

KONSTRUKČNÍ GEOMETRIE

MA2BP_PKG, jaro 2014

(aktualizováno 19. května 2014)

Předmluva

Omnia sponte fluant, absit violentia rebus!

J.A.K.

Toto je průvodce přednáškou z Konstrukční geometrie pro jarní semestr 2014. První motivace, předpoklady a cíle tohoto kurzu jsou zformulovány v úvodní kapitole. Probíraná látka je rozčleněna do tří hlavních bloků: klasická konstrukční geometrie, přehled užitečných geometrických zobrazení a úvod do zobrazovacích metod.

Z dostupných učebnic nejčastěji používáme [A] a [Ha], a to zejména v první části. Jedná se o moderní interpretace zásadního díla [E], jehož český překlad s komentáři [E_V] lze najít ve všech knihovnách a mnoha knihkupectvích. Další dostupné zdroje, ze kterých čerpáme, jsou knihy [Ku, Ku₂]. K úvodu do zobrazovacích metod používáme [Me, U] a [Ř]. K samostatnému studiu doporučujeme celkem přístupný text [L] a velmi stručné, o to však poučnější, pojednání [Ha₂].

Předmět je zakončen zkouškou, jež sestává z písemné a ústní části; přístup k písemné části je podmíněn zápočtem ze cvičení, přístup k ústní zkoušce je podmíněn alespoň 50% úspěšností u písemky.

Organizace tohoto materiálu je provizorní a během semestru se může měnit; sledujte změny v aktualizacích.

Brno, 19. května 2014

Vojtěch Žádník

I Úvod	9
1 Eukleidovská a neeukleidovská geometrie	9
2 Různá pojetí geometrie	10
2.1 Stanovisko axiomatické	10
2.2 Stanovisko syntetické	10
2.3 Stanovisko analytické	10
2.4 Stanovisko transformační	11
2.5 Stanovisko diferenciální	11
3 Předpoklady a cíle	11
II Klasická konstrukční geometrie	13
4 Základy	13
4.1 Axiómy a postuláty	13
4.2 Přehled	14
4.3 Cvičení	16
4.4 Postulát o rovnoběžkách	16
4.5 Cvičení	19
4.6 Kvadratura mnohoúhelníku	19
4.7 Cvičení	22
4.8 Geometrická algebra	22
4.9 Zlatý řez	23
4.10 Cvičení	25
4.11 Kosinová věta	25
4.12 O kružnicích	26
4.13 Cvičení	30
4.14 Pravidelný pětiúhelník	31
4.15 Cvičení	33
4.16 Teorie podobnosti	34
4.17 Cvičení	36
4.18 Sestrojitelné veličiny	36
4.19 Cvičení	38
4.20 Trocha stereometrie, objemy těles a obsah kruhu	38

4.21	Platónská tělesa	41
4.22	Cvičení	45
5	Úloha Apollóniova a úlohy příbuzné	45
5.1	Pomocné konstrukce a postřehy	46
5.2	Nejjednodušší případy	47
5.3	Mírná zobecnění	50
5.4	Další zobecnění a výhled	52
5.5	Cvičení	52
6	Kuželosečky	52
6.1	Elipsa	53
6.2	Další vlastnosti a pojmy	56
6.3	Ostatní kuželosečky	56
7	Co ještě v Základech není	56
7.1	Hippokratovy půlměsíce	57
7.2	Archimédova pojednání o kruhu a kouli	57
7.3	Apollóniova kružnice	58
7.4	Ptolemaiova věta	58
7.5	Menelaova věta	59
7.6	Věta o průsečíku výšek a Eulerova přímka	59
8	Typické úlohy	60
8.1	Kvadratura mnohoúhelníku	60
8.2	Sestrojitelné veličiny	60
8.3	Podobnosti	61
8.4	O kružnicích	61

III Geometrická zobrazení 65

9	Panoptikum geometrických zobrazení	65
9.1	Shodnosti	65
9.2	Cvičení	67
9.3	Podobnosti	68
9.4	Cvičení	71
9.5	Kruhová inverze	72
9.6	Cvičení	75
9.7	Dilatace	76
9.8	Cvičení	77
9.9	Afinní zobrazení	77
9.10	Cvičení	82
9.11	Projektivní zobrazení	83
9.12	Cvičení	89
10	Přehledy a poznámky	90
10.1	Hierarchie geometrických zobrazení	90
10.2	Základní transformace v rovině	91
10.3	Desarguesova věta	92
10.4	Projektivní obraz kružnice	93
11	Typické úlohy	93
11.1	Opět úloha Apollóniova	93
11.2	Obraz pravidelného mnohoúhelníku	94
11.3	Obraz hranolu a hranatých těles	95
11.4	Řez hranolu a jehlanu	96

