

Fyzikální pole a Maxwellovy rovnice

Tomáš Milěš

27. února 2006

Obsah

1	Základní vztahy a operátory	1
2	Pole a jeho vlastnosti	2
3	Maxwellovy rovnice	3
3.1	Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru	3
3.2	Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru	3

1 Základní vztahy a operátory

Hamiltonův vektorový operátor nabra

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1)$$

Použití operátoru nabra

$$\nabla\varphi = \text{grad } \varphi = \text{vektor} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{a} = \text{div } \vec{a} = \text{skalár} \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{a} = \text{rot } \vec{a} = \text{vektor} \quad (4)$$

Výpočet gradientu a jeho velikosti

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k} \quad (5)$$

$$|\text{grad } \varphi| = \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

Divergence vektorového pole

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (7)$$

Rotace vektorového pole

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \quad (8)$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{i} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \quad (9)$$

Cirkulace vektorového pole

$$\oint_l \vec{a} \, d\vec{l} = \oint_l (a_x \, dx + a_y \, dy + a_z \, dz) \quad (10)$$

Tok vektorového pole

$$\iint_S \vec{a} \, d\vec{S} = \iint_S \vec{a} (a_x \, dS_x + a_y \, dS_y + a_z \, dS_z) \quad (11)$$

Stokesova věta

$$\oint_l \vec{a} \, d\vec{l} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{a} \, d\vec{S} \quad (12)$$

Gaussova věta

$$\oiint_S \vec{a} \, d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} \, dV \quad (13)$$

2 Pole a jeho vlastnosti

Pole je jakákoliv fyzikální veličina, která nabývá různé hodnoty v různých bodech v prostoru. Příkladem *skalárního pole* je teplota, a zapisuje se $T(x, y, z)$, resp. $T(x, y, z, t)$. Příkladem *vektorového pole* je „rychlostní pole“ tekoucí kapaliny, značí se $v(x, y, z, t)$.

Pole lze popsat několika diferenciálními rovnicemi. Pro názornost lze pole zobrazit pomocí siločar, jde však o hrubé zjednodušení.

Potenciál lze zobrazit *ekvipotenciálními plochami* (hladinami). Elektrické pole je gradientem potenciálu. *Gradient* udává směr nejrychlejší změny potenciálu, a proto je kolmý na ekvipotenciální plochu (v každém bodě). V případě osamocené náboje jsou ekvipotenciálními plochami kulové plochy se středem v náboji.

Jsou-li v jakékoliv situaci dány proudy a náboje, můžeme najít potenciály a derivovat je, čímž dostaneme vektorové pole.

Základní rozdělení polí

- Skalární a vektorové
- Homogenní a nehomogenní

- Vírové a nevírové
- Zřídlové a nezřídlové

U elektromagnetického pole lze použít dělení na:

- Pole statické – náboje jsou v klidu a proudy nulové
- Pole stacionární – náboje se pohybují konstantní rychlostí, tj. Pole stejnosměrných proudů
- Pole kvazistacionární – časově proměnné pole ve vodičích (lze zanedbat posuvné proudy, ale je třeba respektovat proudy vodivé)
- Pole kvazistatické - časově proměnné pole nízkých kmitočtů ve slabě vodivém prostředí (lze zanedbat vírové elektrické pole od proudů)

3 Maxwellovy rovnice

3.1 Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (14)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (15)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (16)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (17)$$

3.2 Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \quad (18)$$

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \vec{j} + \iint_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \quad (19)$$

$$\oiint_s \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \rho dV \quad (20)$$

$$\oiint_s \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (21)$$