JEDNODUCHÉ ÚROČENÍ A DISKONTOVÁNÍ

Úrok je možné charakterizovat jako ***odměnu za dočasné poskytnutí peněz*** někomu, kdo je momentálně potřebuje. Výše úroku závisí na úrokové sazbě, jejíž výše je ovlivněna mnoha faktory[1]. Z pohledu dlužníka představuje úrok ***cenu za získání úvěru***.

Úroková sazba[2] je ***úrok vyjádřený v procentech*** ze zapůjčeného kapitálu. Úrokovou sazbu uvádíme, není-li uvedeno jinak, za rok. Pokud chceme tuto skutečnost zdůraznit, přidáváme zkratku „p.a." (*z latinského per annum*). V praxi se však mohou vyskytnout i kratší období pro úročení než roční, můžeme se setkat například s pololetní úrokovou sazbou „p.s." (*per semestre*), se čtvrtletní „p.q. (*per quartale*), s měsíční „p.m." (*per mensem*) a s denní „p.d." (*per diem*). Přitom platí, že roční úroková sazba = 2 x pololetní úroková sazba, 4 x čtvrtletní úroková sazba, atd.

Úrokovým obdobím rozumíme časový úsek, za který jsou připisovány úroky. Pro stanovení úrokového období se používají následující standardy:

- ***ACT/365*** (*tj. skutečný počet dnů v měsíci a skutečný počet dnů v roce*) – označuje se jako anglická metoda,
- ***ACT/360*** (*tj. skutečný počet dnů v měsíci a 360 dnů v roce*) – francouzská či mezinárodní metoda,
- ***30E/360*** (*tj. 30 dnů v měsíci a 360 dnů v roce*) – německá či obchodní metoda. Nebude-li uvedeno jinak, bude v příkladech použita právě tato metoda.

Jednotlivé typy úročení můžeme rozdělit podle dvou základních hledisek:

- *podle úročení úroků a*
- *podle doby, kdy dochází k placení úroků.*

Jestliže se vyplácené úroky k původnímu kapitálu nepřičítají a dále se neúročí, hovoříme o ***jednoduchém úročení***. Jinými slovy řečeno, úroky se počítají stále ze stejného (*původního)* kapitálu. Jednoduché úročení se využívá především při krátkodobých záležitostech, tj. kdy doba úročení nepřesahuje jedno úrokové období. Pokud se úroky připisují k vloženému

---

[1] Jedná se například o míru inflace, míru zisku, stupeň rizika nebo dobu, na kterou je kapitál poskytnut.

[2] Úroková sazba se někdy ztotožňuje s pojmem úroková míra. Úrokovou míru je však možné chápat jako určitý průměr existujících úrokových sazeb v rámci finančního trhu.

kapitálu a spolu s ním se dále úročí (*počítají se „úroky z úroků“)* hovoříme o ***složeném úročení***.

Úročení, při kterém jsou úroky z vložené, resp. půjčené částky vypláceny na konci úrokového období označujeme jako ***polhůtní***. Dochází-li k placení úroků na začátku úrokového období[3] označujeme toto úročení jako ***předlhůtní***. Při výpočtech se standardně používá, pokud není uvedeno jinak, úročení polhůtní.

ZÁKLADNÍ ROVNICE PRO JEDNODUCHÉ ÚROČENÍ

Hlavní znak jednoduchého úročení spočívá v tom, že úroky ***se v průběhu úročení nepřičítají k počátečnímu kapitálu a dále se neúročí***. Výše úroku *(u)* je dána vzorcem:

$$u = K_0 \cdot i \cdot n, \quad (1\text{-}1)$$

kde K_0 je počáteční (*současná*) hodnota kapitálu,
i je úroková sazba ve tvaru indexu[4],
n je úrokové období, resp. doba splatnosti kapitálu.