11.5	Úlohy s kuželosečkami	97
IV	Zobrazovací metody	101
12	Úvod	101
12.1	Základní úlohy	101
12.2	Výhled	102
13	Volné promítání	103
13.1	O určenosti volného promítání	103
13.2	Zobrazení bodu	103
13.3	Průnik přímky a roviny	104
13.4	Cvičení	106
14	Mongeovo promítání	106
14.1	Zobrazení bodu, přímky a roviny	107
14.2	Polohové úlohy	109
14.3	Cvičení	113
14.4	Metrické úlohy	114
14.5	Cvičení	118
15	Kótované promítání	119
16	Axonometrie a kosoúhlé promítání	119
16.1	Kolmá axonometrie	120
16.2	Šikmá axonometrie	122
16.3	Kosoúhlé promítání	124
16.4	Cvičení	124
17	Perspektiva	125
17.1	Lineární perspektiva	126
17.2	Stereoskopie a anaglyfy	127
17.3	Nelineární perspektiva	128
18	Cyklografie	129
19	Typické úlohy	130
19.1	Otáčení roviny	130
19.2	Řezy hranatých těles	131
19.3	Zobrazení Platónských těles	134
19.4	Zobrazení oblých těles	136
19.5	Další	137
V	Dodatky	141
20	K eukleidovským konstrukcím	141
20.1	Slavné problémy starověku	141
20.2	Mascheroniovské a steinerovské konstrukce	143
20.3	Konstrukce s označeným pravítkem	143
21	K úlohám Apollóniovým	144
21.1	Řešení pomocí vhodných transformací	144
21.2	Řešení Gergonnovo	145
21.3	Řešení pomocí geometrických míst	146
21.4	Řešení pomocí cyklografie	147
	Literatura	149
	Rejstřík	153

1 Eukleidovská a neeukleidovská geometrie

Eukleidovskou geometrií se tradičně myslí geometrie tak, jak je představena v Eukleidových Základech [E] (cca 300 př. K.), resp. v jejích geometrických knihách. Jedná se o ucelený deduktivní výklad odvozený z několika axiómů a postulátů. Axiómy se týkají obecných veličin. Postuláty jsou ryze geometrického charakteru a vymezují vztahy mezi primitivními pojmy (bod, přímka) a základními relacemi (**incidence**, **shodnost** a **rovnoběžnost**). V Základech se však používá několik dalších předpokladů, aniž by byly jakkoli formulovány (viz axiomy **uspořádání** a **spojitosti**). Přesný axiomatický popis, založený na tom Eukleidově, pochází od D. Hilberta [Hi] (kolem 1900), viz též [Ha, L] nebo přílohu na str. 163.



Obrázek 1.1: [Ko] Miniatura Eukleida ze 6. století.

Už na první pohled je patrné, že jedny z klíčových rolí v Eukleidově geometrii hrají relace shodnosti a rovnoběžnosti. Uvědomte si, že v Eukleidově pojetí je shodnost docela abstraktní koncept; zejména (z pochopitelných důvodů) nepředstavuje žádné číselné vyjadřování délek úseček, velikostí úhlů apod.! Rovnoběžnost úzce souvisí s postulátem, který je v našem značení pátý a který je v rámci Eukleidova systému ekvivalentní s tvrzením, že „každým bodem ke každé přímce prochází jediná rovnoběžka“. Právě diskuze nad původní Eukleidovou formulací měla dalekosáhlé důsledky a vedla k vynálezu *neeukleidovských* geometrií.

Velmi hrubě řečeno, eukleidovská geometrie je založena zejména na relacích shodnosti a rovnoběžnosti. Uvažujeme-li geometrii s relací rovnoběžnosti, aniž bychom užívali shodnosti, jsme na stopě *afinní* geometrii, o které se několikrát zmiňujeme níže. Naopak, neuvažujeme-li rovnoběžnost, pouze shodnost, dospějeme ke geometriím neeukleidovským. Tyto jsou dvojího typu:

- *eliptická* — „žádné rovnoběžky“,
- *hyperbolická* — „více rovnoběžek“ (k jedné přímce jdoucí daným bodem).

Níže naznačíme, proč eliptický případ není kompatibilní s axiomy uspořádání (což je také důvod, proč se nejdříve přišlo na geometrii hyperbolickou). V tomto smyslu má eliptická geometrie velmi blízko ke geometrii *projektivní*, o níž si také něco řekneme. Právě tyto objevy a úplné porozumění neeukleidovským geometriím (kolem 1830) představují jedno z nejzajímavějších dobrodružství v historii matematiky; důležitá jména, která se v této souvislosti připomínají, jsou zejména J. Bolyai, N.I. Lobačevský a C.F. Gauss. Přestože je tato látka zajímavá také z konstrukčního hlediska, nebudeme se jí v tomto kurzu vůbec zabývat. Hezký úvod a další odkazy lze najít např. v [Ha] nebo [D].

