčky tří navzájem mimoběžných přímek tvoří plochu tzv. eliptického hyperboloidu (chladič věže). Jiný příklad je na obr. 14.15.


Ačkoli toto téma podrobněji nediskutujeme, mělo by být jasné, že aspoň z teoretického hlediska je všechno jasné. Pro představu rozebereme případ konstrukce příčky k mimoběžkám a, b z nějakého bodu K : všechny přímky jdoucí bodem K a protínající přímku b tvoří rovinu, kterou si označíme třeba β ; hledaná příčka je právě taková přímka, která leží v této rovině a současně protíná přímku a . Proto stačí: (1) uvážit rovinu $\beta = K + b$; (2) sestrojít průnik $A = a \cap \beta$; (3) spojit body K a A ; (4) komu se to zdá málo, může ještě vyznačit průsečík s přímkou b .

14.3 Cvičení

- (1) Pro všechny výše uvedené sdružené průměty si utvořte konkrétní prostorovou představu o skutečné poloze zobrazených objektů vzhledem k průmětnám. Tuto představu pak volně načrtněte podobně jako na obr. 14.4 nebo obr. 14.6.



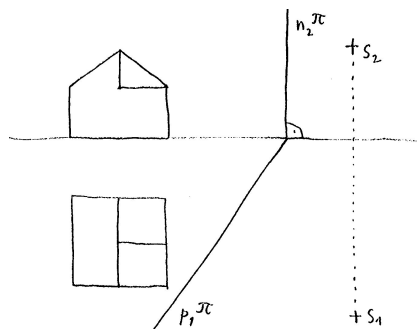
Obrázek 14.15: [Mach] Krov hradní věže ve Štramberku: krokve jsou příčky k mimoběžkám a a b z několika bodů na kruhové podezdívce k .

- (2) Rovina ρ je dána stopami a přímka e je dána sdruženými průměty svých stopníků. Dokažte, že umíte určit průnik $R = e \cap \rho$ ve všemožných speciálních případech jako např. $e \perp x$ nebo $\rho \perp x$.
- (3) Určete průsečnici dvou rovin určených stopami v případě, že průsečík některé dvojice stop není vůbec dostupný.
-  (4) Vzhledem k nějaké kartézské souřadné soustavě jsou dány body

$$A = [-4, 2, 2], \quad B = [0, 8, 10], \quad C = [6, 4, 4], \quad K = [-4, 6, 8], \quad L = [0, 10, 0], \quad M = [6, 0, 10].$$

Sestrojte sdružené průměty průseku trojúhelníků ABC a KLM .

- (5) Na obr. 14.16 jsou sdružené průměty nějakého tělesa, stopy roviny π a sdružené průměty bodu S . Utvořte si prostorovou představu o zobrazeném tělese, poté sestrojte středový průmět tohoto tělesa z bodu S do roviny π . (Při konstrukci nepřehlédněte užitečnost pomocných úběžníků.)



Obrázek 14.16: Sestrojte středový průmět daného objektu z daného středu do dané roviny.

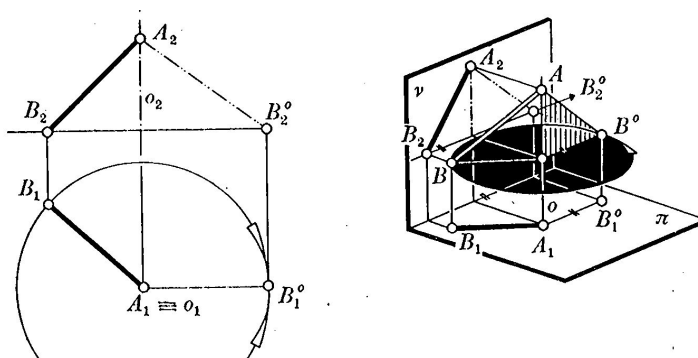
- (6) U předchozí úlohy nahraďte střed S nějakým směrem, uvažujte osvětlení v tomto směru a sestrojte stín, který vrhá dané těleso do půdorysny (příp. samo na sebe).

14.4 Metrické úlohy

Vzdálenost dvou bodů

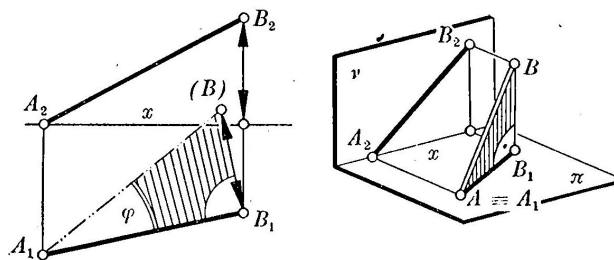
Pokud je přímka určená danými body rovnoběžná s některou průmětnou, pak v odpovídajícím průmětu vidíme vzdálenost bodů ve skutečné velikosti. Ve všech ostatních případech jsou vzdálenosti zkreslené (a protože promítáme kolmo, tak zkrácené).

Jedna z možných konstrukcí skutečné vzdálenosti dvou bodů je motivována právě zmíněným postřehem: pootočíme úsečku určenou těmito body do polohy rovnoběžné s některou průmětnou, viz obr. 14.17 (stejný nápad jsme použili již na obr. 7.41 k určení velikosti $|XH|$).



Obrázek 14.17: [Me] Nárysný průmět úsečky je ve skutečné velikosti právě tehdy, když je tato úsečka s nárysnou rovnoběžná — proto $|AB| = |A_2B_2^0|$.

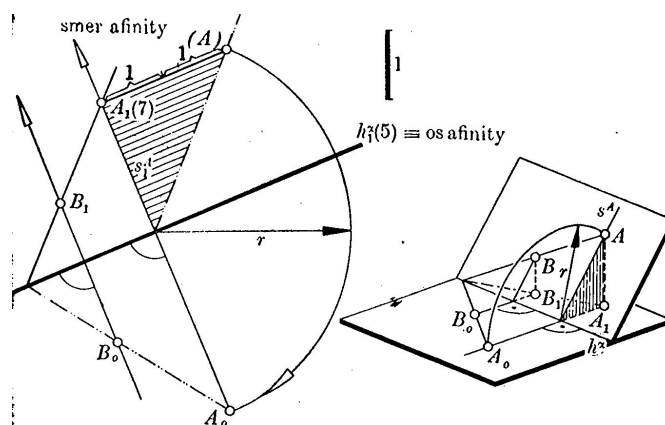
V předchozím vlastně otáčíme rovinu určenou body A, B a jejich půdorysy A_1, B_1 kolem přímky AA_1 . Jiná konstrukce skutečné velikosti úsečky AB je na obr. 14.18; v tomto případě otáčíme/sklápíme stejnou rovinu kolem přímky A_1B_1 do půdorysny. (Na tomto obrázku leží náhodou A v půdorysně; obecně je naznačená rovina π rovnoběžná s půdorysnou a uvedenou konstrukci můžeme interpretovat jako sklopení do roviny rovnoběžné s půdorysnou. . .)



Obrázek 14.18: [Me] Úsečka AB je přeponou v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami AB_1 a B_1B , jejichž velikosti vidíme nezkráceně v půdoryse, resp. náryse.

Otočení roviny

Rovina, kterou jsme otáčeli v předchozích dvou konstrukcích, byla kolmá k půdorysně, tedy poněkud specifická. Nyní se naučíme otáčet obecnou rovinu do průmětny (příp. do polohy rovnoběžné s průmětnou). Názorné zpracování je na obr. 14.19, kde je naznačeno otáčení roviny kolem hlavní přímky do roviny rovnoběžné s půdorysnou (nenechte se plést značením — místo sdruženého průmětu jsou použity kóty). Podstatné je, že korespondence mezi průměty bodů do této roviny a jejich otočenými obrazy, je stará známá a oblíbená **osová afinita**.



Obrázek 14.19: [Me] Otočení roviny kolem hlavní přímky do polohy rovnoběžné s půdorysnou: vzdálenost bodu A_0 od osy je rovna velikosti přepony v naznačeném pravoúhlém trojúhelníku.

Osovou afinitu mezi průměty bodů a jejich otočenými obrazy doceníme zejména, když řešíme úlohu, kde vystupuje více bodů, nebo když potřebujeme otočit rovinu zpátky do původní polohy. Konkrétní realizace jedné takové úlohy je na obr. 14.20.

Další typickou úlohou, kterou je možné řešit pomocí otáčení roviny do polohy rovnoběžné s průmětnou, je určování **odchytky** dvou (různoběžných) přímek...

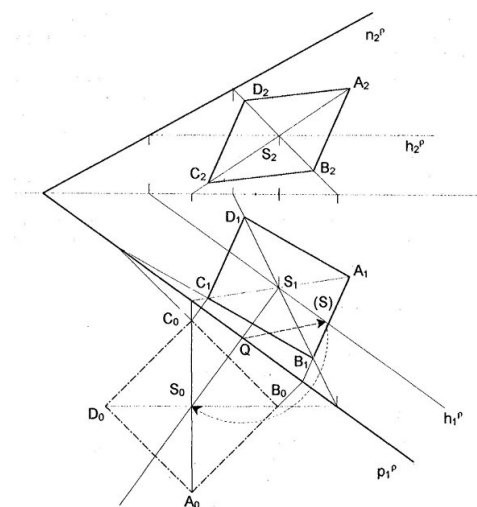
Kolmost

Před chvílí jsme si uvědomili, že odchytku dvou různoběžek vidíme v některém průmětu nezkresleně, pokud je rovina těmito přímkami určená rovnoběžná s odpovídající průmětnou. V případě, že přímky jsou kolmé, platí o něco obecnější a celkem užitečné tvrzení:

Věta. *Kolmým průmětem dvou kolmých přímek jsou kolmé přímky, pokud aspoň jedna z těchto přímek je rovnoběžná s průmětnou.*³

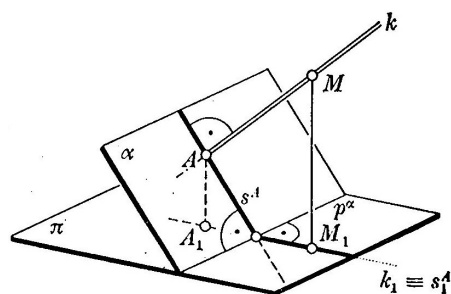
Abychom se mohli svobodněji vyjadřovat, označíme kolmice a, b a jejich kolmé průměty a_1, b_1 . Budeme předpokládat, že třeba a je rovnoběžná s průmětnou, což mj. znamená, že $a \parallel a_1$. Protože $a \perp b$ a promítáme kolmo, je přímka a kolmá k rovině určené b, b_1 . Protože $a \parallel a_1$, je také přímka a_1 kolmá k této rovině. To znamená, že a_1 je kolmá ke všem přímkám, které v této rovině leží, zejména tedy k b_1 . \square

³Ve skutečnosti to je ekvivalence, viz např. [Ř]...



Obrázek 14.20: [Ř] Konstrukce průmětů čtverce $ABCD$ ležícího v rovině ρ (rovinu je dána stopami, čtverec je určen půdorysem středu S a vrcholu A): (1) sestojíme nárys bodu S a otočíme S kolem půdorysné stopy do půdorysny (S_0); (2) pomocí osově afinity doplníme otočený bod A_0 ; (3) sestojíme skutečný čtverec ($A_0B_0C_0D_0$); (4) pomocí osově afinity otočíme zpátky ($A_1B_1C_1D_1$); (5) doplníme nárysný průmět.

Tento postřeh má velice užitečný důsledek pro konstrukci kolmice k rovině, resp. kolmé roviny k přímce: kolmý průmět kolmice k rovině je kolmý (k průmětu libovolné hlavní přímky, a tedy i) ke stopě! Jiné zdůvodnění téhož závěru (pomocí spádové přímky) je čitelné z obr. 14.21.



Obrázek 14.21: [Me] Kolmým průmětem kolmice k rovině je přímka kolmá k její stopě.

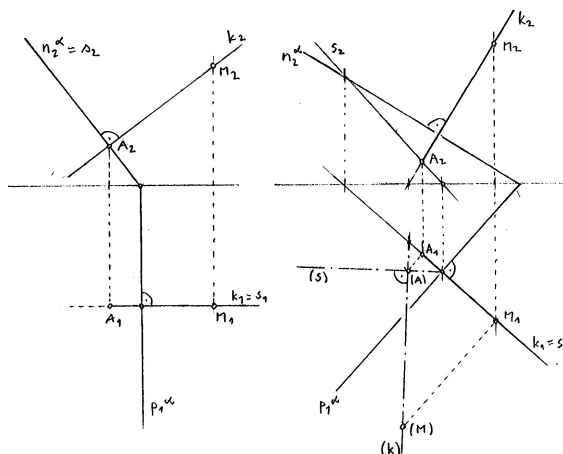
Vzdálenosti a odchylky obecně

Každý obecnější případ určování vzdálenosti, resp. odchylky lze vždy nějak konstrukčně redukovat na určení vzdálenosti dvou bodů, resp. odchylky dvou přímek. Tato redukce je navíc vždycky přirozená a odvíjí se od definice/charakterizace pojmu vzdálenosti, resp. odchylky.

Vzdálenost bodu od přímky nebo od roviny je určena vzdáleností tohoto bodu od paty kolmice. Vzdálenost dvou přímek je nenulová, pouze když se přímky neprotínají, tedy když jsou rovnoběžné nebo mimoběžné. V prvním případě stačí spustit kolmici z libovolného bodu, druhý

případ je poněkud subtilnější — hledáme nejkratší příčku, což je právě příčka kolmá. Vzdálenost přímky od roviny, resp. vzdálenost dvou rovin je nenulová, pouze když jsou tyto rovnoběžné. . .

Z uvedených příkladů bychom si zejména měli všimnout, že dvojice bodů, jejichž vzdálenost nakonec měříme, je vždy nějak charakterizována pomocí pojmu **kolmosti**. Jak kolmost, tak vzdálenost dvou bodů jsme se naučili konstrukčně zrealizovat, takže teoreticky umíme určit vzdálenosti kdečeho od ledasčeho. Praktické uplatnění uvedených postřehů lze vyzkoušet ve cvičení 14.5.



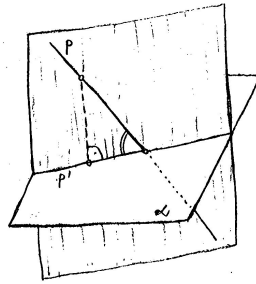
Obrázek 14.22: Vzdálenost bodu M od roviny α je rovna vzdálenosti tohoto bodu od paty kolmice A : vlevo je rovina α kolmá k nárysně, proto $v(M, \alpha) = |M_2A_2|$; vpravo je obecný případ — vzdálenost měříme po sklopení: $v(M, \alpha) = |(M)(A)|$.

Podobné to je s odchylkami; nejdřív však trochu rozšíříme pojem odchylky dvou přímek. Běžně totiž myslíme (a výše jsme se naučili měřit) odchylku dvou různoběžných přímek, nicméně i v ostatních případech má pojem odchylky dobrý význam:

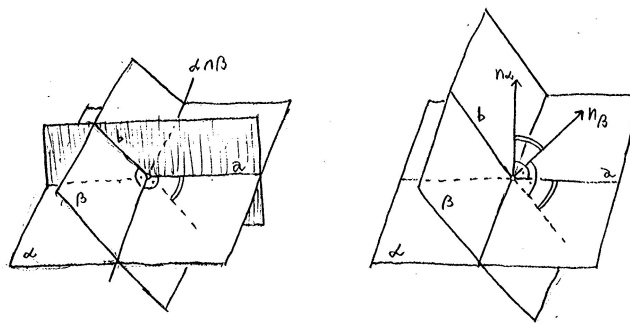
- odchylka splývajících nebo rovnoběžných přímek je nulová;
- odchylku mimoběžných přímek definujeme jako odchylku libovolných dvou různoběžek, z nichž jedna je rovnoběžná s první mimoběžkou a druhá s druhou.