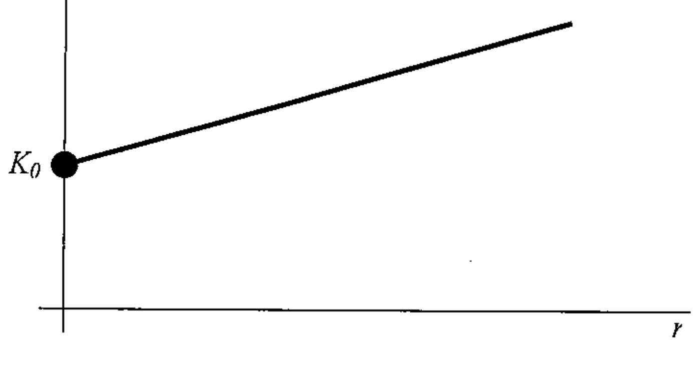
Hodnotu zúročeného (*splatného*) kapitálu (K_n) lze vyjádřit vzorcem:

$$K_n = K_0 + u. \quad (1\text{-}2)$$

Dosadíme-li do tohoto výrazu vzorec (1-1), dostáváme:

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot i \cdot n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n). \quad (1\text{-}3)$$

Ze vzorce (1-3) vyplývá, že hodnota zúročeného kapitálu roste během doby splatnosti ***lineárně***. Výše splatného kapitálu při jednoduchém úročení je znázorněna na následujícím obrázku.



Obrázek č. 1: Výše splatného kapitálu při jednoduchém úročení

[3] Používá se například při diskontu.
[4] Tj. ve tvaru desetinného čísla; i = p /100, kde *p* je roční úroková sazba v procentech.

Je třeba si uvědomit, že ***úrokové období a úroková sazba musejí být vždy vztaženy ke stejnému časovému období***, tj. pokud je úroková sazba roční (*p.a.*), úrokové období musí být vyjádřeno v letech. Pokud by bylo v daném případě úrokové období zadáno např. ve dnech, musíme ho přepočítat na roky[5].

Příklad č. 1 *Výpočet vkladu za dané období*

Jaká bude výše vkladu 25.000 Kč za osm měsíců při úrokové sazbě 3 % p.a.?

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n) \;=\; 25000 \cdot (1 + 0{,}03 \cdot \frac{8}{12}) = 25500$$

Výše vkladu bude po osmi měsících činit 25.500 Kč.

Ze základní rovnice pro jednoduché úročení (1-3) můžeme vypočítat kteroukoli z výše uvedených veličin. ***Počáteční kapitál*** lze vyjádřit jako:

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + i \cdot n} = \frac{u}{i \cdot n}. \quad (1\text{-}4)$$

Doba splatnosti a ***úroková sazba*** jsou dány vzorci:

$$n = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot i} = \frac{u}{K_0 \cdot i}, \quad (1\text{-}5),$$

$$i = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot n} = \frac{u}{K_0 \cdot n}. \quad (1\text{-}6).$$

Příklad č. 2 *Výpočet počáteční výše kapitálu*

Jaký počáteční vklad uložíte na účet v bance v případě, že bude úročen úrokovou sazbou 4,5 % p.a. a za tři měsíce budete potřebovat kapitál ve výši 10.000 Kč?

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + i \cdot n} = \frac{10.000}{1 + 0{,}045 \cdot \frac{3}{12}} = 9.889 Kč$$

Je třeba uložit 9.889 Kč.

Příklad č. 3 *Výpočet počáteční výše kapitálu*

Jak velký počáteční vklad vzroste při 7 % úrokové sazbě p.a. od 10. října do 12. prosince o 1.700 Kč?

[5] Můžeme též přepočítat roční úrokovou sazbu na sazbu denní.

$$K_0 = \frac{u}{i \cdot n} = \frac{1700}{0{,}07 \cdot \frac{62}{360}} = 141014$$

Výše počátečního kapitálu činí 141.014 Kč.