2 Různá pojetí geometrie

V této podkapitole se zmíníme o různém pojetí geometrie podle použité metody (tedy nikoli podle objektu našich úvah nebo zájmů). Z naznačených možností budeme v tomto kurzu prosazovat zejména postoj syntetický a transformační.

2.1 Stanovisko axiomatické

Tento postoj je představen již v Základech a netýká se samozřejmě pouze geometrie. Ukázkou axiomatického přístupu ke geometrii v moderní a úplné podobě jsou Hilbertovy axiomy [Hi]. V této souvislosti se rozlišuje mezi axiomatickou teorií a jejím **modelem**. Je sice pravda, že v případě eukleidovské geometrie jsou všechny modely „stejně“, nicméně formálně je třeba rozlišovat. Např. to, co běžně nazýváme standardní eukleidovskou rovinou, je jen standardním modelem axiomatické teorie popsané axiomy na str. 163.

V této souvislosti je vhodné se alespoň zamyslet nad možnou axiomatizací afinní a projektivní geometrie, o nichž se zmiňujeme níže.

2.2 Stanovisko syntetické

Až do 17.–18. století to byl v podstatě výhradní přístup ke geometrii. Syntetickou geometrií se myslí geometrie **bez souřadnic** nebo, poněkud úžeji, geometrie konstrukční. Tato metoda má jistá omezení: Jednak existují úlohy, které nejsou konstrukčně řešitelné, viz např. dodatek 20.1 pojednávající o proslulých geometrických problémech starověku. Jednak při konstrukcích pozorujeme značný rozdíl mezi úlohami v rovině a v prostoru, viz např. konstrukce (průmětů) pravidelných mnohostěnů.

2.3 Stanovisko analytické

Můžeme stručně charakterizovat jako stanovisko početní, obvykle je míněno počítání v souřadnicích. Počátky analytické geometrie jsou tradičně spojovány se jménem R. Descarta (kolem 1637), mělo by však být zřejmé, že se nemohlo jednat o analytickou geometrii, jak ji chápeme dnes!¹

¹V té době stále nebyla vynalezena reálná čísla...

Nicméně Descartovou inovací byla aplikace **algebry** k řešení geometrických úloh. Ve starší literatuře je často analytická geometrie jmenována jako algebraická, tento přívlastek má však dnes poněkud posunutý význam.

2.4 Stanovisko transformační

Všechny shodnosti eukleidovské roviny tvoří grupu. Tato je podgrupou grupy afinních transformací, jež je zase podgrupou grupy projektivních transformací atd. Stanovisko transformační, neboli Kleinovo, je založeno právě na pojmu **transformační grupy**. Tento postoj velmi pomáhá při organizaci geometrických informací a od své přesné formulace (1872) velmi ovlivnil další vývoj geometrie. Podle F. Kleina je ta či ona geometrie zcela charakterizována grupou odpovídajících geometrických transformací. V tomto duchu je geometrie studiem vztahů a vlastností, které jsou invariantní vzhledem k působení nějaké transformační grupy.

2.5 Stanovisko diferenciální

Toto pojetí je spojováno s B. Riemannem (okolo 1854) a dovoluje opravdu dalekosáhlá zobecnění. Zde je geometrie určena **infinitesimalně** tzv. Riemannovou metrikou. V tomto duchu jsou eukleidovské prostory Riemannovými prostory s „nulovou křivostí“, zatímco eliptické a hyperbolické prostory jsou Riemannovy prostory s nenulovou, ale „konstantní křivostí“. Tento přístup je nezbytný např. při studiu vlastností některých kartografických zobrazení.

3 Předpoklady a cíle

Kromě obvyklého přehledu školské geometrie nepředpokládáme žádné speciální znalosti a dovednosti. Hlavním předpokladem k uspokojivému absolvování tohoto kurzu by měla být schopnost zorganizovat a potřeba vysvětlovat vybrané geometrické poznatky, jejich návaznosti a konstrukční uplatnění. S tím samozřejmě souvisí přiměřená schopnost manipulace s (eukleidovským) pravítkem a kružítkem.

Celý kurz začínáme přehledem konstrukčně zajímavých témat z Eukleidových Základů (podkap. 4). Ty jsou veskrze planimetrové; ze stereometrických úloh se soustředíme na konstrukce pravidelných konvexních mnohoúhelnů, jimiž tato část vrcholí. Z klasické konstrukční geometrie, která není zastoupena v Základech, vybíráme Apollóniovu úlohu a úlohy příbuzné (podkap. 5). Při řešení těchto úloh se s úspěchem používá geometrických zobrazení, ke kterým se vracíme v samostatné kapitole (kap. III). Nejobecnější studovanou skupinou zobrazení budou zobrazení afinní a projektivní. S těmito závěry vstoupíme do poslední kapitoly, v níž diskutujeme problémy spojené se zobrazováním trojrozměrného prostoru do roviny. Představíme několik základních metod tak, abychom byli schopni věrně zobrazit jakýkoli prostorový objekt, zejména tedy objekt krásný (viz např. obr. 3.2).