Nyní odchylka přímky od roviny je rovna odchylce dané přímky od jejího kolmého průmětu do dané roviny. Pokud je přímka s rovinou rovnoběžná nebo je v ní obsažená, pak podle předchozí rozšířené definice dostaneme 0. Pokud je přímka k rovině kolmá, takže se promítá do bodu, pak samozřejmě nemůžeme nic měřit a jednoduše řekneme, že odchylka je 90° .

Odchylka dvou rovin je rovna odchylce průsečnic těchto rovin s libovolnou rovinou, která je k oběma kolmá. V případě, že jsou roviny rovnoběžné nebo splývající, dostaneme 0; v případě různoběžných rovin je pomocná rovina právě rovina kolmá k jejich společné přímce. Uvědomte si, že také tento nápad umíme konstrukčně zrealizovat, ačkoli to představuje celkem hodně práce. Technicky jednodušší je rovnou určit odchylku normál: odchylka dvou přímek v rovině je totiž stejná jako odchylka jakýchkoli k nim kolmých přímek (v téže rovině). Odchylku dvou rovin tedy můžeme určit také tak, že (1) nejdřív sestrojíme libovolné k nim kolmé přímky a (2) rovnou určíme odchylku těchto kolmic. . .




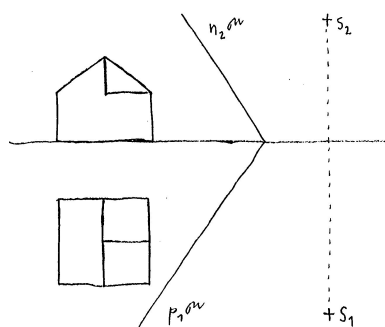
Obrázek 14.23: Odchylka přímky p od roviny α je rovna odchylce přímek p a p' (= průsečnice α s rovinou k ní kolmou a obsahující p).



Obrázek 14.24: Odchylka rovin α, β je rovna odchylce přímek a, b (= průsečnice α, β s rovinou kolmou ke společné přímce $\alpha \cap \beta$), což je totéž jako odchylka normálových přímek n_α, n_β .

14.5 Cvičení

- (1) Sestrojte stopy roviny, která je kolmá k dané přímce a prochází daným bodem.
- (2) Určete vzdálenost daného bodu od dané přímky.
- (3) Určete odchylku dvou rovin daných stopami.
- (4) Pro zadání ze cvičení 14.3(4) sestrojte trojúhelníky ABC a KLM včetně jejich společné úsečky ve skutečných velikostech. 
- (5) Na obr. 14.25 jsou sdružené průměty nějakého tělesa, stopy roviny μ a sdružené průměty bodu S . Utvořte si prostorovou představu o zobrazeném tělese, poté sestrojte středový průmět tohoto tělesa z bodu S do roviny μ . (Při konstrukci nepřehlédněte užitečnost pomocných úběžníků.)



Obrázek 14.25: Sestrojte středový průmět daného objektu z daného středu do dané roviny.

- (6) U předchozí úlohy nahraďte střed S nějakým směrem a sestrojte rovnoběžný průmět do roviny μ .

15 Kótované promítání

Kótované promítání je kolmé promítání na jednu průmětnu s tím, že vzdálenost (některých) bodů od průmětny je naznačena jako jejich kóta. Kóty tedy nahrazují sdružené průměty u Mongeova promítání. . .

Bod v prostoru je určen svým průmětem a kótou. Přímka je určena kótovanými průměty dvou bodů, příp. stopníkem a jedním dalším kótovaným bodem. Rovina je určena kótovanými průměty tří bodů, příp. stopou a jedním dalším kótovaným bodem. . .

Obrázek 15.26: Zobrazení bodu, přímky a roviny, konstrukce stopníků a stop. . .

Metody řešení základních úloh v kótovaném promítání a v Mongeově promítání si jsou v mnohém podobné, takže zmíníme jenom několik příkladů na ukázkou. V každém případě si vždy můžeme zvolit pomocnou (kolmou) průmětnu, podle kót sestavit druhé průměty vybraných bodů a řešit úlohu, jak jsme zvyklí. Ne vždy je však takový postup nutný a často lze postupovat přímo, viz např. obr. 15.26. Typická konstrukce, která vypadá stejně v kótovaném i Mongeově promítání, je na obr. 14.19 a obr. 14.20. Dvojitě řešení jedné polohové úlohy je na obr. 15.27.

Obrázek 15.27: Průnik rovin $r = \alpha \cap \rho$ sestavený pomocí (a) hlavních přímek, (b) pomocného průmětu.

16 Axonometrie a kosoúhlé promítání

Uvažme nějakou kartézskou souřadnou soustavu v prostoru s počátkem O a osami x, y, z . Bod v prostoru je jednoznačně určen souřadnicemi vzhledem ke zvolené souřadné soustavě a naopak. Bod a jeho souřadnice geometricky (tj. bez číselného vyjadřování) zadáváme pomocí Mongeových

sdužených průmětů do rovin x, y (půdorys) a x, z (nárys). Pokud zvolíme nějakou další rovinu, která je v obecné poloze vzhledem k souřadným osám, pak rovnoběžné promítání do takové roviny je tzv. *axonometrie*, a tu podle směru promítání rozlišujeme na kolmou a šikmou.

Axonometrie je tedy obyčejné rovnoběžné promítání na jednu průmětnu, nicméně z úvodu (a názvu) se dá odtušit, že při této zobrazovací metodě se budeme soustředit na otázku měření, zejména podél os (*axones*). Vzpomeňte, že problém měření ve volném rovnoběžném promítání, jak jsme je představili v části 13, je teoreticky celkem jasný, ale prakticky poněkud otravný (opakované přenášení dělicích poměrů). Základním axonometrickým úkolem je najít nějakou rychlou a technicky pohodlnou korespondenci mezi Mongeovy sduženými průměty bodu a jeho axonometrickým průmětem...

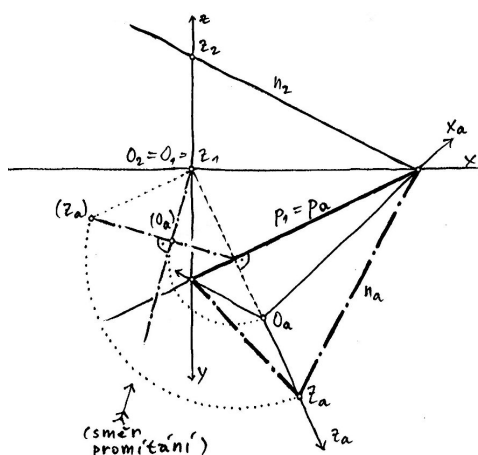
Mezním případem (šikmé) axonometrie je tzv. *kosoúhlé promítání*, kdy promítáme šikmo do roviny x, z (Mongeova náryсна)...

16.1 Kolmá axonometrie

Kolmá axonometrie je úplně určena rovinou axonometrické průmětny. Vzhledem k pomocným Mongeovým průmětnám tuto průmětnu zadáváme stopami nebo pomocí průsečíků se souřadnými osami. Trojúhelník určený těmito průsečíky je tzv. *axonometrický trojúhelník*. Kolmá axonometrie bývá zpravidla zadána právě axonometrickým trojúhelníkem.

Axonometrický trojúhelník

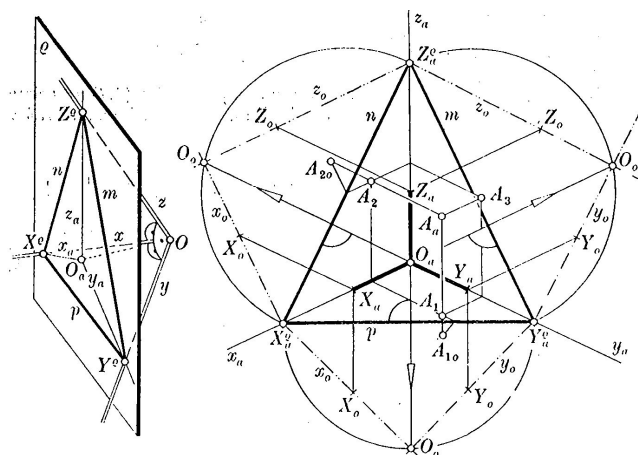
Na obr. 16.28 je představeno, jak můžeme sestrojít axonometrický trojúhelník a průměty souřadných os, a to výhradně s dovednostmi, které jsme se naučili v části 14. Podobně by se dal sestrojít průmět jakéhokoli bodu v prostoru, viz cvičení 14.5(6). Protože hledáme nějakou příjemnější cestu, všimneme si co nejvíce užitečných věcí: Průmět libovolného bodu lze sestrojít tak, že se nejdříve kolmo promítne do axonometrické průmětny (průnik přímky s rovinou) a poté se tento průmět otočí např. kolem půdorysné stopy tak, aby byl výsledek vidět nezkráceně. Zůžeme-li se pouze na body v Mongeově půdorysně, dostáváme korespondenci, která je zřejmě afinním zobrazením (složením dvou afinních zobrazení) a má stopu p jako přímkou pevných bodů. To je samozřejmě naše oblíbená **osová afinita**, jejíž osou je stopa p , směr je kolmý na p a obraz libovolného bodu je dán obrazem počátku O . Podobný vztah samozřejmě platí také mezi Mongeovým a axonometrickým nárysem, příp. bokorysem.



Obrázek 16.28: Kolmá axonometrie je dána stopami axonometrické průmětny; sestojen axonometrický trojúhelník a průměty osového kříže. . .

Zářezová metoda

V případě, že je kolmá axonometrie zadána axonometrickým trojúhelníkem, pak z předchozího víme, že průmětem počátku je právě průsečík výšek tohoto trojúhelníku.⁴ Vztah mezi Mongeovým a axonometrickým půdorysem, resp. nárysem je výše popsána osová afinita, jejíž osu a směr známe. K jejímu přesnému vymezení stačí sestojit bod odpovídající počátku (na pomocné Thaletově kružnici), viz obr. 16.29.



Obrázek 16.29: [Me] Kolmá axonometrie je dána axonometrickým trojúhelníkem; sestojen osový kříž, jednotky na osách a průmět bodu A . . .

Na tomto obrázku si nyní můžeme všimnout, že body A_{1o} , A_1 , A_a leží na jedné přímce, která je kolmá na p (tj. ve směru z_a); bod A_{1o} je Mongeův půdorys, A_1 je axonometrický půdorys a A_a

⁴Umíme zdůvodnit i přímo s odkazem na větu na str. 76: promítáme kolmo a osa z je kolmá k rovině x, y , tedy i k přímce p . . .

je axonometrický průmět bodu A . Podobně je to s trojicí $A_{2o}, A_2, A_a \dots$. Odtud plyne slibovaná bleskurychlá konstrukce axonometrického průmětu libovolného bodu A :

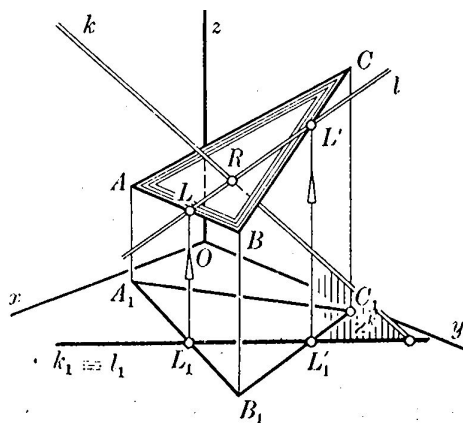
- (1) umístíme Mongeův půdorys, resp. nárys bodu A vzhledem k otočeným osám x_o, y_o , resp. x_o, z_o ,
- (2) vedeme kolmice z těchto bodů k odpovídajícím stopám axonometrického trojúhelníku (tj. ve směru axonometrických průmětů příslušných os),
- (3) axonometrický průmět bodu A je průsečíkem těchto kolmic.

Uvědomte si, že při této konstrukci je celkem jedno, na kterou stranu otáčíme pomocné průmětny. Stejně tak si můžeme pomocné Mongeovy průměty posunout v uvedeném směru libovolně daleko, aby se nám nepřekrývaly pomocné a výsledné čáry. Tomuto způsobu konstrukce axonometrického průmětu se říká *zářezová metoda*; typické užití pro konkrétní strojní součástku najdete v příloze na str. 123.

Poznámky

Dosud jsme diskutovali několik možností konstrukce axonometrického průmětu bodu daného Mongeovými sdruženými průměty, resp. souřadnicemi. Uvědomte si, že tento proces je vždy čitelný v obou směrech: poloha každého bodu v prostoru je dána jeho axonometrickým průmětem spolu s jeho axonometrickým půdorysem; odtud lze vždy doplnit axonometrický nárys, příp. bokorys bodu; pomocí výše popsané korespondence (osová afinita, viz obr. 16.29) umíme sestavit Mongeův půdorys, nárys, příp. bokorys tohoto bodu, tj. jeho souřadnice.

Hlavní výhodou řešení úloh v kolmé axonometrii je, že pracujeme s hodně názornými obrázky (aspoň pro malá měřítka) a současně jsme schopni velice hospodárně realizovat celkem jakékoli měření. Všechny základní úlohy, které jsme zmiňovali v části 14, je nyní možné převyprávět v této zobrazovací metodě. My jsme si slibovali, že to dělat nebudeme, ale na ukázkou uvádíme aspoň základní polohovou úlohu, viz obr. 16.30; až na značení a vzájemnou polohu zadávajících objektů se jedná právě o úlohu řešenou na obr. 14.8, resp. obr. 13.3...



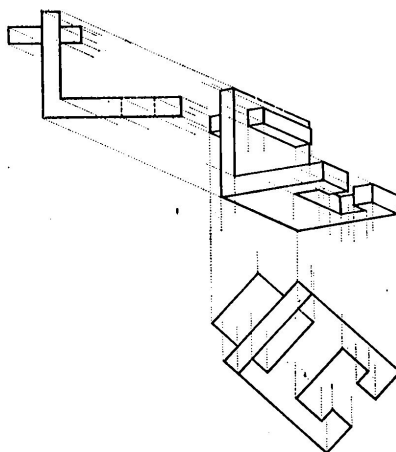
Obrázek 16.30: [Me] Průnik přímky k a roviny $\rho = ABC$: (1) l je krycí přímka pro směr kolmý k půdorysně ($l_1 = k_1$); (2) její axonometrický průmět je určen body L, L' ; (3) bod $R = k \cap l$ je právě hledaným průnikem $k \cap \rho$.

16.2 Šikmá axonometrie

Rozdíl mezi kolmou a šikmou axonometrií je jenom ve směru promítání vzhledem k axonometrické průmětně. Nebudeme tedy opakovat všechno, co jsme říkali v předchozích odstavcích, uvedeme jenom několik poznámek.

Šikmá axonometrie je zcela určena axonometrickým trojúhelníkem a obrazem počátku. Korepondence mezi axonometrickým půdorysem a otočeným (Mongeovým) půdorysem je opět osová afinita, jejíž osou je půdorysná stopa p , akorát směr této afinity není nutně kolmý k p . Podobně je to s nárysy a bokorysy. Odtud lze rovněž odvodit *zářezovou metodu* konstrukce axonometrického průmětu z Mongeových (vhodně umístěných) sdružených průmětů. . .

Pro rychlé a názorné zobrazení nějakého objektu daného svými sdruženými průměty se užívá právě tohoto postupu s tím, že Mongeovy průměty umísťujeme do nákrсны úplně libovolně podle vlastního uvážení. V tomto případě nejsou průmětna ani směr promítání předem specifikovány, jedná se tedy o jakési volné rovnoběžné promítání, ovšem zadané poněkud neobvyklým způsobem. Příklad takové konstrukce je na obr. 16.31.



Obrázek 16.31: [Me] Volný rovnoběžný průmět nějaké součástky pomocí zářezové metody. . .