***Příklad č. 4** Výpočet doby splatnosti*

Po jakou dobu byl uložen vklad ve výši 4.500 Kč, jestliže vrostl při úrokové sazbě 4 % p.a. připsáním úroků na konci roku na 4.590 Kč?

$$n = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot i} = \frac{90}{4500 \cdot 0{,}04} = 0{,}5$$

Vklad byl uložen po dobu půl roku.

SLOŽENÉ ÚROČENÍ

Při složeném úročení jsou ***úroky připisovány k počátečnímu kapitálu a spolu s ním se dále úročí.*** Složené úročení je možné, stejně jako jednoduché, rozdělit, podle toho, kdy se platí úrok, na složené úročení předlhůtní a polhůtní. Vzhledem k tomu, že nejsou známy aplikace složeného předlhůtního úročení, nebudeme se jím zabývat.

ZÁKLADNÍ ROVNICE PRO SLOŽENÉ ÚROČENÍ

Základní rovnici pro složené úročení můžeme napsat ve tvaru:

$$\boldsymbol{K_n = K_0 \cdot (1+i)^n}, \quad (2\text{-}1)$$

kde K_n je hodnota zúročeného kapitálu, resp. budoucí hodnota kapitálu,

K_0 je počáteční hodnota kapitálu, resp. současná hodnota kapitálu,

i je úroková sazba ve tvaru indexu,

n je doba splatnosti kapitálu.

Ze vzorce (2-1) vyplývá, že hodnota zúročeného kapitálu roste během doby splatnosti ***exponenciálně***. Výše splatného kapitálu při složeném úročení je znázorněna na následujícím obrázku. Pokud porovnáme jednoduché a složené úročení, lze říci, že ***jednoduché úročení je výhodnější do doby splatnosti která nepřesahuje jedno úrokové období*** ($n < 1$). Pro $n = 1$ je hodnota zúročeného kapitálu stejná jak při jednoduchém, tak při složeném úročení. Pro $n > 1$ je výhodnější úročení složené.

Příklad č. 1 *Budoucí hodnota kapitálu*

Jaká bude budoucí hodnota kapitálu ve výši 100.000 Kč při složeném úročení za 5 let pokud úrokové období je roční a úroková sazba činí 4 % p.a.?

FV = PV

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n = 100000 \cdot (1+0{,}04)^5 = 121.665 Kč$$

Za pět let budeme mít k dispozici 121.665 Kč.

Výraz (2-1) lze použít v případě, že úrokové období a úroková sazba odpovídají stejnému časovému období[1]. V praxi se však často setkáváme s případem, že úrokové období je kratší než období pro které je stanovena úroková sazba. Například sazba je uvedena jako roční

[1] Například roční úrokové období a sazba p.a. nebo čtvrtletní úrokové období a sazba p.q.

(*p.a.*), ale výplata nebo připisování úroků probíhá častěji než jedenkrát za rok. To znamená, že úrokové období není roční, ale například pololetní, čtvrtletní nebo měsíční. V daném případě je třeba rozšířit vzorec (2-1) o proměnnou *m*, kterou můžeme obecně definovat jako ***počet úrokových období za období, pro které je stanovena úroková sazba***[2]:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^{n \cdot m}. \quad (2\text{-}2)$$

Příklad č. *2 Budoucí hodnota kapitálu při složeném úročení*

Uložili jsme částku 150.000 Kč. Jaká bude konečná výše vkladu za tři roky při složeném úročení polhůtním, jestliže úroková sazba činí 5 % p.a. a úrokové období je:

a) roční,

b) čtvrtletní?