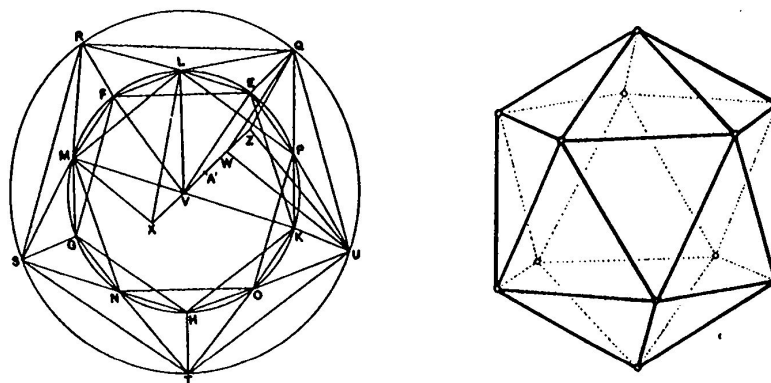
Typické úlohy, které bychom na konci semestru měli umět řešit, zahrnují např.:

- sestrojiti zlatý řez dané úsečky,
- sestrojiti pravidelný pětiúhelník a další pravidelné mnohoúhelníky,
- pro daný mnohoúhelník sestrojiti čtverec se stejným obsahem,
- sestrojiti kružnici, která se dotýká tří daných kružnic, resp. přímkou nebo bodů,
- charakterizovat základní transformace v rovině a umět je konstrukčně použít,

- sestrojít obraz libovolného bodu vzhledem k obecnému projektivnímu, resp. afinnímu zobrazení,
- sestrojít obecný průmět pravidelného mnohostěnu či jiného tělesa,
- sestrojít průnik přímky s rovinou, průsečnici dvou rovin apod.,
- sestrojít řez roviny s tělesem a zobrazit tento řez ve skutečné velikosti,
- určit vzdálenost bodu od přímky, resp. roviny,
- apod.

Při konstrukcích rozlišujeme mezi rýsovací a myšlenkovou přesností — ta první zůstane naším nesplněným snem, na té druhé trváme!

Kromě toho bychom měli umět pojmenovat všechny typy geometrických zobrazení, které při rozličných konstrukcích používáme, a hlavně je klasifikovat v duchu odst. 2.4 (přehled všech diskutovaných skupin lze najít v odst. 10.1).



Obrázek 3.2: [A] Průmět pravidelného dvacetistěnu v Základech a ve volném rovnoběžném promítání.

V této kapitole začneme se skutečnou klasikou — s Eukleidovými Základy — a to z toho důvodu, abychom si osvojili některé způsoby vyvozování složitějších poznatků z jednodušších. Následně si všimneme několika témat, která v Základech řešena nejsou, větší pozornost budeme věnovat úlohám Apollóniovým. Dále zmíníme několik věcí k definicím a vlastnostem kuželoseček. Na závěr přidáme několik poznatků, které do této kapitoly také patří, ale na které není čas...

4 Základy

Velmi rámcový přehled Základů je následující:

- knihy I–IV a VI, planimetrie,
- knihy VII–IX, aritmetika,
- knihy XI–XIII, stereometrie.

Knihy V a X mají poněkud specifické postavení, viz dále.

4.1 Axiómy a postuláty

V každé knize najdeme několik definic, z nichž celou řadu známe téměř ve stejném znění už ze školy. Některé pojmy/relace jsou nedefinované neboli primitivní (např. shodnost úseček a úhlů), jiné jsou sice nějak definované, ale ve skutečnosti jsou též primitivní (např. definice bodu a přímky).

Na začátku I. knihy je formulováno několik axiomů a postulátů. Axiómy se týkají obecných veličin; na str. 157 jsou vyjmenovány jako Common notions a tady je nepřepisujeme. Postuláty jsou ryze geometrického charakteru:¹

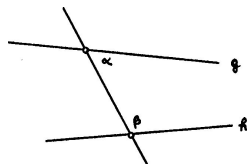
- (i) *Každé dva různé body spojuje přímka.*

¹V různých edicích jsou axiomy/postuláty organizovány různě, sr. např. s [E_V]. My odkazujeme na vydání odvozená z překladu T. Heath, viz [HTD].

- (ii) Každou přímkou lze na každé straně libovolně prodloužit.
- (iii) Lze vytvořit kružnici s libovolným daným středem procházející libovolným jiným bodem.
- (iv) Všechny pravé úhly jsou shodné.
- (v) Když přímka protínající dvě jiné přímky tvoří vnitřní úhly na jedné straně menší než dva pravé, pak tyto dvě přímky (dostatečně prodlouženy) setkají se na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.