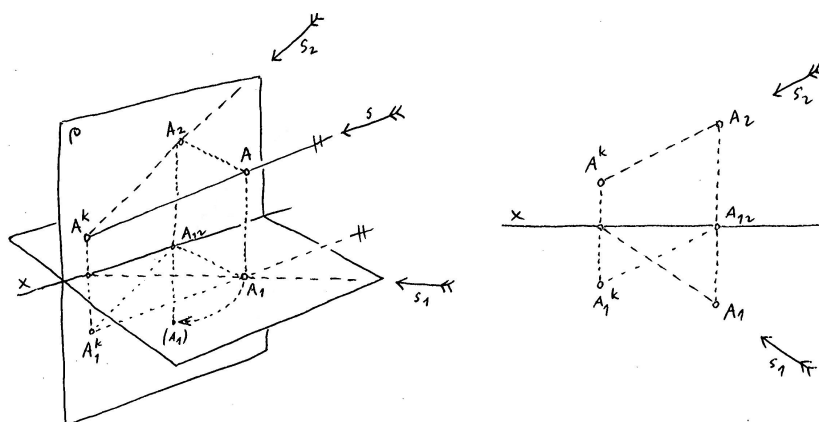
Z uvedeného je patrné, že tato metoda je vhodná zejména pro zobrazování hranatých těles; o zobrazování oblých těles se zmíníme záhy, viz odst. 19.2.

16.3 Kosoúhlé promítání

Speciálním, resp. mezním případem šikmé axonometrie je tzv. *kosoúhlé promítání*, kdy hlavní průmětna splývá s Mongeovou nárysnou. To znamená, že osy x a z v průmětu osového kříže svírají pravý úhel. Kosoúhlé promítání je zcela určeno směrem promítání, který však tentokrát (na rozdíl od obecné axonometrie) není zadán obrazem počátku, protože ten leží přímo v průmětně.

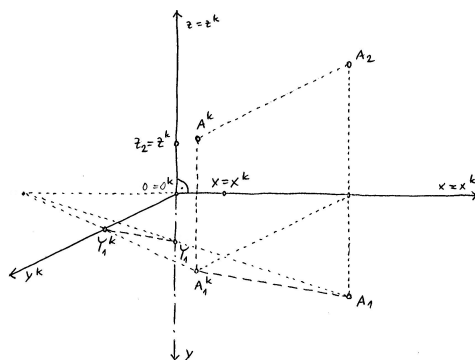
Na obr. 16.32 je naznačena konstrukce kosoúhlého průmětu obecného bodu v prostoru pro zadaný směr promítání. Průmětem je právě nárysný stopník přímky určené tímto bodem a směrem promítání, což je něco, co bezpečně umíme z dřívějšíka. Stejně jako v případě obecné axonometrie si všimneme několika užitečností: Zúžíme-li naše promítání pouze na body v půdorysně, pozorujeme opět afinitu, jež má osu x jako přímku pevných bodů. Korepondence mezi Mongeovým a kosoúhlým půdorysem je tedy **osová afinita**, jež je zcela určena osou x a libovolnou dvojicí

odpovídajících si bodů (A_1 a A_1^k). Podobný vztah platí také mezi Mongeovým a kosoúhlým bokorysem; vztah mezi Mongeovým a kosoúhlým nárysem je samozřejmě identita.



Obrázek 16.32: Kosoúhlé promítání je dáno směrem s ; sestrojen kosoúhlý průmět a kosoúhlý půdorys bodu A jakožto stopníky promítacích paprsků. . .


Na obr. 16.33 je zobrazen průmět osového kříže s jednotkami na osách, což jednoznačně určuje nějaké rovnoběžné promítání. Protože průměty os x a z jsou kolmé a jednotky na těchto osách jsou stejné, je tímto způsobem zadáno právě kosoúhlé promítání. Kosoúhlý půdorys bodu A je sestrojen pomocí výše popsané osově afinity, kosoúhlý průmět je doplněn z nárysu. . .



Obrázek 16.33: Kosoúhlé promítání je dáno obrazem bodu Y na ose y ; sestrojen kosoúhlý průmět bodu A pomocí osově afinity mezi Mongeovými a kosoúhlými půdorysy. . .

Komplexnější úlohy řešené v kosoúhlém promítání najdete ve cvičeních nebo v části 19. . .

16.4 Cvičení

- (1) Pro zadání ze cvičení 14.3(4) sestrojte axonometrický a kosoúhlý průmět průseku trojúhelníků ABC a KLM . 
- (2) Pro zadání jako na obrázku obr. 14.8 sestrojte axonometrický a kosoúhlý průmět (a) stop roviny $\rho = KLM$, (b) přímky $p = PQ$ a krycí přímky r , (c) průsečíku $R = p \cap \rho$.

- (3) Pro zadání ze cvičení 14.5(6) určete axonometrický trojúhelník a sestrojte průmět daného tělesa pomocí zářezové metody.

17 Perspektiva

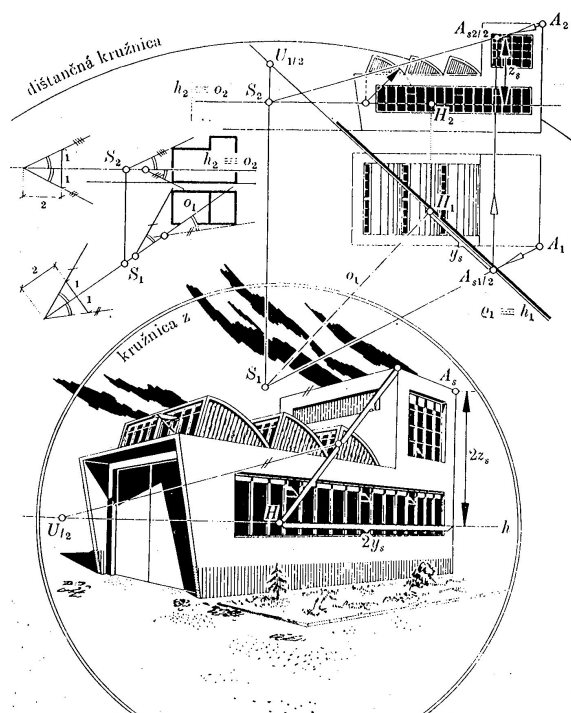
Perspektivou (bez přívlasků) myslíme obyčejné středové promítání na jednu průmětnu, což je způsob zobrazování, které je vlastní např. obyčejnému fotoaparátu. Z předchozího víme, že při obecném středovém promítání se vlastní body mohou zobrazovat do nevlastních a naopak, což má za následek, že některé objekty se docela krutě deformují; např. středovým průmětem kružnice může být klidně hyperbola (což při rovnoběžném promítání samozřejmě není možné). Pokud chceme zobrazovat realitu co nejlépe našemu vnímání, uvažují se jistá omezení: předpokládá se dostatečná vzdálenost středu promítání od průmětny a zobrazují se jenom objekty uvnitř zorného kužele, jehož vrcholový úhel je zhruba 40–50°. V takovém případě se mluví o *lineární perspektivě*...

Přívlaskem lineární se často jenom zdůrazňuje, že se promítá do roviny a ne třeba na válcovou plochu. Lineární perspektiva je tedy specifické **projektivní** zobrazení prostoru do roviny; něco málo si dořekneme v dalším odstavci. Nelineárním perspektivám věnujeme pár poznámek v odst. 17.3.

17.1 Lineární perspektiva

Lineární perspektiva může být zadána *volně*, tj. průmětem dostatečně hodně bodů/úběžníků. V odst. 13.1 jsme diskutovali, jak v takovém případě sestrojít obraz libovolného dalšího bodu v prostoru. Konstruktivně to znamenalo hlavně opakované (a nezajímavé) přenášení dvojpoměrů. Perspektiva může být taky dána *vázaně*, tj. explicitní polohou průmětny a středu promítání vzhledem k souřadným osám, resp. Mongeovým pomocným průmětnám. V takovém případě víme, jak postupovat ze cvičení 14.3(5) a 14.5(5). Konstruktivně to znamená opakované sestrojování průniků promítacích paprsků s rovinou průmětny, příp. ještě dodatečné otočení průmětny tak, aby byl výsledek vidět nezkresleně.

Stejně jako pro jakoukoli jinou zobrazovací metodu je i v případě perspektivy vyvinuto několik postupů, které mají zjednodušovat práci. Při těchto postupech se velice často užívá osové kolineace, což by nemělo nikoho překvapovat (mezním případem osové kolineace je osová afinita, a tu jsme několikrát zaznamenali v předchozím povídání o axonometrii a kosoúhlém promítání). Zájemce o podrobnosti odkazujeme na [KKK, Me, U] a další klasickou literaturu. . .



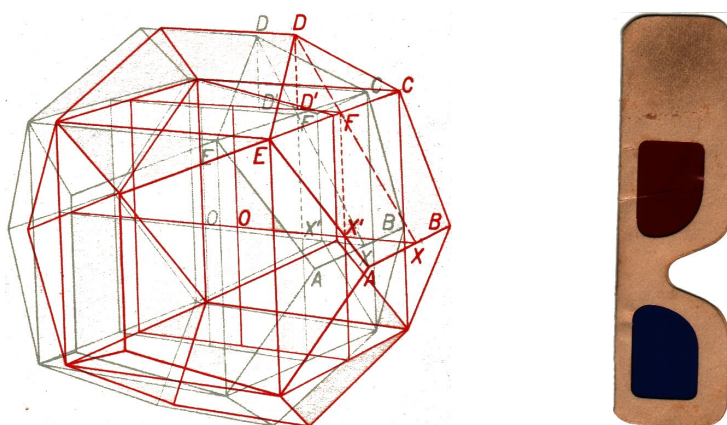
Obrázek 17.34: [Me] Perspektivní průmět nějaké budovy...

Na obr. 17.34 je průmět nějaké haly ve vázané perspektivě. Zde je patrné několik technických detailů, které rychle okomentujeme: V levé horní části obrázku se nejdříve hledá vhodná poloha středu promítání tak, aby se celý objekt vlezl do zorného kužele. Průmětna je zvolena kolmo k půdorysně, vzdálenost od středu je celkem libovolná. Na obrázku je dále patrná konstrukce průmětu bodu A — horizontální vzdálenosti měříme v půdoryse od referenčního bodu H , vertikální měříme v náryse od horizontu h . Výsledný průmět je vzhledem k Mongeovým pomocným průmětům dvakrát zvětšen — úběžník pro směry kolmé k nárysně by se nevezl do náčrtny, proto je užito stejnolehlosti (se středem v bodě H a koeficientem 2).

17.2 Stereoskopie a anaglyfy

Stereoskopie je zobrazovací metoda, kterou se snažíme vzbudit iluzi trojrozměrnosti nad dvojrozměrnou předlohou tím, že každému oku dodáváme jiný průmět téhož objektu. Toho lze dosáhnout tak, že se zobrazovaný objekt perspektivně promítne, a to ze dvou středů, které jsou od sebe vzdáleny stejně jako zorničky lidských očí. . .

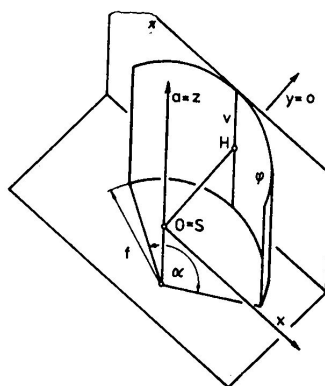
Jednou ze stereoskopických technik jsou tzv. *anaglyfy*: dva perspektivní průměty jsou zobrazeny v téže průmětně různými barvami, které jsou pak odstíněny dvojbarevnými brýlemi, viz obr. 17.35.



Obrázek 17.35: [P] Dvanáctistěn (s vepsanou krychlí) jako anaglyf: červený průmět je určen levému oku, azurový pravému, tzn. brýle nasazujeme červeným sklem na pravé oko a azurovým na levé.

17.3 Nelineární perspektiva

Typickým příkladem nelineární perspektivy je *válcová* neb *cylindrická perspektiva*, kdy se prostor promítá z daného středu na válcovou plochu (jejíž osa zpravidla prochází středem promítání). Takové zobrazení se užívá při panoramatickém fotografování, viz obr. na str. 125. To že promítáme na jinou plochu než rovinu má za následek, že přímky se obecně nemusí zobrazovat na přímky (což znamená takové zobrazení rozhodně není projektivní).



Obrázek 17.36: [DV] Určující prvky válcové perspektivy...

Na obr. 17.36 jsou naznačeny určující prvky válcové perspektivy — průmět libovolného bodu v prostoru je tak určen středovým průmětem ze středu S na válcovou plochu φ a následným rozvinutím této plochy do roviny π . Uvědomte si, že sestrojít obraz obecného bodu nelze realizovat eukleidovským pravítkem a kružítkem, viz problém rektifikace kružnice v odst. 20.2. . .

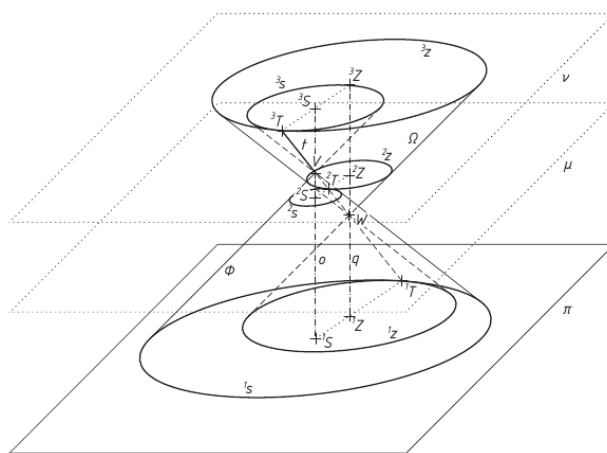
Jiným příkladem nelineární perspektivy je geometrie objektivu zvaného *rybí oko*, již je možno interpretovat jako složení středového promítání na kulovou plochu a ještě jednoho promítání z této plochy do roviny (kulovou plochu není možné rozvinout, proto se musí promítat) . . .

18 Cyklografie

Cyklografie je trochu exotická zobrazovací metoda, která však má zajímavé aplikace. Cyklografie má nejbliž ke kótovanému promítání — bod A v prostoru je zastoupen svým kolmým průmětem A_1 , akorát místo kóty (z_A) kreslíme cyklus se středem v A_1 , s poloměrem $|z_A|$ a s orientací odpovídající znaménku z_A . Naopak, každý cyklus v průmětně určuje jednoznačně bod v prostoru. . .

Z uvedeného se dá tušit, že zmiňované aplikace se budou týkat právě úloh s cykly/kružnicemi. Typickým příkladem může být výše diskutované Apollóniovy úlohy, jejichž cyklografická interpretace vede sice k prostorovým, ale celkem jednoduchým konstrukcím jako např. určení průniku přímky s rovinou nebo kuželem! Toto je zrovna místo, kde lze ledacos zajímavého doplnit; vhodnými odkazy jsou např. [Sei], příp. [Br].

Pomocí cyklografie se taky celkem hezky interpretují některá geometrická zobrazení, jako např. trochu problematická dilatace, viz obr. 18.37.



Obrázek 18.37: [Br] Cyklografická interpretace dilatace dotýkajících se cyklů. . .

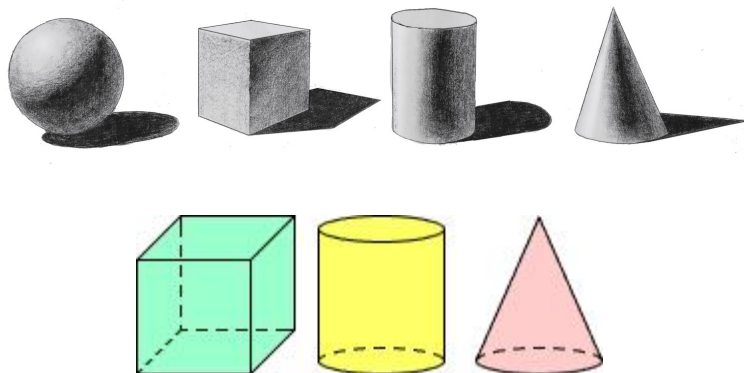
19 Typické úlohy

Chceme-li sestavit názorný obrázek nějakého tělesa, máme několik možností: buď sestavujeme volný nebo vázaný průmět, přičemž u vázaného zobrazování jsme se ještě naučili několik technicky výhodných zkratek. . . Nejdříve zmíníme několik obzvlášť krásných, totiž Platónských těles a přidáme pár dalších typických příkladů, které se dávají např. do písemek.