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n = 150000 \cdot (1 + 0{,}05)^3 = 173643{,}75$$

$$K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^{n \cdot m} = 150000 \cdot (1 + \frac{0{,}05}{4})^{3 \cdot 4} = 174.113$$

173954 - *pololetní*

V případě ročního úročení bude výše vkladu po třech letech činit 173.643,75 Kč, v případě čtvrtletního úročení 174.113 Kč. Z příkladu 2.1 vidíme, že čím častěji se úroky připisují, tím větší kapitál vlastníme. ***Častější připisování úroků***[3] ***je tedy pro vkladatele výhodnější.***

Ze základního vzorce pro složené úročení (2-1) můžeme opět vypočítat ostatní veličiny, tj. počáteční hodnotu kapitálu (K_0), dobu splatnosti (n) a úrokovou sazbu (i):

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + i)^n}, \quad (2\text{-}3)$$

$$n = \frac{ln(\frac{K_n}{K_0})}{ln(1 + i)}, \quad (2\text{-}4)$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1. \quad (2\text{-}5)$$

[2] Pokud bychom například uvažovali o roční úrokové sazbě (p.a.) a čtvrtletním splácení, bude $m = 4$. Pokud však budeme splácet měsíčně, za m dosadíme hodnotu = 12.

[3] Za jinak stejných podmínek.

***Příklad č.** 3 Současná hodnota vkladu*

Kolik musíme uložit na termínovaný vklad, abychom na konci pátého roku měli naspořeno 20.000 Kč při složeném úročení 4 % p.a. a ročním připisování úroků?

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = \frac{20000}{(1+0{,}04)^5} = 16438{,}54$$

Musíme uložit 16.438,54 Kč.

***Příklad č.** 4 Výpočet doby splatnosti*

Určete dobu uložení kapitálu 100.000 Kč, pokud víte, že úroková sazba činila 4,5 % p.a. při ročním složeném úročení a v době splatnosti bylo vyplaceno 114.116 Kč.

$$n = \frac{ln(\frac{K_n}{K_0})}{ln(1+i)} = \frac{ln(\frac{114116}{100000})}{ln(1+0{,}045)} = 3$$

Doba uložení kapitálu byla tři roky.

***Příklad č.** 5 Výpočet úrokové sazby*

Jaká byla úroková sazba, jestliže částka 20.000 Kč vzrostla za čtyři roky na 27.400 Kč? Ročně připisované úroky byly ponechány na účtu a dále úročeny.

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 = \sqrt[4]{\frac{27400}{20000}} - 1 = 0{,}08188$$

SPOŘENÍ

Spořením rozumíme ***proces, během kterého ukládáme na účet v pravidelných intervalech konstantní peněžní částku s cílem dosažení určité koncové částky***[1]. Jednotlivé typy spoření lze rozdělit:

1) podle délky spoření na:
   - ***krátkodobé*** *(doba spoření nepřesahuje jedno úrokové období),*
   - ***dlouhodobé*** *(doba spoření je delší než jedno úrokové období),*
2) podle okamžiku uložení spořené částky na:
   - ***předlhůtní*** (*spořená částka je ukládána na začátku úrokového období*),
   - ***polhůtní*** (*spořená částka je ukládána na konci úrokového období*).

KRÁTKODOBÉ SPOŘENÍ

Výchozí podmínky pro krátkodobé spoření jsou následující:

- spoříme jedno úrokové období a méně,
- spoříme *m-krát* za úrokové období částku x. Podle toho, zda ukládáme tuto částku na začátku *m-tiny* období nebo na jejím konci, rozlišujeme spoření ***předlhůtní*** a ***polhůtní***,
- naším cílem je naspořit částku S_x.
- jednotlivé úložky jsou úročeny na základě jednoduchého úročení a úroky jsou připisovány na konci úrokového období.

KRÁTKODOBÉ SPOŘENÍ PŘEDLHŮTNÍ

U krátkodobého spoření předlhůtního ukládáme částku vždy na počátku určitého období (*měsíce, čtvrtletní apod.*). Naspořenou částku S_x vypočítáme dle vzorce:

$$S_x = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i), \quad (3\text{-}1)$$

kde m je počet úložek za úrokové období,

x je výše úložky,

i je úroková sazba ve tvaru indexu.