V (i) a (ii) je přímkou zřejmě myšlena úsečka, a to jediná. Postuláty (i)–(iii) představují jediné konstrukční nástroje, se kterými si celé Základy vystačí — ideální nekonečně dlouhé pravítko a ideální nekonečně rozkročitelné kružítko. Konstrukce, které lze realizovat s těmito nástroji se nazývají *eukleidovské konstrukce*, viz též dodatek 20.

Postulát (i) je typickým axiómem **incidence**, postulát (iv) nám říká něco o základní relaci **shodnosti**. Postulát (v) je přezdíván jako dodatečný, neboť je původně formulován dodatečně až před tvrzením I.29.² Často bývá nahrazován tzv. postulátem o **rovnoběžkách**, se kterým je ekvivalentní, viz odst. 4.4.



Obrázek 4.1: [A] Eukleidův dodatečný postulát: $\alpha + \beta < 2R \implies g \text{ a } h \text{ se protínají}$.

V Základech se však používá několik předpokladů, aniž by byly jakkoli formulovány. Přesný axiomatický popis, založený na tom Eukleidově, pochází od D. Hilberta [Hi] (kolem 1900), viz přílohu na str. 163. Eukleidovy nevyslovené axiomy se týkají hlavně uspořádání a spojitosti. Typický axióm **uspořádání** je např.:

- Pro tři různé body ležící na jedné přímce platí, že právě jeden z nich je mezi zbylými dvěma.

Tento požadavek nám mj. říká, že přímka není uzavřená křivka, což ze samotného postulátu (ii) nevyplývá. To v důsledku znamená, že body na přímce lze uspořádat a toto uspořádání je úplné. Uvědomte si, že teprve po této přípravě je možné uspokojivě definovat pojem úsečky! Axiómy **spojitosti** je možné nahradit jediným, tzv. Dedekindovým axiómem. Ten lze v řeči uspořádání a tzv. Dedekindových řezů formulovat následovně:

- Body na přímce neobsahují (vzhledem k výše zmíněnému uspořádání) Dedekindovy řezy typu „skok“ a „mezera“.

4.2 Přehled

Od str. 157 je přiložen stručný přehled nejcitovanějších tvrzení ze všech geometrických knih podle [Ha]. Nyní shrneme několik podrobností k jednotlivým knihám podle [A].

²I.29 = 29. věta v I. knize Základů

I. Základy planimetrie

Základní a dobře známá tvrzení a konstrukce včetně všech vět o shodnostech trojúhelníků (I.1–26); teorie rovnoběžek (I.27–31); věta o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku (I.32); obsahy rovnoběžníků a trojúhelníků (I.33–45); Pythagorova věta (resp. Eukleidova věta o odvěsně) a věta opačná (I.47–48).

K vybraným tématům se vracíme v odst. 4.4 a 4.6.

II. O pravoúhelnících

Většina tvrzení se týká tzv. geometrické algebry; konstrukce zlatého řezu (II.11); kosinová věta (II.12–13); kvadratura obecného mnohoúhelníku (II.14).

K vybraným tématům se vracíme v odst. 4.6, 4.8, 4.9 a 4.11.

III. Geometrie kružnic

Věty o kružnicích, jejich průnicích a dotyku, sečnách, tečnách a asociovaných úhlech: např. konstrukce tečny (III.16–17); věty o středových a obvodových úhlech (III.20–21), Thaletova věta (III.31), věta o úsekových úhlech (III.32); mocnost bodu ke kružnici (III.35–37).

K vybraným tématům se vracíme v odst. 4.12.

IV. Pravidelné mnohoúhelníky

Konstrukce některých mnohoúhelníků vepsaných/opsaných dané kružnici a konstrukce kružnice opsané/vepsané danému mnohoúhelníku: jmenovitě pro obecný trojúhelník (IV.2–5), čtverec (IV.6–9), pravidelný pětiúhelník (IV.10–14), pravidelný šestiúhelník (IV.15), pravidelný 15-tiúhelník (IV.16).

K vybraným tématům se vracíme v odst. 4.14.

V. Obecná teorie proporcí

Mnohem abstraktnější kniha než ostatní, nezávislá na předchozích, nutná pro následující; pojednává o poměrech a proporcích obecných veličin (proporce je rovnost dvou poměrů), přičemž se myslí i na nesouměřitelné veličiny (tj. veličiny, jejichž poměr není racionální číslo, viz Def.V.5); typické tvrzení pro představu: $a : b = c : d \implies a : c = b : d$ (V.16).

VI. Geometrie podobných útvarů

Základní tvrzení (VI.1) mluví o proporcích mezi obsahy trojúhelníků a velikostmi jejich základů za předpokladu, že mají stejnou výšku; charakterizace podobných trojúhelníků (VI.2,4,5) konstrukce geometrického průměru (Eukleidova věta o výšce) (VI.13); vyjádření poměru obsahů podobných mnohoúhelníků pomocí koeficientu podobnosti (VI.19–20); pokračování geometrické algebry — řešení obecné kvadratické rovnice (VI.28–29); další zobecnění Pythagorovy věty (VI.31).