Pokud jsme se v tomto kurzu něčemu naučili, mělo by nám být hned jasné, co je na obr. 19.38 špatně a proč. Navíc bychom měli umět případné chyby napravit, a to s pravítkem a kružítkem. . .

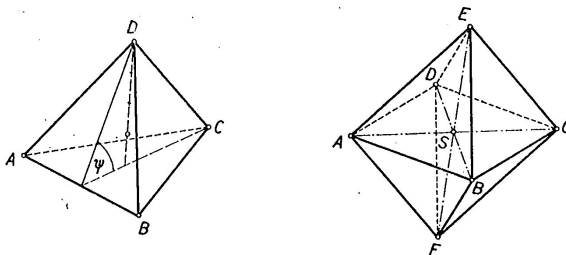
19.1 Zobrazení Platónských těles

Na obr. 19.39 je volný rovnoběžný průmět pravidelného čtyřstěnu a osmistěnu. V prvním případě není co řešit, protože rovnoběžný průmět je určen obrazy čtyř vrcholů a čtyřstěn jich ani víc nemá. Tyto průměty vrcholů mohou být zvoleny celkem libovolně (věta 13 na str. 65 nám akorát říká, že splývat mohou nejvýše dva z nich). S pravidelný osmistěn má šest vrcholů — jsou-li dány průměty čtyř v obecné poloze, zbylé dva se snadno doplní pomocí rovnoběžníků. O průmětech



Obrázek 19.38: [I] Předpokládejme, že všechna tělesa v každé skupině mají podstavy v jedné rovině. Pak v jednom z obrázků je evidentně něco špatně!

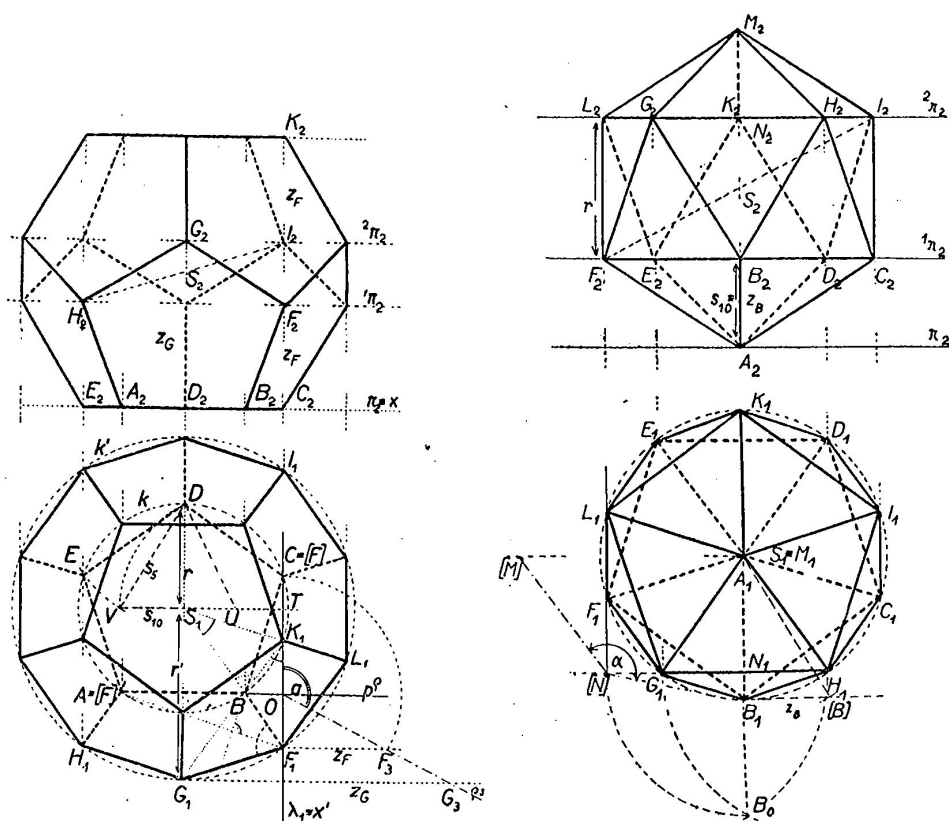
pravidelného šestistěnu (krychle) jsme se bavili tolikrát, že jej tady klidně přeskočíme. Volný průmět dvacetistěnu, resp. dvanáctistěnu spolu s jistým rozborem a návodem máme v odst. 5.14. . .



Obrázek 19.39: [U] Volný rovnoběžný průmět pravidelného čtyř- a osmistěnu.

Při konstrukcích vázaných průmětů začínáme s Mongeovými sdruženými průměty, k jejichž sestavení používáme právě poznatky z 5.14. Jediná dvě konstrukčně netriviální Platónská tělesa zobrazená ve velmi speciálních polohách vůči průmětnám jsou na obr. 19.40. . . Odtud lze celkem rychle sestavit libovolný axonometrický či kosoúhlý průmět tak, jak jsme se naučili v části 16. Případný perspektivní průmět by se dělal podle návodu na obr. 17.34.

Alternativní konstrukce kolmého axonometrického průmětu pravidelného dvanáctistěnu je na obr. 19.41: Zde je zobrazen axonometrický průmět krychle, do níž je vepisován dvanáctistěn. Při této konstrukci se nejdřív zdůvodní, že když rozdělíme stranu opsané krychle zlatým řezem, tak delší díl odpovídá straně vepsané krychle (tj. úhlopříčce pětiúhelníku) a kratší díl odpovídá straně dvanáctistěnu (tj. straně pětiúhelníku). Takto se celkem volně (přenášením dělicích poměrů) sestrojí 12 vrcholů ve stěnách opsané krychle. Zbýlých 8 vrcholů tvoří právě vrcholy vepsané krychle a tady se využije stejnolehlosti obou krychlí. . .

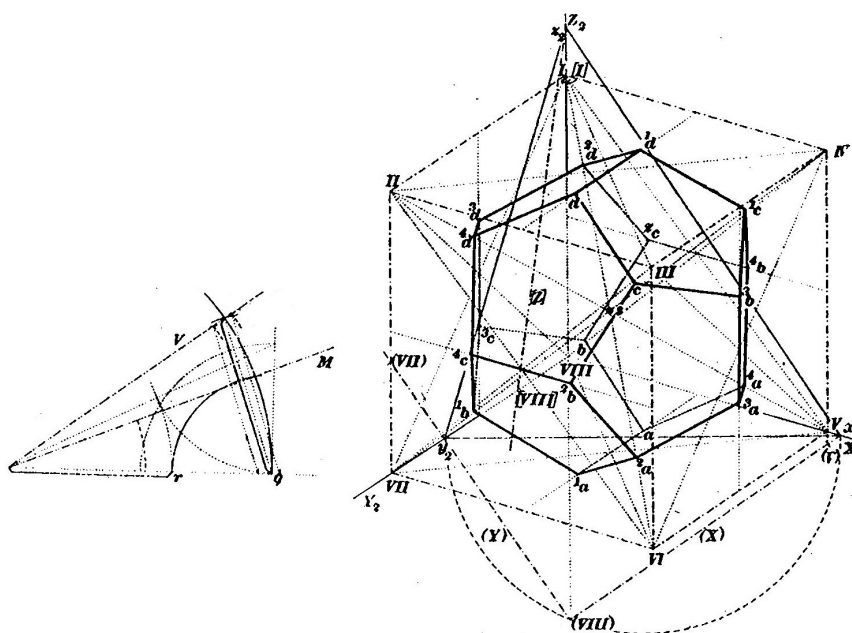


Obrázek 19.40: [KV] Mongeovy sdružené průměty pravidelného dvanácti- a dvacetistěnu.

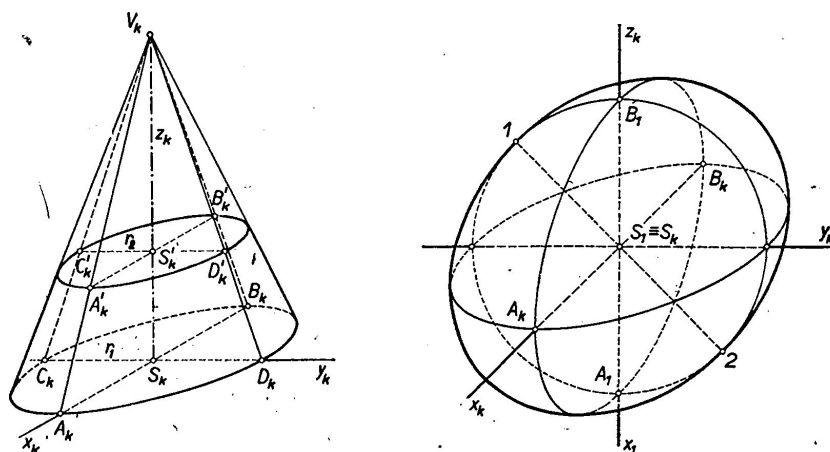
19.2 Zobrazení oblých těles

Oblými tělesy tady myslíme jenom kužele, válce a koule. Při sestrojování jejich průmětů potřebujeme umět z daných podmínek sestrojit vždy průmět nějaké kružnice, příp. několika kružnic; u kuželů a válců ještě obrysové přímky. Při každém rovnoběžném a vhodně zvoleném středovém promítání je průmětem kružnice elipsa a tato je pro nás dokonale určena svými hlavními průměry. Obrysové přímky kuželů a válců jsou pak tečnami k elipsám, jež jsou průměty podstav. Obě tyto úlohy jsou řešitelné eukleidovským pravítkem a kružítkem, a to hned několika způsobem, viz odst. 7.4 a 11.1. V našich úlohách přichází elipsa vždycky jako obraz kružnice vzhledem k nějaké osově afinitě (kolineaci), kterou s oblibou rádi užíváme a preferujeme...

Na obr. 19.42 je průmět kužele a koule v kosoúhlém promítání, avšak bez pomocných konstrukcí.



Obrázek 19.41: [KKK] Kolmý axonometrický průmět pravidelného dvanáctistěnu.

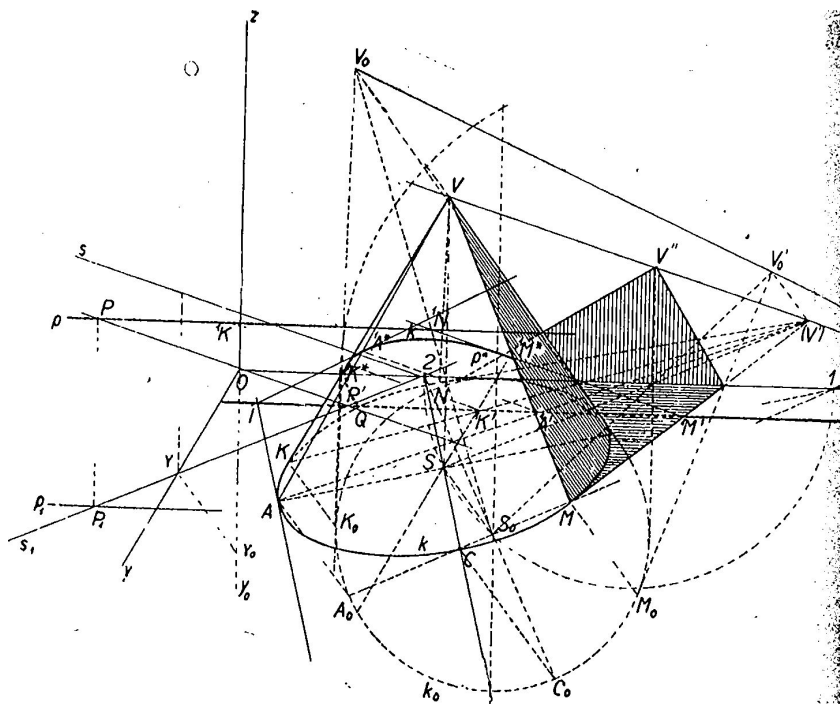


Obrázek 19.42: [U] Kosoúhlý průmět rotačního kužele a koule. . .

Uvědomte si, že sestavit kolmý axonometrický průmět kužele, resp. válce (s podstavou např. v půdorysně) je mnohem jednodušší, protože nemusíme sestavovat směry hlavních průměrů (stačí pouze určit zkrácení na vedlejší ose). S koulí je to samozřejmě ještě lepší. . .

19.3 Další

Je dán rotační kužel s podstavou v půdorysně a směr osvětlení. Máme sestavit kosoúhlý průmět kužele spolu s vlastním stínem na kuželi a stíny vrženými do první i druhé průmětny.



Obrázek 19.43: [KV] Osvětlení kužele a přímky...

20 K eukleidovským konstrukcím

20.1 Sestrojitelné veličiny

Uvažme danou úsečku jako jednotku; ptáme se, jaké všechny veličiny lze odtud sestrotit eukleidovským pravítkem a kružítkem. Dříve jsme se naučili, jak sestrotit jakoukoli racionální veličinu, obecněji součin/podíl jakýchkoli již sestrotjených veličin (pomocí podobnosti trojúhelníků). Dále umíme druhou odmocninu z jakékoli sestrotjené veličiny (pomocí Eukleidových vět o výšce/odvěsně, příp. Pythagorovy věty). Součet/rozdíl je samozřejmě triviální.

Opakováním uvedených nápadů vidíme, že mezi sestrotitelné veličiny patří např. $34 - 2\sqrt{17}$, $\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$, $\sqrt{\frac{1122}{34+2\sqrt{17}}}$ nebo taky

$$\frac{1}{4}\sqrt{34 - 2\sqrt{17} - 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \sqrt{170 - 26\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}}$$

Ačkoli je sestrotitelných veličin skutečně mnoho, jedná se pořád o hodně specifická algebraická čísla. Ve skutečnosti platí, že nic „typově jiného“ sestrotit nelze, což se zhruba zdůvodní takto:

Jakýkoli eukleidovsky sestrotitelný bod v rovině vzniká jako průnik dvou přímek, průnik přímky s kružnicí nebo průnik dvou kružnic. Algebraická interpretace každé takové konstrukce vede k řešení soustavy dvou lineárních rovnic, jedné lineární a jedné kvadratické rovnice nebo dvou kvadratických rovnic, jejichž koeficienty jsou dosud sestrotjená čísla. Odtud můžeme tušit, že postupně lze sestrotjovat pouze čísla, která obsahují toliko iterované druhé odmocniny, jejich součty, rozdíly, násobky a podíly, jak je naznačeno výše. Drtivá většina reálných čísel eukleidovsky sestrotit nelze.

Přesnější formulace lze najít v [Ha], [L], [Mar₂] a jinde. . .

20.2 Slavné problémy starověku

Existuje několik skutečně slavných a dlouhou dobu otevřených problémů, jež byly formulovány již ve starověku. Několik úloh, které se týkají eukleidovské sestrotitelnosti, zmíníme níže. Zdůvodnění

jejich řešitelnosti/neřešitelnosti je založeno na algebraickém popisu naznačeném v 20.1. Detaily samozřejmě ignorujeme, viz dříve doporučené zdroje.

Zdvojení krychle

Úkolem je sestrojít krychli, jejíž objem je dvojnásobkem objemu dané krychle. Je-li velikost hrany dané krychle a , pak hledaná krychle má mít hranu délky $x = \sqrt[3]{2}a$. Třetí odmocnina ze 2 je sice algebraické číslo, ale nikoli výše uvedeného tvaru. Tato úloha není eukleidovsky řešitelná.