***Příklad č.** 1 Celková naspořená částka*

Kolik uspoříme za jeden rok, ukládáme-li vždy na počátku měsíce částku 2.000 Kč, při úrokové sazbě 3 % p.a.?

$$S_x = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i) = 12 \cdot 2000 \cdot (1 + \frac{12+1}{2 \cdot 12} \cdot 0{,}03) = 24390$$

Celková naspořená částka za jeden rok bude činit 24.390 Kč.

***Příklad č.** 2 Výše pravidelné měsíční úložky*

Kolik musíme uložit na počátku každého měsíce, abychom za rok našetřili 100.000 Kč při roční úrokové sazbě 5 %?

$$S_x = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i) \Rightarrow x = \frac{S_x}{m \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i)} = \frac{100000}{12 \cdot (1 + \frac{13}{24} \cdot 0{,}05)} = 8113{,}60$$

Měsíční úložka musí za daných podmínek činit 8.113,60 Kč.

KRÁTKODOBÉ SPOŘENÍ POLHŮTNÍ

U krátkodobého spoření polhůtního spoříme částku vždy na konci určitého období. Oproti spoření předlhůtnímu je počet úrokových období o jedno nižší. Poslední úložka není úročena a neplyne z ní tedy žádný úrok. Naspořenou částku u krátkodobého spoření polhůtního vypočítáme dle vzorce:

$$\boldsymbol{S_x = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i)}. \quad (3\text{-}2)$$

***Příklad č.** 3 Celková naspořená částka*

Kolik uspoříme za jeden rok, ukládáme-li na konci každého měsíce částku 2.000 Kč při úrokové sazbě 3 % p.a.?

$$S_x = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i) = 12 \cdot 2000 \cdot (1 + \frac{12-1}{2 \cdot 12} \cdot 0{,}03) = 24330$$

Budeme-li spořit koncem měsíce, celková uspořená částka bude činit 24.330 Kč. Porovnáme-li výsledek s příkladem 3.1, je naspořená částka nižší o 60 Kč, které představují roční úrok[2] z první (*lednové*) splátky v případě předlhůtního úročení.

---

[1] Některé typy spoření, například stavební, připouštějí i jednorázové vklady v různé výši.

DLOUHODOBÉ SPOŘENÍ

Výchozí podmínky pro dlouhodobé spoření jsou následující:

- spoříme několik (n) úrokových období,
- spoříme jednou za úrokové období částku a. Podle toho, zda ukládáme tuto částku na začátku či na konci úrokového období, rozlišujeme, podobně jako u krátkodobého spoření, spoření předlhůtní a polhůtní,
- naším cílem je naspořit cílovou částku S,
- jednotlivé úložky jsou úročeny na základě složeného úročení (*k naspořené částce se tedy připočítávají úroky a dále pak úroky z úroků*). Úroky jsou připisovány na konci úrokového období.

DLOUHODOBÉ SPOŘENÍ PŘEDLHŮTNÍ

U dlouhodobého spoření předlhůtního ukládáme částku vždy na počátku každého období. Naspořenou částku S vypočítáme dle vzorce:

$$\boldsymbol{S = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}, \quad (3\text{-}3)$$

kde a je výše úložky,

i je úroková sazba ve tvaru indexu,

n je počet úrokových období.

Příklad č. 4 *Naspořená částka*

Kolik uspoříme za tři roky, budeme-li ukládat na počátku každého z nich 15.000 Kč při roční úrokové sazbě 5,5 %? Uvažujme o ročním připisování úroků.

$$S = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 15000 \cdot (1+0{,}055) \cdot \frac{(1+0{,}055)^3 - 1}{0{,}055} = 50134$$

Za daných podmínek uspoříme 50.134 Kč.

DLOUHODOBÉ SPOŘENÍ POLHŮTNÍ

Ukládáme-li částky na konci úrokového období, hovoříme o spoření polhůtním. Základní rovnice pro dlouhodobé spoření polhůtní je:

---

[2] $0{,}03 \cdot 2000 = 60$