K vybraným tématům se vracíme v odst. 4.16 a 4.18.

VII. Základní aritmetika

Eukleidův algoritmus k nalezení největšího společného dělitele daných čísel (VII.1–3); poměry a součiny čísel (VII.17–19);

VIII. a IX. Teorie čísel

Geometrické posloupnosti čísel; čtvercová a kubická čísla; věta o počtu prvočísel (IX.20); sudá, lichá a dokonalá čísla.

X. Nesouměřitelné veličiny

Nejobsáhlejší kniha ze všech: definice (Def.X.1) a charakterizace (X.5–6) souměřitelných a nesouměřitelných veličin; existence nesouměřitelných veličin (X.10); vztahy mezi souměřitelností a poměry, součty a dalšími operacemi s veličinami; klasifikace nesouměřitelných veličin;

XI. Základy stereometrie

Věty o rovnoběžnosti a kolmosti přímk a rovin (XI.1–19); prostorové úhly (XI.20–23); o rovnoběžnostěnech a jejich objemech (XI.24–37); dvě věty s trojbokými hranoly (XI.38–39).

K vybraným tématům se vracíme v odst. 4.20.

XII. Obsahy a objemy

Myšleno obsahy a objemy pomocí Eudoxovy exhaustivní metody: obsah kruhu (XII.2); objem jehlanu (XII.3–9); objem válce a kužele (XII.10–15); objem koule (XII.18).

K vybraným tématům se vracíme v odst. 4.20.

XIII. Pravidelné mnohostěny

Věty o zlatém řezu (XIII.1–6); věty o pětiúhelníku (XIII.7–15); konstrukce pravidelných mnohostěnů (XIII.13–17), porovnání jejich stran a zdůvodnění, že jich není více (XIII.18).

K vybraným tématům se vracíme v odst. 4.21.

4.3 Cvičení

- (1) Na vybraných pojmech porovnejte definice v Základech [E] s těmi, které znáte ze školy.
- (2) Najděte nějaké tvrzení v Základech, které neznáte ze školy, a naopak.
- (3) Utvořte si představu o struktuře Základů — nejlépe tak, že si zapamatujete řazení některých význačných tvrzení v jednotlivých knihách.
- (4) Utvořte si představu o rozdílech mezi axiomatickým systémem Eukleidovým [E] a Hilbertovým [Hi], příp. jiným.

4.4 Postulát o rovnoběžkách

Jak jsme zmínili výše, postulát (v) je označován jako dodatečný, neboť je původně formulován až před tvrzením I.29 a nikoli na začátku s ostatními. Tento postulát se bezprostředně týká rovnoběžnosti a často bývá nahrazován tzv. postulátem o rovnoběžkách, se kterým je ekvivalentní, viz Věta (*) na str. 18. Přitom rovnoběžnost přímk je definována následovně (Def.I.23):

Přímky jsou *rovnoběžné*, pokud leží v téže rovině a nemají žádný společný bod.

Co je na postulátu (v) nezávislé

Prvních 28 tvrzení v I. knize je na postulátu (v) nezávislých — jsou to např.:

I.4 Věta SUS.

I.5–6 Rovnoramenné trojúhelníky jsou charakterizovány rovností úhlů při základně.

I.8 Věta SSS.

I.11–12 Konstrukce kolmice k dané přímce daným bodem.

I.16 Věta o vnějším úhlu trojúhelníku.

[Zde se poprvé silně používá nevyslovených předpokladů o uspořádání bodů na přímce.]³

I.17–20 Znamé nerovnosti v trojúhelníku.⁴

I.23 Konstrukce daného úhlu na dané polopřímce.

I.26 Věta USU.

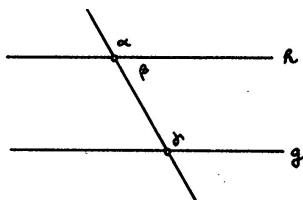
I.27 Shodné střídavé úhly implikují rovnoběžnost přímek.

[Zdůvodněno nepřímo pomocí I.16.]

Kromě těchto tvrzení je na (v) nezávislé také např.:

I.31 Konstrukce rovnoběžky k dané přímce daným bodem.

[Konstrukce podle I.23, zdůvodnění podle I.27.]



Obrázek 4.2: [A] I.27: $\alpha = \gamma \implies h \parallel g$. I.29: $h \parallel g \implies \alpha = \gamma$.

Co na postulátu (v) závisí

Naopak, řada dalších tvrzení je na pátém postulátu závislá, příp. je s ním ekvivalentní. První takové tvrzení je:

I.29 Věta o střídavých úhlech, viz obr. 4.2 (nebo přílohu na str. 164).