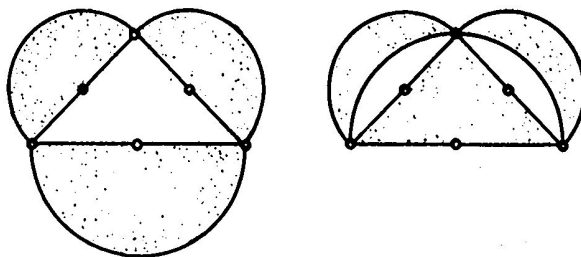
Rektifikace kružnice

Úkolem je sestrojít úsečku, jejíž délka je rovna velikosti obvodu dané kružnice. Je-li poloměr dané kružnice r , pak hledaná úsečka má mít velikost $x = 2\pi r$. Od roku 1882 víme, že číslo π není algebraické, tudíž není sestrojitelné. Tato úloha není eukleidovsky řešitelná.

Kvadratura kruhu

Úkolem je sestrojít čtverec, jehož obsah je roven obsahu daného kruhu. Je-li poloměr daného kruhu r , pak hledaný čtverec má mít hranu dlouhou $x = \sqrt{\pi}r$. Ze stejného důvodu jako u rektifikace kružnice, není tato úloha eukleidovsky řešitelná.

Odedávna¹ bylo dobře známo, že řešitelnost těchto dvou problémů je ekvivalentní a odedávna se lidé domnívali, že se jedná o neřešitelnou úlohu. Nicméně odedávna bylo také známo několik příkladů kvadratury křivočarých útvarů, viz Hippokratovy půlměsíce a Archimédova kvadratura paraboly...



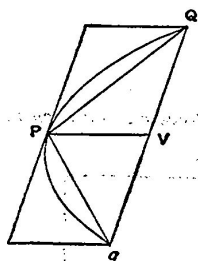
Obrázek 20.1: [A] Z Pythagorovy věty a věty o obsahu kruhu plyne, že Hippokratovy půlměsíce mají stejný obsah jako trojúhelník.

Trisekce úhlu

Úkolem je roztřít daný úhel na tři shodné úhly. Na rozdíl od předchozích problémů je tato úloha záludná v tom, že některé úhly sestrojít lze a některé nikoli. Řešení je opět ryze algebraické a zajímavé a redukuje se na analýzu kořenů polynomů třetího stupně nad vhodnými algebraickými rozšířeními tělesa racionálních čísel.

Do seznamu sestrojitelných úhlů samozřejmě patří 90° , 60° , jejich poloviny, čtvrtiny, osminy, ale taky libovolné celé násobky. Kromě toho z Odstavce 5.9 umíme sestrojít úhel 72° apod. Na

¹Z tvrzení XII.2 v [E] plyne, že pro libovolný kruh je poměr jeho obsahu a čtverce jeho poloměru stále stejný. Archimédés dokázal, že obsah kruhu je roven obsahu pravoúhlého trojúhelníku, jehož jedna strana odpovídá poloměru a druhá obvodu dané kružnice. Pokud konstantu $S : r^2$ označíme π , pak pro obvod platí $o = 2\pi r$.



Obrázek 20.2: [HTD] Obsah parabolické úseče je roven $\frac{4}{3}$ obsahu trojúhelníku PQq (což jsou $\frac{2}{3}$ obsahu opsaného rovnoběžníku).

druhé straně, mezi úhly, které eukleidovsky sestrojít nelze patří např. nevinně vyhlížející 20° a spousta (opět drtivá většina) dalších.

Konstrukce pravidelného n -úhelníku

Úkolem je sestrojít pravidelný n -úhelník, což evidentně úzce souvisí s předchozím problémem, akorát jsme podstatně redukovali množinu úhlů do diskuze. V Základech najdeme konstrukce pro $n = 3, 4, 5$ a 15 . Pro každý sestrojitelný pravidelný k -úhelník, není problém sestrojít taky pravidelný $2k$ -úhelník. Tzn. úloha je řešitelná také pro $n = 6, 8, 10, 12, 16, 20$ a další.

30. března 1796 C.F. Gauss sestrojil pravidelný 17-úhelník a posléze dokázal jednu implikaci v následující větě. Druhý směr o několik desítek let později dokázal P.L. Wantzel stejně jako pár dalších výše zmiňovaných výsledků.

Věta (Gaussova–Wantzelova). *Pravidelný n -úhelník lze sestrojít eukleidovským pravítkem a kružítkem právě tehdy, když n je součinem libovolné mocniny 2 a navzájem různých Fermatových prvočísel.*

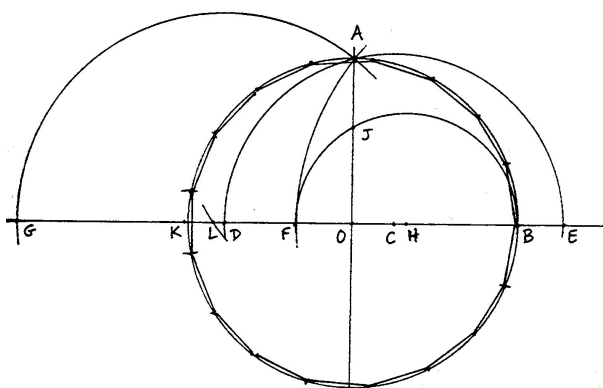
Fermatovo prvočíslo je prvočíslo tvaru $F_k = 2^{2^k} + 1$. K dnešnímu dni² je známo pouze pět Fermatových prvočísel: $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257$ a $F_4 = 65537$. Tato úloha tedy není řešitelná pro $n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, \dots$. Pro další čtení doporučujeme např. velmi dobře srozumitelnou 13. kapitolu v [A].

20.3 Mascheroniovské a steinerovské konstrukce

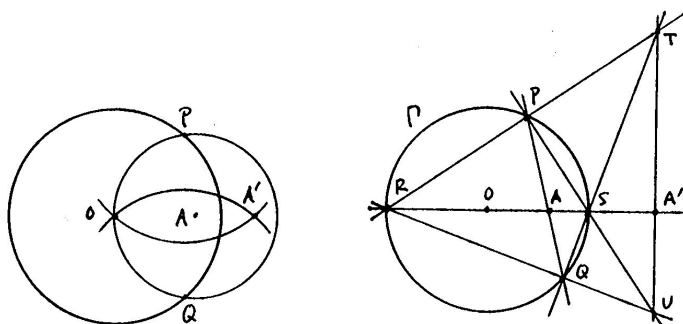
Mascheroniovské konstrukce jsou konstrukce, při kterých se používá pouze kružítko. *Steinerovské konstrukce* jsou konstrukce, při kterých se používá pouze pravítko a jedna pomocná předem narýsovaná kružnice. Platí, že veličina je sestrojitelná eukleidovsky, právě když je sestrojitelná mascheroniovsky, právě když je sestrojitelná steinerovsky. Toto tvrzení se zdůvodňuje v podobném duchu, jak jsme naznačili v 20.1, viz [Mar₂].

To v důsledku znamená, že jakoukoli eukleidovskou konstrukci musí jít realizovat mascheroniovsky, příp. steinerovsky. Nalezení takové konstrukce může být samozřejmě poněkud komplikovanější, než zdůvodnit, že to je možné. Dva příklady na ukázkou jsou na obr. 20.4.

²30. května 2013



Obrázek 20.3: [Ha] Konstrukce pravidelného 17-tiúhelníku.

Obrázek 20.4: [Ha] Mascheroniovská a steinerovská konstrukce inverzního bodu A' k bodu A při kruhové inverzi se středem v O . . .

20.4 Konstrukce s označeným pravítkem

Konstrukce s označeným pravítkem jsou konstrukce, při kterých se používá jak kružítko, tak pravítko, a navíc je dovoleno dělat na pravítku značky, které se dále používají. Takovému nástroji se také říká *neusis*.

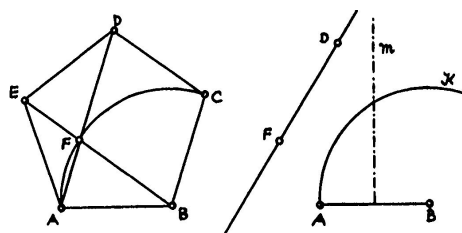
Tímto způsobem lze velmi rychle sestavit pravidelný pětiúhelník, viz obr. 20.5 (srovnejte s konstrukcemi v 5.9). Neusis se také používá při tzv. proužkové konstrukci bodů elipsy (zadané hlavními průměry) . . .

Zajímavější je, že s označeným pravítkem lze řešit mnohé eukleidovské neřešitelné problémy jako např. trisekci libovolného úhlu! Na obr. 20.6 najdete Archimédovo řešení tohoto problému, jehož zdůvodnění je velmi prosté. . .

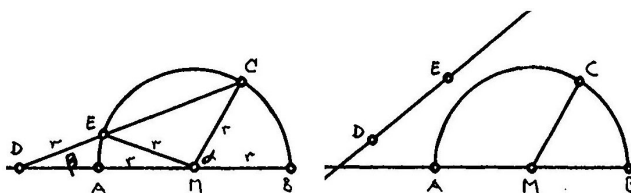
Úplnou charakterizaci veličin, které lze s kružítkem a označeným pravítkem sestavit, lze najít v [Ha] nebo [Mar₂]. . .

21 K úlohám Apollóniovým

První seznámení s Apollóniovými úlohami je v části 6. Od samého začátku jsme si všimli, že vhodné geometrické transformace pomáhají při řešení úlohy. Ve cvičení 9.7 jsme si uvědomili,



Obrázek 20.5: [A] Konstrukce pravidelného pětiúhelníku s kružítkem a označeným pravítkem.



Obrázek 20.6: [A] Trisekce úhlu s označeným pravítkem: $\alpha = \angle BMC$ je libovolný úhel; sestrojíme lib. kružnici se středem v M ; přiložíme neusis s vyznačenými body D a E tak, že $DE = AM$. . . Potom platí, že $\beta = \frac{1}{3}\alpha$.

že pomocí dilatace a kruhové inverze lze jakoukoli Apollóniovu úlohu redukovat na podstatně jednodušší problém z poměrně krátkého seznamu. Tady doplníme ještě několik postřehů a alternativ.

21.1 Řešení Gergonnovo

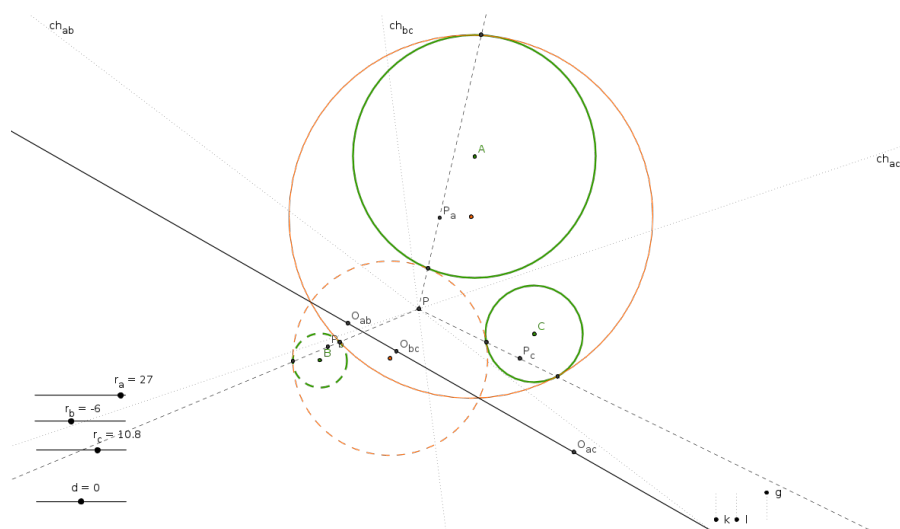
Toto řešení je poměrně elementární, čímž myslíme, že při konstrukci se nepracuje s žádnou transformací, viz obr. 21.7. Zdůvodnění konstrukce plyne z následujícího rozboru:

- spojnice (l_i) dvojic dotykových bodů na každém cyklu prochází společným bodem (P), jež je potenčním středem daných tří kružnic,
- póly (L_i) těchto spojnic (= průsečíky tečen z dotykových bodů) leží na jedné přímce (ch), jež je právě chodrálou dvou kružnic řešení,
- tato přímka je právě osou podobnosti tří daných cyklů (= spojnice tří středů stejnolehlosti),
- protože $L_i \in ch$ a L_i je pól l_i , musí pól ch ležet na l_i .

Zdůvodnění tvrzení, jež nejsou jasná, lze najít např. v [Ho]. Princip zmiňovaný v (d) je znám jako tzv. polární reciprocita.

21.2 Řešení pomocí geometrických míst

Tato metoda je založena na jednoduchém pozorování, že středy cyklů, které se dotýkají dvou daných cyklů tvoří vždy nějakou kuželosečku (k) — pro cykly a, b se středy A, B a poloměry r_a, r_b platí:

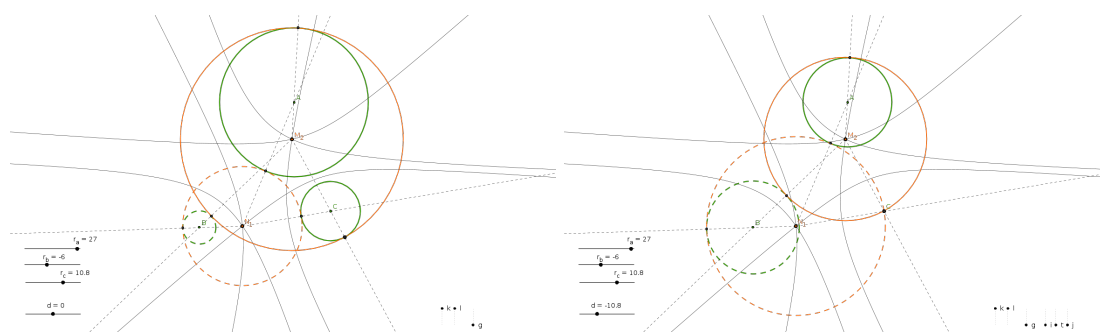


Obrázek 21.7: Gergonново řešení obecné Apollóniovoy úlohy: (1) $ch_{ab}, ch_{bc}, ch_{ac}$ jsou chordály tří dvojic daných kružnic, jež prochází jejich potenčním středem P ; (2) O_{ab}, O_{bc}, O_{ac} jsou středy stejnolehlosti tří dvojic daných cyklů, jež leží na jejich ose podobnosti; (3) P_a, P_b, P_c jsou póly této přímky vzhledem k daným kružnicím; (4) dotykové body jsou na spojnicích PP_a, PP_b, PP_c .

- je-li $|r_a - r_b| > |AB|$, pak k je elipsa s ohnisky A, B a délkou hlavní osy $|r_a - r_b|$,
- je-li $|r_a - r_b| < |AB|$, pak k je hyperbola s ohnisky A, B a délkou hlavní osy $|r_a - r_b|$.

V uvedeném popisu uvažujeme r_a, r_b jako orientované poloměry, tzn. znaménko r_a odpovídá orientaci cyklu a . Ve speciálních, resp. mezních případech je kuželosečka k kružnice nebo přímka. . .

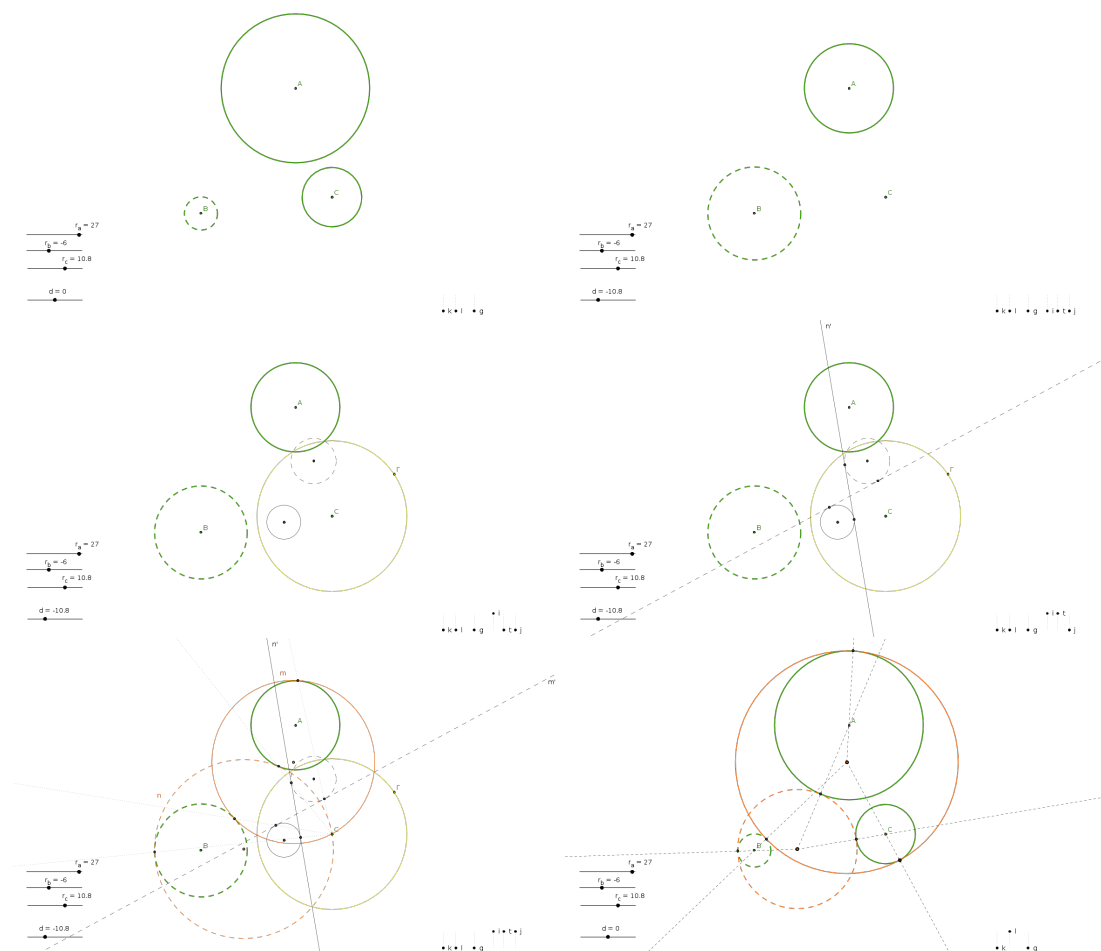
Pro tři dané cykly jsou středy hledaných dotýkajících se cyklů společnými body nějakých tří kuželoseček — sestrojít takové body zpravidla neumíme eukleidovsky.



Obrázek 21.8: Středy cyklů, které se dotýkají dvou daných cyklů, tvoří kuželosečku (která se nemění při dilatacích).

21.3 Řešení pomocí vhodných transformací

Toto je metoda, kterou jsme protěžovali především. Nebudeme se znovu opakovat, pouze pro porovnání přikládáme miniseriál demonstrující typickou redukci složitosti pomocí dilatace a kruhové inverze, viz obr. 21.9.



Obrázek 21.9: Řešení obecné Apollóniové úlohy pomocí dilatace a kruhové inverze: (1) zadání; (2) dilatace; (3) kruhová inverze; (4) společné tečny ke dvěma cyklům (!); (5) kruhová inverze; (6) dilatace.

21.4 Řešení pomocí cyklografie

(Překvapení. . .)

22 K neukleidovským geometriím

- [A] B. Artmann, *Euclid: The Creation of Mathematics*, Springer, 1999
- [Be] M. Berger, *Geometry I, II*, Springer, 1987
- [Br] M. Brauner, *Planimetrické úlohy řešené prostorově* (diplomová práce), Brno, 2009
- [DV] L. Drs, J. Všečeka, *Objektivem počítače: geometrie speciálních fotografických technik*, SNTL, 1981
- [D] T. Dvořáková, *Přínos Jánose Bolyaie k základům neeuclidovské geometrie* (bakalářská práce), Praha, 2012
- [E] Eukleidés, *Základy*, Alexandrie, –300
(pro konkrétní citovaná vydání viz [E_J, E_B, E_V, HTD] a [Š] níže)
- [Ha] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, 2000
- [Ha₂] R. Hartshorne, *Teaching geometry according to Euclid*, Notices of AMS, 2000,
www.ams.org/notices/200004/fea-hartshorne.pdf
- [Hi] D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, 1902,
www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf
- [Ho] J. Holubář, *O methodách rovinných konstrukcí: Úloha Apolloniova a úlohy příbuzné*, JČMF, 1949
- [KKK] F. Kadeřávek, J. Klíma, J. Kounovský, *Dekriptivní geometrie I*, JČMF, 1950
- [Ka] F. Kadeřávek, *Geometrie a umění v dobách minulých*, Praha, 1935
- [Ko] A. Kolman, *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, 1968
- [KV] J. Kounovský, F. Vyčichlo, *Deskriptivní geometrie pro samouky*, ČSAV, 1953
- [Ku] F. Kuřina, *Deset geometrických transformací*, Prometheus, 2002
- [Ku₂] F. Kuřina, *Deset pohledů na geometrii*, ČSAV, 1996

- [L] M. Lávička, *Syntetická geometrie*, Plzeň, 2007,
http://home.zcu.cz/~lavicka/subjects/SG/texty/sg_text.pdf
- [Mach] F. Machala, *Plochy technické praxe*, Olomouc, 1986
- [Mar] G.E. Martin, *Transformation geometry*, Springer, 1982
- [Mar₂] G.E. Martin, *Geometric constructions*, Springer, 1998
- [Me] V. Medek, *Deskriptivna geometria*, SNTL, 1962
- [P] R. Pruner, *Prostorově viděné modely (anaglyfy) pro vyučování geometrie na hlavních a nižších středních školách*, Praha, 1943
- [Ř] O. Říha, *Konstrukční geometrie I, II*, Brno, 2002
- [Ř₂] O. Říha, *Kruhová inverze*, Brno, 2010
- [Sei] L. Seifert, *Cyklografie*, JČMF, 1949
- [Sek] M. Sekanina a kol., *Geometrie I, II*, SPN, 1986
- [SMS] E. Simeonov, D. Mairinger, Ch. Schmid, *Mathematische Früherziehung, Lagen & Winkel*, von Oemis, 2010
- [St] J. Stillwell, *The four pillars of Geometry*, Springer, 2005
- [U] A. Urban, *Deskriptivní geometrie I, II*, SNTL, 1965

* * *

- [E_B] *The Elements of Euclid*, atraktivní vydání prvních 6 knih od O. Byrneho (1847),
www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/byrne.html
- [E_J] *Euclid's Elements*, interaktivní edice D. Joyce podle překladu T.L. Heath (1908–28),
aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html
- [E_V] *Eukleidés, Základy, Knihy I–XII*, české vydání prvních 12 knih, jež zpracoval a komentářem opatřil P. Vopěnka podle překladu F. Servita (1907), O.P.S., 2008–12
- [HTD] *The thirteen books of Euclid's Elements, The works of Archimedes including The method, Conics by Apollonius of Perga, Introduction to Arithmetics by Nicomachus of Gerasa*, překlady klasických prací od T.L. Heath, R. Catesby Taliaferra a M.L. D'Ooge, Encyclopaedia Britannica, 1952
- [Š] *Řecké matematické texty*, české překlady R. Maška a A. Šmída vybraných textů s bohatými poznámkami a komentáři od Z. Šíra, OIKOYMENH, 2011

* * *

- [I] Internet:
<http://www.mathatube.com/geometry-geometry-solids.html>,
<http://missmcdonaldart.blogspot.cz/2013/02/2713day-1-through-21413-day-5-belowyou.html>,

Seznam obrázků

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | [Ko] Miniatura Eukleida ze 6. století. | 7 |
| 3.2 | Hierarchie geometrií | 10 |
| 4.1 | Eukleidův dodatečný postulát | 12 |
| 4.2 | [A] I.32 a I.47 | 13 |
| 4.3 | [A] II.5 | 13 |
| 4.4 | [A] III.20 a III.32 | 14 |
| 4.5 | [E _V] Pravidelný pětiúhelník IV.11 a patnáctiúhelník IV.16. | 14 |
| 4.6 | [E _J] VI.31: Pokud je trojúhelník ABC pravoúhlý a mnohoúhelníky nad stranami jsou podobné, potom obsah toho nad přeponou je roven součtu obsahů těch nad odvěsnami. | 15 |
| 4.7 | [E _J] XI.39: Pokud je výška žlutého hranolu na stěnu $ACEF$ stejná jako výška modrého hranolu na stěnu GHK a pokud má rovnoběžník $ACEF$ dvojnásobný obsah jako trojúhelník GHK , potom tyto hranoly mají stejný objem. | 15 |
| 4.8 | [Ha] XII.7: Objem trojbokého jehlanu je roven třetině objemu trojbokého hranolu se stejnou základnou a stejnou výškou. | 16 |
| 4.9 | [A] XIII.16: Pravidelný dvacetistěn. | 16 |
| 5.10 | [A] I.27 a I.29 | 17 |
| 5.11 | [E _B] Věta I.29 v Byrnově vydání Základů. | 18 |
| 5.12 | [E _J] I.35: Rovnoběžníky se stejnou základnou a výškou mají stejný obsah. | 19 |
| 5.13 | [A] I.44 | 20 |
| 5.14 | [A] II.14 | 20 |
| 5.15 | [Ha] Stříhání stejnoplochých pravoúhelníků | 21 |
| 5.16 | [K. Nedvědová, 2009] Kvadratura obecného trojúhelníku se stříháním. | 21 |
| 5.17 | [A] III.36: Pro libovolnou sečnu jdoucí bodem D platí: $DC \cdot DA = DB^2 = \text{konst.}$ | 22 |
| 5.18 | Chordála dvou kružnic. | 22 |
| 5.19 | Chordála je příčka kolmá na spojnici středů. | 23 |
| 5.20 | [A] II.11 (konstrukce zlatého řezu) | 24 |
| 5.21 | Pokud $AH = BL$, potom H je zlatý řez $AB \iff B$ je zlatý řez AL | 25 |
| 5.22 | [A] Analýza pravidelného pětiúhelníku. | 25 |

| | | |
|------|--|----|
| 5.23 | [Ha] IV.10: Na dané úsečce AB sestroj K ve zlatém řezu; sestroj trojúhelník ABL tak, aby $AL = AB$ a $BL = AK$. Potom platí, že trojúhelník ABL je rovnoramenný a $\beta = 2\alpha$ | 26 |
| 5.24 | [Ha] Ke konstrukci pravidelného pětiúhelníku. | 27 |
| 5.25 | [E _J] VI.1: Poměr obsahů trojúhelníků (resp. rovnoběžníků) se stejnou výškou je stejný jako poměr délek jejich základů. | 28 |
| 5.26 | [A] VI.2: $SD' : SD = SE' : SE \iff D'E' \parallel DE$. VI.4–5: $\alpha = \alpha'$ a $\beta = \beta'$ a $\gamma = \gamma' \iff b : c = b' : c'$ a $c : a = c' : a'$ a $a : b = a' : b'$ | 29 |
| 5.27 | K dělicímu poměru. | 30 |
| 5.28 | [E _J] XI.30: Rovnoběžnostěny se stejnou základnou a stejnou výškou mají stejný objem. | 31 |
| 5.29 | [Ha] XII.5: Poměr objemů jehlanů se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich základů. | 31 |
| 5.30 | [Ko] Pravidelné konvexní mnohostěny. | 32 |
| 5.31 | [A] Pravidelný dvacetistěn poprvé: z XIII.10 plyne, že $EVWQ$ je čtverec. | 33 |
| 5.32 | [A] Pravidelný dvacetistěn podruhé: z XIII.10 plyne, že $WZ = LE$ | 33 |
| 5.33 | [A] Pravidelný dvacetistěn potřetí: řez dvacetistěnem a řez zlatý. | 34 |
| 5.34 | [A] Pravidelný dvanáctistěn. | 34 |
| 6.35 | Řešení BBP pomocí mocnosti: (1) P je průsečík přímek AB a c ; (2) velikost $ PC = PX $ je sestrojena pomocí Eukleidovy věty o odvěsně; (3) kružnice k je určena body A, B, C | 35 |
| 6.36 | Řešení BPP pomocí osové souměrnosti: (1) A' je symetrický k A podle osy; (2) k je kružnice, která prochází body A, A' a dotýká se b (úloha BBP); (3) body dotyku s přímkami b a c jsou symetrické podle osy. | 36 |
| 6.37 | Řešení BPP pomocí stejnolehlosti: (1) k' je libovolná kružnice, která se dotýká b a c ; (2) k' chápeme jako stejnolehlý obraz k : A' je průsečík polopřímky SA s kružnicí k' ; (3) střed O je vzor středu O' vzhledem k této stejnolehlosti: $AO \parallel A'O'$; (4) podobně je to s dotykovými body B a C | 36 |
| 6.38 | Řešení BBK pomocí mocnosti: (1) l je libovolná kružnice procházející A, B ; (2) ch je chordála kružnic l a c ; (3) bod P je průsečíkem chordály a přímky AB ; (4) C je dotykový bod tečny z bodu P ke kružnici c ; (5) kružnice k je určena body A, B, C | 37 |
| 6.39 | Řešení PPK pomocí stejnolehlosti: (1) b' a c' jsou přímky rovnoběžné s b a c , které se dotýkají kružnice A ; (2) b' a c' chápeme jako stejnolehlé obrazy přímek b a c : střed stejnolehlosti $A = A'$ je průsečíkem přímky MM' s kružnicí a ; (3) střed O je vzor středu O' vzhledem k této stejnolehlosti: O je průsečík $O'A$ s osou; (4) podobně je to s dotykovými body B a C | 37 |
| 7.40 | [Š] Ke 13. větě z I. knihy Apollóniových Kuželoseček. | 39 |
| 7.41 | [Ku ₂] K Dandelinově–Queteletově větě. | 40 |
| 9.1 | [Mar] Posunutá souměrnost. | 44 |
| 9.2 | [Sek] Každá shodnost v rovině je složením nejvýše tří osových souměrností. | 44 |
| 9.3 | Přehled shodností pomocí obrazů trojúhelníku. | 45 |
| 9.4 | [Be] Stejnolehlost v rovině je vždy přímá. | 46 |
| 9.5 | Mongeova věta: Vnější středy stejnolehlosti tří kružnic leží na přímce a stejně tak každé dva vnitřní a jeden vnější střed leží na přímce. | 47 |
| 9.6 | Dilatace není bodové zobrazení, dilatace je kontaktní zobrazení! Vlevo je naznačen obraz dotykového elementu XY v závislosti na znaménku ρ ; další dva obrázky ilustrují obraz orientované přímky, resp. kružnice jakožto obálky jejich dotykových elementů pro $\rho > 0$ | 48 |