[Dokázáno nepřímo: $\alpha \neq \gamma \implies \alpha + \beta \neq \gamma + \beta \implies 2R \neq \gamma + \beta$; odtud podle (v) plyne, že se přímky h, g protínají, tedy nejsou rovnoběžné.]

Právě z I.29 přímo vyplývá jednoznačnost rovnoběžky sestavené podle I.31:

³To je hlavní důvod, proč Věta I.16 a všechny její důsledky neplatí v eliptické geometrii (jež je lokálně modelovaná na sféře)!

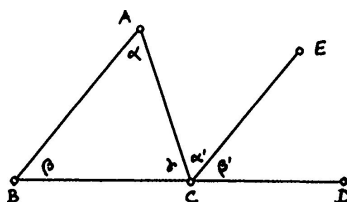
⁴Např. I.17 je tvrzení opačné k postulátu (v), I.20 je trojúhelníková nerovnost.

Věta. Každým bodem ke každé přímce prochází právě jedna rovnoběžka.

Toto tvrzení je asi nejznámější věta, která je s postulátem (v) ekvivalentní. Další tvrzení závislá na tomto postulátu jsou:

I.32 Věta o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku, viz obr. 4.3.

[Dokázáno přímo z I.29: $CE \parallel AB \implies \alpha' = \alpha$ a $\beta' = \beta$; odtud plyne, že $\alpha' + \beta' = \alpha + \beta$ a $\alpha + \beta + \gamma = 2R$.]



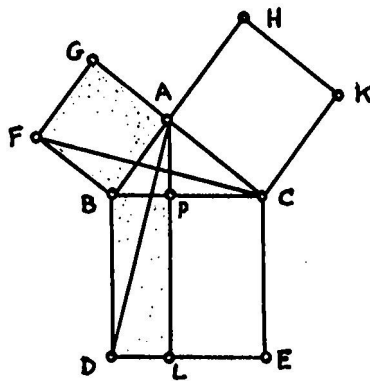
Obrázek 4.3: [A] I.32: Vnější úhel v libovolném trojúhelníku je roven součtu protějších vnitřních úhlů a součet všech vnitřních úhlů je roven dvěma pravým.

I.33–45 Věty o rovnoběžnících a trojúhelnících a jejich obsahích, viz odst. 4.6.

I.47 Pythagorova věta, jakožto dvakrát Eukleidova věta o odvěsně, viz obr. 4.4.

Důkaz. $FBAG$ je čtverec a úhel BAC je pravý, tudíž body G, A, C leží na jedné přímce, a ta je rovnoběžná s FB (I.27). Odtud obsah $FBA =$ obsah FBC (I.37) = obsah ABD (I.4) = obsah PBD (I.37). Proto má čtverec $FBAG$ stejný obsah jako obdélník $PBDL$.

Stejným způsobem se zdůvodní, že čtverec $KCAH$ má stejný obsah jako obdélník $PCEL$. Dohromady tedy platí, že čtverec nad BC má stejný obsah jako součet čtverců nad BA a AC . \square



Obrázek 4.4: [A] I.47: V pravouhlém trojúhelníku BAC ozn. P patu výšky z vrcholu A . Potom platí $BP \cdot BC = BA^2$ a $CP \cdot CB = CA^2$, tudíž $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

Kromě těchto ukázek z I. knihy závisí na postulátu o rovnoběžkách většina geometrických tvrzení z ostatních knih Základů. . .

4.5 Cvičení

- (1) Pomocí ideálních eukleidovských nástrojů sestrojte: kolmici k dané přímce daným bodem, rovnoběžku k dané přímce daným bodem apod.
- (2) Pomocí omezených eukleidovských nástrojů (krátké pravítko, malé nebo dokonce zaseknuté kroužátko) sestrojte: spojnicí dvou bodů, rovnostranný trojúhelník, znovu (1) apod.
- (3) Dokažte, že si umíte představit sférický trojúhelník, ve kterém neplatí I.16.

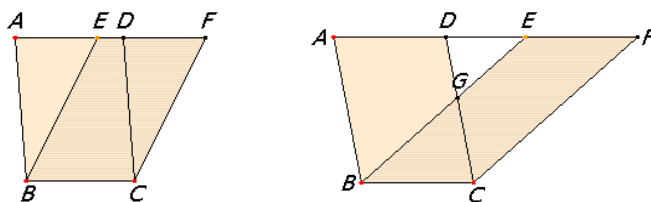
4.6 Kvadratura mnohoúhelníku

Kvadraturovat nějaký plošný útvar znamená sestrojít čtverec, který má stejný obsah (příčemž sestrojít jako obvykle znamená sestrojít eukleidovsky). Posloupnost tvrzení v [E] (počínaje I.34 a vrcholíce II.14) řeší tento problém pro libovolné mnohoúhelníky. Pojem obsahu není v Základech nijak vymezen, avšak nakládá se s ním jako s každou jinou veličinou podle vyslovených axiómů (viz Common notions na str. 157). Zejména platí, že shodné útvary mají stejný obsah.