| | | |
|-------|---|----|
| 9.7 | [Ha] Obraz bodu při kruhové inverzi určené kružnicí Γ | 49 |
| 9.8 | [Ha] Obrazem přímky při kruhové inverzi je kružnice procházející středem, a naopak. | 50 |
| 9.9 | [Ha] Obrazem kružnice neprocházející středem je opět kružnice; kružnice se zobrazuje sama do sebe právě tehdy, když protíná řídící kružnici kolmo. | 50 |
| 9.10 | [Ha] Kruhová inverze je konformní zobrazení. | 51 |
| 9.11 | [Ku] Typická (i když trochu specifická) osová afinita: zkracování v jednom směru. | 51 |
| 9.12 | Obraz bodu v osově afinitě. | 52 |
| 9.13 | Dvojpoměr se středovým promítáním nemění! | 54 |
| 9.14 | Středové promítání zobrazuje projektivní přímky na projektivní přímky. | 55 |
| 9.15 | Na standardní přímce je bod E mezi body C a D . Na projektivní přímce nemá relace „mezi“ valného smyslu. | 55 |
| 9.16 | Obraz bodu v osově kolineaci. | 56 |
| 9.17 | [Ku] Desarguesova věta a její trojrozměrná interpretace. | 58 |
| 9.18 | [St] Která čtveřice je projektivním obrazem čtveřice ekvidistantních bodů? | 58 |
| 10.19 | Hierarchie geometrických zobrazení (v závorce uveden typický představitel z každé třídy). | 59 |
| 10.20 | Afinní a projektivní průmět krychle. | 60 |
| 11.21 | [KV] Hlavní průměry elipsy pomocí osově afinity. | 61 |
| 11.22 | [Ř] Průnik přímky s elipsou pomocí osově afinity. | 62 |
| 12.1 | [SMS] K danému průmětu pokoje načrtněte jeho půdorys. | 64 |
| 13.2 | Průměty bodu ve volném rovnoběžném a volném středovém promítání; čerchovanými čarami je naznačena konstrukce pomocného bodu na ose x | 66 |
| 13.3 | [M. Ingrštová, 2010] Průnik přímky $p = PQ$ a roviny $\rho = KLM$ (bod K patří do stěny $ADHE$ v naznačeném tělese): (1) pomocnou rovinu obsahující p volíme ve směru hrany AE ; (2) průsečnice rovin r je určena pomocnými body x a y , které odvozujeme z jejich „pūdorysů“ x_1 a y_1 ; (3) bod $R = p \cap r$ je právě hledaným průnikem $p \cap \rho$ | 67 |
| 14.4 | [Ka] Ukázka z prvního vydání Mongeovy Deskriptivní geometrie (1798). | 68 |
| 14.5 | [Me] Mongeovy sdružené průměty bodu. | 68 |
| 14.6 | Sdružené průměty přímek a jejich stopníky; přímka e je jednoznačně určena teprve svými stopníky (nebo nějakým jiným dodatkem). | 69 |
| 14.7 | Rovina je (skoro vždy) určena svými stopami. | 70 |
| 14.8 | [M. Ingrštová, 2010] Průnik přímky $p = PQ$ a roviny $\rho = KLM$: (1) r je krycí přímka pro směr kolmý k půdorysně ($r_1 = p_1$); (2) její nárys je určen body x, y ; (3) bod $R = p \cap r$ je právě hledaným průnikem $p \cap \rho$ | 70 |
| 14.9 | Vzájemné polohy přímky a roviny: různoběžnost ($p \cap \rho = R$), rovnoběžnost ($q \parallel \sigma$), incidentnost ($t \subset \tau$). | 71 |
| 14.10 | Stopy roviny $\rho = KLM$ jsou určeny stopníky několika přímek ležících v ρ | 71 |
| 14.11 | Průsečnice rovin zadaných stopami. | 72 |
| 14.12 | Vzájemné polohy dvou rovin: různoběžnost, rovnoběžnost a ještě jedna různoběžnost. | 72 |
| 14.13 | Vzájemné polohy dvou přímek: různoběžnost, dvakrát mimoběžnost a rovnoběžnost. | 72 |
| 14.14 | Vzájemná poloha bodu B a roviny ρ : l je libovolná přímka v ρ taková, že $l_1 \ni B_1$; sestrojíme nárys l_2 a uděláme závěr — $B \in \rho \iff B_2 \in l_2$ | 73 |
| 14.15 | [Mach] Krov hradní věže ve Štramberku: krokve jsou příčky k mimoběžkám a a b z několika bodů na kruhové podezdívce k | 74 |
| 14.16 | Sestrojte středový průmět daného objektu z daného středu do dané roviny. | 74 |
| 14.17 | [Me] Nárysný průmět úsečky je ve skutečné velikosti právě tehdy, když je tato úsečka s nárysnou rovnoběžná — proto $ AB = A_2B_2^0 $ | 75 |

| | |
|--|----|
| 14.18[Me] Úsečka AB je přeponou v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami AB_1 a B_1B , jejichž velikosti vidíme nezkresleně v půdoryse, resp. náryse. | 75 |
| 14.19[Me] Otočení roviny kolem hlavní přímky do polohy rovnoběžné s půdorysnou: vzdálenost bodu A_0 od osy je rovna velikosti přepony v naznačeném pravoúhlém trojúhelníku. | 76 |
| 14.20[Ř] Konstrukce průmětů čtverce $ABCD$ ležícího v rovině ρ (rovina je dána stopami, čtverec je určen půdorysem středu S a vrcholu A): (1) sestrojíme nárys bodu S a otočíme S kolem půdorysné stopy do půdorysny (S_0); (2) pomocí osové afinity doplníme otočený bod A_0 ; (3) sestrojíme skutečný čtverec ($A_0B_0C_0D_0$); (4) pomocí osové afinity otočíme zpátky ($A_1B_1C_1D_1$); (5) doplníme nárysný průmět. | 77 |
| 14.21[Me] Kolmým průmětem kolmice k rovině je přímka kolmá k její stopě. | 77 |
| 14.22 Vzdálenost bodu M od roviny α je rovna vzdálenosti tohoto bodu od paty kolmice A : vlevo je rovina α kolmá k nárysně, proto $v(M, \alpha) = M_2A_2 $; vpravo je obecný případ — vzdálenost měříme po sklopení: $v(M, \alpha) = (M)(A) $ | 78 |
| 14.23 Odchylka přímky p od roviny α je rovna odchylce přímek p a p' (= průsečnice α s rovinou k ní kolmou a obsahující p). | 79 |
| 14.24 Odchylka rovin α, β je rovna odchylce přímek a, b (= průsečnice α, β s rovinou kolmou ke společné přímce $\alpha \cap \beta$), což je totéž jako odchylka normálových přímek n_α, n_β | 79 |
| 14.25 Sestrojte středový průmět daného objektu z daného středu do dané roviny. | 80 |
| 15.26 Zobrazení bodu, přímky a roviny, konstrukce stopníků a stop. | 80 |
| 15.27 Průnik rovin $r = \alpha \cap \rho$ sestrojený pomocí (a) hlavních přímek, (b) pomocného průmětu. | 80 |
| 16.28 Kolmá axonometrie je dána stopami axonometrické průmětny; sestrojen axonometrický trojúhelník a průměty osového kříže. | 82 |
| 16.29[Me] Kolmá axonometrie je dána axonometrickým trojúhelníkem; sestrojen osový kříž, jednotky na osách a průmět bodu A | 82 |
| 16.30[Me] Průnik přímky k a roviny $\rho = ABC$: (1) l je krycí přímka pro směr kolmý k půdorysně ($l_1 = k_1$); (2) její axonometrický průmět je určen body L, L' ; (3) bod $R = k \cap l$ je právě hledaným průnikem $k \cap \rho$ | 83 |
| 16.31[Me] Volný rovnoběžný průmět nějaké součástky pomocí zářezové metody. | 84 |
| 16.32 Kosoúhlé promítání je dáno směrem s ; sestrojen kosoúhlý průmět a kosoúhlý půdorys bodu A jakožto stopníky promítacích paprsků. | 85 |
| 16.33 Kosoúhlé promítání je dáno obrazem bodu Y na ose y ; sestrojen kosoúhlý průmět bodu A pomocí osové afinity mezi Mongeovými a kosoúhlými půdorysy. | 85 |
| 17.34[Me] Perspektivní průmět nějaké budovy. | 87 |
| 17.35[P] Dvanáctistěn (s vepsanou krychlí) jako anaglyf: červený průmět je určen levému oku, azurový pravému, tzn. brýle nasazujeme červeným sklem na pravé oko a azurovým na levé. | 88 |
| 17.36[DV] Určující prvky válcové perspektivy. | 88 |
| 18.37[Br] Cyklografická interpretace dilatace dotýkajících se cyklů. | 89 |
| 19.38[I] Předpokládejme, že všechna tělesa v každé skupině mají podstavy v jedné rovině. Pak v jednom z obrázků je evidentně něco špatně! | 90 |
| 19.39[U] Volný rovnoběžný průmět pravidelného čtyř- a osmistěnu. | 90 |
| 19.40[KV] Mongeovy sdružené průměty pravidelného dvanácti- a dvacetistěnu. | 91 |
| 19.41[KKK] Kolmý axonometrický průmět pravidelného dvanáctistěnu. | 92 |
| 19.42[U] Kosoúhlý průmět rotačního kužele a koule. | 92 |
| 19.43[KV] Osvětlení kužele a přímky. | 93 |

| | | |
|------|--|-----|
| 20.1 | [A] Z Pythagorovy věty a věty o obsahu kruhu plyne, že Hippokratovy půlměsíce mají stejný obsah jako trojúhelník. | 96 |
| 20.2 | [HTD] Obsah parabolické úseče je roven $\frac{4}{3}$ obsahu trojúhelníku PQq (což jsou $\frac{2}{3}$ obsahu opsaného rovnoběžníku). | 97 |
| 20.3 | [Ha] Konstrukce pravidelného 17-tiúhelníku. | 98 |
| 20.4 | [Ha] Mascheroniovská a steinerovská konstrukce inverzního bodu A' k bodu A při kruhové inverzi se středem v O | 98 |
| 20.5 | [A] Konstrukce pravidelného pětiúhelníku s kružítkem a označeným pravítkem. | 99 |
| 20.6 | [A] Trisekce úhlu s označeným pravítkem: $\alpha = \angle BMC$ je libovolný úhel; sestrojíme lib. kružnici se středem v M ; přiložíme neusis s vyznačenými body D a E tak, že $DE = AM$ Potom platí, že $\beta = \frac{1}{3}\alpha$ | 99 |
| 21.7 | Gergonnovo řešení obecné Apollóniovovy úlohy: (1) $ch_{ab}, ch_{bc}, ch_{ac}$ jsou chordály tří dvojic daných kružnic, jež prochází jejich potenčním středem P ; (2) O_{ab}, O_{bc}, O_{ac} jsou středy stejnolehlosti tří dvojic daných cyklů, jež leží na jejich ose podobnosti; (3) P_a, P_b, P_c jsou póly této přímky vzhledem k daným kružnicím; (4) dotykové body jsou na spojnicích PP_a, PP_b, PP_c | 100 |
| 21.8 | Středy cyklů, které se dotýkají dvou daných cyklů, tvoří kuželosečku (která se nemění při dilatacích). | 100 |
| 21.9 | Řešení obecné Apollóniovovy úlohy pomocí dilatace a kruhové inverze: (1) zadání; (2) dilatace; (3) kruhová inverze; (4) společné tečny ke dvěma cyklům (!); (5) kruhová inverze; (6) dilatace. | 101 |

- řez
 dvacetistěnem, 34
 zlatý, 24
- Apollónios, 35, 38
Archimédés, 96, 98, 113
- Bolyai, F., 19
Bolyai, J., 8
- chordála, 22
- Dandelin, G.P., 39
Dedekind, J.W.R., 29
Dehn, M., 31
Desargues, G., 57
Descartes, R., 9
dilatace, 37, 48
- elipsa, 38
Eudoxos, 31
Eukleidés, 7, 11
- Fermat, P., 97
- Gauss, C.F., 8, 97
geometrie
 eukleidovská, 11
 hierarchie —, 10
Gergonne, J.D., 99
Gerwien, P., 19
- Hilbert, D., 7
Hippokratés z Chiu, 96
- Klein, F., 9
Komenský, J.A., 3
- konstrukce
 eukleidovská, 12
 mascheroniovská, 97
 neusis, 98
 steinerovská, 97
kruhová inverze, 49
kvadratura
 kruhu, 96
 mnohoúhelníku, 19
 paraboly, 96
- Lindemann, F., 96
Lobačevský, N.I., 8
- Mascheroni, L., 97
mocnost, 22
Monge, G., 46, 67
- příčka, 73
přímka
 hlavní, 73
 krycí, 70
 spádová, 73
Pappos, 35, 54
Petersen, J., 50
Platón, 31
podobnost, 29
Pohlke, K., 65
poměr
 dělicí, 29
 veličin, 28
postulát
 pátý, dodatečný, o rovnoběžkách, 12, 17
pravidelný
 n -úhelník, 97

- desetiúhelník, 27
- dvacetistěn, 32
- dvanáctistěn, 92
- pětiúhelník, 25–28, 99
- sedmnáctiúhelník, 98

- Quetelet, A., 39

- Riemann, B., 9

- Schwarz, H.A., 65
- shodnost, 43
- souměrnost
 - šikmá, 52
 - osová, 44
 - posunutá, 44
 - středová, 44
- střed
 - potenční, 23
- Steiner, J., 97
- stejnolehlost, 29, 45

- trúba
 - štramberská, 74

- Viète, F., 35

- Wallace, W., 19
- Wantzel, P.L., 97

- Základy, 11

Přikládáme několik příloh:

- (1) nejprve část časové osy z helénistického období podle B. Artmanna [A],
- (2) od str. 115 přehled nejcitovanějších tvrzení ze všech geometrických knih [E]; výběr a zpracování je zásluhou R. Hartshorna [Ha, str. 481–486],
- (3) na str. 121 stručný přehled Hilbertovy axiomatiky [Hi]; převzato z učebního materiálu od neznámého autora,
- (4) na str. 122 přehled Archimédových poloprávidelných těles; převzato z [Ko],
- (5) na str. 123 kolmý axonometrický průmět strojní součástky sestrojený zářezovou metodou; převzato z [U],
- (6) na str. 124 průmět nějakého portálu ve dvojúběžníkové perspektivě,
- (7) na str. 125 příklad cylindrické perspektivy — panoramatický snímek Lorety na Hradčanech; převzato z [DV],

| TIME TABLE (all dates are B.C.E.) | | |
|--|---|--|
| General history, related to mathematics | | Mathematics |
| 900–600 Geometric period of Greek art | | |
| Money is invented (first coins) | 600 | Thales of Miletus (\approx 580) Pythagoras (\approx 570–490) |
| Persian Wars (\approx 500–480) \approx 460 Temple of Zeus in Olympia, Proportions 2 : 1 \approx 450–430 Pericles, “high classics” \approx 440 Parthenon temple in Athens, proportions 9 : 4 = length : breadth = breadth : height Socrates \approx 470–399 Plato 428–348 Aristotle 384–322 Alexander the Great 356–323 | 500 450 400 350 300 | Pythagoreans in southern Italy Hippocrates of Chios writes first <i>Elements</i> \approx 430 Theodorus of Cyrene \approx 460–390 Theaetetus \approx 415–370 Leon writes new <i>Elements</i> in Plato’s Academy Eudoxus \approx 410–355 Various other writers of mathematical treatises, e.g., Menaechmus: <i>Conics</i> Euclid: <i>Elements</i> |
| Alexandria is the cultural center of the Hellenistic world 300–50 | 250 | Apollonius of Perga, Archimedes of Syracuse |

Appendix: Brief Euclid

For reference we include abbreviated statements of the most frequently quoted results from Euclid's *Elements*.

Book I. Definitions

1. A *point* is that which has no part.
2. A *line* is length without breadth.
4. A *straight line* lies evenly with its points.
8. A *plane angle* is the inclination of two lines.
10. When the two adjacent angles are equal it is a *right angle*.
15. A *circle* is a line all of whose points are equidistant from one point.
20. A triangle with two equal sides is *isosceles*.
23. *Parallel* straight lines are lines in the same plane that do not meet, no matter how far extended in either direction.

Postulates

1. To draw a line through two points.
2. To extend a given line.
3. To draw a circle with given center through a given point.
4. All right angles are equal.
5. If a line crossing two other lines makes the interior angles on the same side less than two right angles, then these two lines will meet on that side when extended far enough.

Common Notions

1. Things equal to the same thing are equal.
2. Equals added to equals are equal.

3. Equals subtracted from equals are equal.
4. Things which coincide are equal.
5. The whole is greater than the part.

Propositions

1. To construct an equilateral triangle on a given segment.
2. To draw a segment equal to a given segment at a given point.
3. To cut off a smaller segment from a larger segment.
4. Side–angle–side (SAS) congruence for triangles.
5. The base angles of an isosceles triangle are equal.
6. If the base angles are equal, the triangle is isosceles.
7. It is not possible to put two triangles with equal sides on the same side of a segment.
8. Side–side–side (SSS) congruence for triangles.
9. To bisect an angle.
10. To bisect a segment.
11. To construct a perpendicular to a line at a given point on the line.
12. To drop a perpendicular from a point to a line not containing the point.
13. A line standing on another line makes angles equal to two right angles.
15. Vertical angles are equal.
16. The exterior angle of a triangle is greater than either opposite interior angle.
17. Any two angles of a triangle are less than two right angles.
18. If one side of a triangle is greater than another, then the angle opposite it is greater than the other.
19. If one angle of a triangle is greater than another, then the side opposite it is greater than the other.
20. Any two sides of any triangle are greater than the third.
22. To construct a triangle, given three sides, provided any two are greater than the third.
23. To reproduce a given angle at a given point and side.
24. Two sides equal but included angle greater of two triangles implies base greater.
25. Two sides equal and greater base implies greater angle.
26. Angle–side–angle (ASA) and angle–angle–side (AAS) congruence for triangles.
27. Alternate interior angles equal implies parallel lines.
28. Exterior angle equal to opposite interior, or two interior angles equal to two right angles, implies parallel lines.
29. A line crossing two parallel lines makes alternate interior angles equal.
30. Lines parallel to the same line are parallel.
31. To draw a line parallel to a given line through a given point.
32. Sum of angles of a triangle is two right angles, and exterior angle equals the sum of opposite interior angles.

33. Lines joining endpoints of equal parallel lines are equal and parallel.
34. The opposite sides and angles of a parallelogram are equal.
35. Parallelograms on the same base and in the same parallels are equal.
36. Parallelograms on equal bases in the same parallels are equal.
37. Triangles on the same base in the same parallels are equal.
38. Triangles on equal bases in the same parallels are equal.
39. Equal triangles on the same base on the same side are in the same parallels.
40. Equal triangles on equal bases on the same side are in the same parallels.
41. A parallelogram is twice the triangle on the same base in the same parallels.
42. To construct a parallelogram with a given angle equal to a given triangle.
43. Parallelograms on opposite sides of the diagonal of a parallelogram are equal.
44. To construct a parallelogram with given side and angle equal to a given triangle.
45. To construct a parallelogram with a given angle equal to a given figure.
46. To construct a square on a given segment.
47. (Theorem of Pythagoras) The square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the sides of a right triangle.
48. If the sum of the squares on two sides equals the square on the third side, the triangle is right.

Book II. Propositions

1. The rectangle contained by two lines is the sum of the rectangles contained by one and the segments of the other.
4. The square on the whole line is equal to the squares on its two segments plus twice the rectangle on the two segments.
5. The square on half a line is equal to the rectangle on the unequal segments plus the square of the difference.
6. The rectangle on a line plus an added piece with the added piece, plus the square of half the segment, is equal to the square of the half plus the added piece.
11. To cut a line so that the rectangle on the whole and one segment is equal to the square on the other segment (extreme and mean ratio).
14. To construct a square equal to a given figure.

Book III. Propositions

1. To find the center of a circle.
2. The segment joining two points of a circle lies inside the circle.
5. If two circles intersect, they do not have the same center.
6. If two circles are tangent, they do not have the same center.
10. Two circles can intersect in at most two points.
- 11, 12. If two circles are tangent, their centers lie in a line with the point of tangency.
16. The line perpendicular to a diameter at its end is tangent to the circle, and

the angle between the tangent line and the circle is less than any rectilinear angle.

17. To draw a tangent to a circle from a point outside the circle.
18. A tangent line to a circle is perpendicular to the radius at the point of tangency.
19. The perpendicular to a tangent line at the point of tangency will pass through the center of the circle.
20. The angle at the center is twice the angle at a point of the circumference subtending a given arc of a circle.
21. Two angles from points of a circle subtending the same arc are equal.
22. The opposite angles of a quadrilateral in a circle are equal to two right angles.
31. The angle in a semicircle is a right angle.
32. The angle between a tangent line and a chord of a circle is equal to the angle on the arc cut off.
35. If two chords cut each other, the rectangle on the segments of one chord is equal to the rectangle on the segments of the other chord.
36. From a point outside a circle, let a tangent and a secant line be drawn. Then the square of the tangent line is equal to the rectangle formed by the two segments from the point to the circle on the secant line.
37. From a point outside a circle, if two lines cut the circle, so that the square of one is equal to the rectangle formed by the segments of the other, then the first is a tangent line.

Book IV. Propositions

1. To inscribe a given segment in a circle.
2. To inscribe a triangle, equiangular to a given triangle, in a circle.
3. To circumscribe a triangle, equiangular to a given triangle, around a circle.
4. To inscribe a circle in a triangle.
5. To circumscribe a circle around a triangle.
10. To construct an isosceles triangle whose base angles are twice the vertex angle.
11. To inscribe a regular pentagon in a circle.
12. To circumscribe a regular pentagon around a circle.
15. To inscribe a regular hexagon in a circle.
16. To inscribe a regular 15-sided polygon in a circle.

Book V. Definitions

4. Magnitudes are said to *have a ratio* if either one, being multiplied, can exceed the other.
5. Four magnitudes $a, b; c, d$ are *in the same ratio* if for any whole numbers m, n , we have $ma > nb$ or $ma = nb$ or $ma < nb$ if and only if $mc > nd$ or $mc = nd$ or $mc < nd$ respectively.

Book VI. Propositions

1. Triangles of the same height are in the same ratio as their bases.
2. A line is parallel to the base of a triangle if and only if it cuts the sides proportionately.
3. A line from a vertex of a triangle to the opposite side bisects the angle if and only if it cuts the opposite side in proportion to the remaining sides of the triangle.
4. The sides of equiangular triangles are proportional.
5. If the sides of two triangles are proportional, their angles are equal.
6. If two triangles have one angle equal and the sides containing the angle proportional, the triangles will be similar.
8. The altitude from the right angle of a right triangle divides the triangle into two triangles similar to each other and to the whole.
12. To find a fourth proportional to three given lines.
13. To find a mean proportional between two given lines.
16. Four lines are proportional if and only if the rectangle on the extremes is equal to the rectangle on the means.
30. To cut a line in extreme and mean ratio.
31. Any figure on the hypotenuse of a right triangle is equal to the sum of similar figures on the sides of the triangle.

Book X. Propositions

1. Given two unequal quantities, if one subtracts from the greater a quantity greater than its half, and repeats this process enough times, there will remain a quantity lesser than the smaller of the two original quantities.
117. (not in Heath, but in Commandino). The diagonal of a square is incommensurable with its side.

Book XI. Definitions

25. A *cube* is a polyhedron made of six equal squares.
26. An *octahedron* is a polyhedron made of eight equal equilateral triangles.
27. An *icosahedron* is a polyhedron made by twenty equal equilateral triangles.
28. A *dodecahedron* is a polyhedron made by twelve equal regular pentagons.

Propositions

21. The plane angles in a solid angle make less than four right angles.
28. A parallelepiped is bisected by its diagonal plane.
- 29, 30. Parallelepipeds on the same base and of the same height are equal.
31. Parallelepipeds on equal bases, of the same height, are equal.

Book XII. Propositions

2. Circles are in the same ratio as the squares of their diameters.
3. A pyramid is divided into two pyramids and two prisms.

5. Pyramids of the same height on triangular bases are in the same ratio as their bases.
7. A prism with a triangular base is divided into three equal triangular pyramids.

Book XIII. Propositions

7. If at least three angles of an equilateral pentagon are equal, the pentagon will be regular.
10. In a circle, the square on the side of the inscribed pentagon is equal to the square on the side of the inscribed hexagon plus the square on the side of the inscribed decagon.
13. To inscribe a tetrahedron in a sphere.
14. To inscribe an octahedron in a sphere.
15. To inscribe a cube in a sphere.
16. To inscribe an icosahedron in a sphere.
17. To inscribe a dodecahedron in a sphere.
18. (Postscript). Besides these five figures there is no other contained by equal regular polygons.

Hilbert's Axioms for Plane Geometry

Undefined terms: Point, line, plane, between, congruence.

Connection (Incidence)

- I-1. Through any two distinct points A, B there is always a line m .
- I-2. Through any two distinct points A, B there is not more than one line m .
- I-3. On every line there exist at least two distinct points. There exist at least three points which are not on the same line.
- I-4. Through any three points, not on the same line, there is one and only one plane.

Order

- II-1. If point B is between points A and C , then A, B, C are distinct points on the same line, and B is between C and A .
- II-2. For any two distinct points A and C , there is at least one point B on the line AC such that C is between A and B .
- II-3. If A, B, C are three distinct points on the same line, then only one of the points is between the other two.

Definition By the *segment* AB is meant the set of all points which are between A and B . Points A and B are called the *endpoints* of the segment. The segment AB is the same as the segment BA .

II-4. (Pasch's Axiom) Let A, B, C be three points not all on the same line and let m be a line in the plane A, B, C which does not pass through any of the points A, B, C . Then if m passes through a point of the segment AB , it will also pass through a point of segment AC or a point of segment BC .

Note: II-4'. This postulate may be replaced by the *separation axiom*. A line m separates the points of the plane which are not on m , into two sets such that if two points X and Y are in the same set, the segment XY does not intersect m , and if X and Y are in different sets, the segment XY does intersect m . In the first case X and Y are said to be on the *same side* of m ; in the second case, X and Y are said to be on *opposite sides* of m .

Definition By the *ray* AB is meant the set of all points consisting of those which are between A and B , the point B itself, and all the points C such that B is between A and C . The ray AB is said to *emanate from* the point A .

A point on a given line m , divides m into two rays such that two points are on the same ray if and only if A is not between them.

Definition If A, B and C are three points not on the same line, then the system of three segments AB, BC, CA , and their endpoints is called the *triangle* ABC . The three segments are called the *sides* of the triangle, and the three points are called the *vertices*.

Congruence

III-1. If A and B are distinct points on line m and if A' is a point on line m' (not necessarily distinct from m), there is one and only one point B' on each ray of m' emanating from A' such that the segment $A'B'$ is congruent to the segment AB .

III-2. If two segments are each congruent to a third, then they are congruent to each other. (From this it can be shown that congruence of segments is an equivalence relation; i.e., $AB \equiv AB$; if $AB \equiv A'B'$, then $A'B' \equiv AB$; and if $AB \equiv CD$ and $CD \equiv EF$, then $AB \equiv EF$.)

III-3. If point C is between A and B , and C' is between A' and B' , and if the segment $AC \equiv A'C'$ and the segment $CB \equiv C'B'$, then segment $AB \equiv$ segment $A'B'$.

Definition By an *angle* is meant a point (called the *vertex* of the angle) and two rays (called the *sides* of the angle) emanating from a point.

If the vertex of the angle is point A and if B and C are any two points other than A on the two sides of the angle, we speak of the angle BAC or CAB or simply the angle A .

III-4. If BAC is an angle whose sides do not lie on the same line and if in a given plane, $A'B'$ is a ray emanating from A' , then there is one and only one ray $A'C'$ on a given side of line $A'B'$, such that $\angle B'A'C' \equiv \angle BAC$. In short, a given angle in a given plane can be laid off on a given side of a given ray in one and only one way. Every angle is congruent to itself.

Definition If ABC is a triangle then the three angles $BAC, CBA,$ and ACB are called the angles of the triangle. Angle BAC is said to be *included* by the sides AB and AC .

III-5. If two sides and the included angle of one triangle are congruent, respectively, to two sides and the included angle of another triangle, then each of the remaining angles of the first triangle is congruent to the corresponding angle of the second triangle.

Parallel axiom


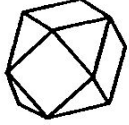
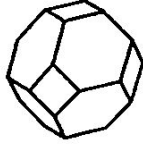
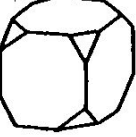
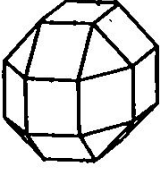

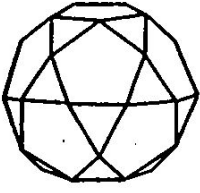
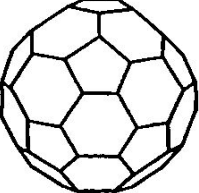
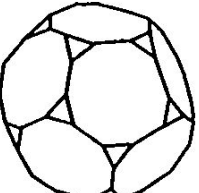
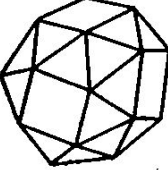
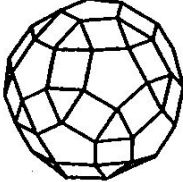
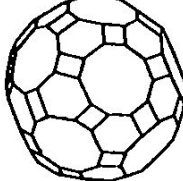
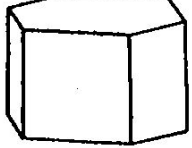
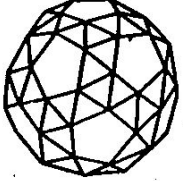
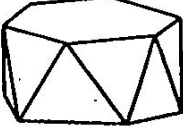
IV-1. (Playfair's postulate) Through a given point A not on a given line m there passes at most one line, which does not intersect m .

Continuity

V-1. (Axiom of Measure—Archimedes axiom) If AB and CD are arbitrary segments, then there exists a number n such that if segment CD is laid off n times on the ray AB starting from A , then a point E is reached, where $n \cdot CD = AE$, and where B is between A and E .

V-2. (Axiom of linear completeness) the system of points on a line with its order and congruence relations cannot be extended in such a way that the relations existing among its elements as well as the basic properties of linear order and congruence resulting from Axioms I-III and V-1 remain valid.

Note: V'. These axioms may be replaced by *Dedekind's axiom of continuity*. For every partition of the points on a line into two nonempty sets such that no point of either lies between two points of the other, there is a point of one set which lies between every other point of that set and every point of the other set.

| | | |
|--|--|--|
| <p style="text-align: right;">4_3b</p>  <p>$v=12, h=18, s=8$ ($4_3, 4_6$)</p> | <p style="text-align: right;">$6_4a, 8_3a$</p>  <p>$v=12, h=24, s=14$ ($8_3, 6_4$)</p> | <p style="text-align: right;">8_3b</p>  <p>$v=24, h=36, s=14$ ($6_4, 8_8$)</p> |
| <p style="text-align: right;">6_4b</p>  <p>$v=24, h=36, s=14$ ($8_3, 6_8$)</p> | <p style="text-align: right;">6_4c</p>  <p>$v=32, h=56, s=26$ ($8_3, 18_4$)</p> | <p style="text-align: right;">6_4c</p>  <p>$v=48, h=72, s=26$ ($12_4, 8_6, 6_8$)</p> |
| <p style="text-align: right;">$12_5a, 20_3a$</p>  <p>$v=30, h=60, s=32$ ($20_3, 12_5$)</p> | <p style="text-align: right;">20_3b</p>  <p>$v=60, h=90, s=32$ ($12_5, 20_6$)</p> | <p style="text-align: right;">12_5b</p>  <p>$v=60, h=90, s=32$ ($20_3, 12_{10}$)</p> |
| <p style="text-align: right;">6_4d</p>  <p>$v=24, h=60, s=38$ ($32_3, 6_4$)</p> | <p style="text-align: right;">12_5c</p>  <p>$v=60, h=120, s=62$ ($20_3, 30_4, 12_5$)</p> | <p style="text-align: right;">12_3c</p>  <p>$v=120, h=180, s=62$ ($30_4, 20_6, 12_{10}$)</p> |
|  <p>$v=12, h=18, s=8$ ($6_4, 2_6$)</p> | <p style="text-align: right;">20_3d</p>  <p>$v=60, h=150, s=92$ ($80_3, 12_5$)</p> |  <p>$v=12, h=24, s=14$ ($12_3, 2_8$)</p> |