Konstrukce

I.35–38 Rovnoběžníky, resp. trojúhelníky, se stejnou základnou a výškou mají stejný obsah.

[Úvodní tvrzení z této série je na obr. 4.5: zdůvodnění je založeno na shodnosti trojúhelníků ABE a DCF .]



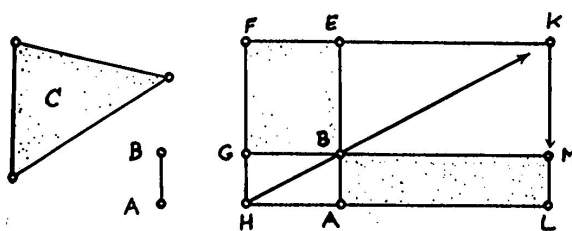
Obrázek 4.5: [E,_J] I.35: *Rovnoběžníky se stejnou základnou a výškou mají stejný obsah.*

I.42 Konstrukce rovnoběžníku, jenž má stejný obsah jako daný trojúhelník.

[Pomocí prodloužené střední příčky, viz např. část obr. 4.9. . .]

I.43–45 Konstrukce rovnoběžníku, jenž má stejný obsah jako daný mnohoúhelník.

Podrobnosti. Klíčový krok je v I.44, viz obr. 4.6: Podle I.42 se sestrojí rovnoběžník $FEBG$, jehož obsah je stejný jako obsah daného trojúhelníku; rovnoběžník $FEAH$ se doplní tak, aby AB byla daná úsečka; spojí se HB , odtud K , dále M a L jako na obrázku. Každý rovnoběžník je úhlopříčkou rozdělen na dva stejné trojúhelníky (I.34), proto má doplňkový rovnoběžník $ABML$ stejný obsah jako $FEBG$ (I.43).



Obrázek 4.6: [A] I.44: Konstrukce rovnoběžníku, který má dānu jednu stranu a stejný obsah jako daný trojúhelník.

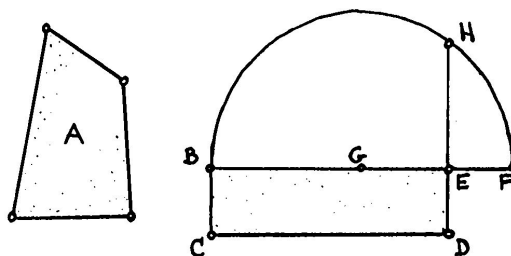
Ostatní je zřejmé: Obecný mnohoúhelník lze vždy rozdělit na trojúhelníky; tyto trojúhelníky lze podle I.44 přeměnit na rovnoběžníky, které se shodují v jedné straně (a vnitřních úhlech); z těchto rovnoběžníků lze složit jeden rovnoběžník, a ten má stejný obsah jako daný mnohoúhelník. \square

II.14 Konstrukce čtverce, jenž má stejný obsah jako daný mnohoúhelník.

Podrobnosti. Shrnutí předchozího + vlastní kvadratura: Podle I.45 se sestrojí pravouhelník $BCDE$, který má stejný obsah jako daný mnohoúhelník; doplní se F tak, aby $EF = ED$, dále $G =$ střed BF , kružnice GF a bod H na této kružnici a na kolmici k BE . Potom, podle II.5 a I.47, platí

$$BE \cdot EF + EG^2 = GF^2 = GH^2 = EG^2 + EH^2,$$

tzn. $BE \cdot EF = EH^2$, tudíž EH je stranou hledaného čtverce. \square



Obrázek 4.7: [A] II.14: Konstrukce strany čtverce, který má stejný obsah jako daný mnohoúhelník.

Všimněte si, že se znalostí Thaletovy věty (která je však formulovaná až v III.31) lze úsečku EH interpretovat jako výšku v pravouhlém trojúhelníku BHF . V důkazu II.14 se tedy vlastně zdůvodňuje tzv. Eukleidova věta o výšce.⁵ Ke kvadratuře pravouhelníku lze však stejně dobře použít Eukleidovu větu o odvěsně (viz I.47), která při rýsování vždycky zabírá o něco méně místa.

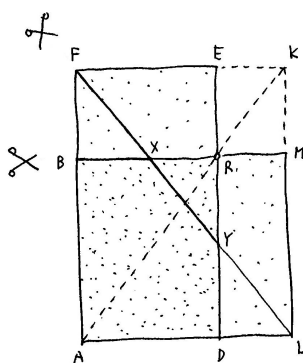
⁵Jiné zdůvodnění Eukleidovy věty o výšce založené na podobnosti trojúhelníků plyne z VI.8; konstrukce je samozřejmě tatáž, viz VI.13.

Stříhání

Spousta předchozích argumentů byla založena na shodnostech částí, z nichž se skládají dané útvary se stejným obsahem (viz např. I.35, I.42). To znamená, že stejnoplochosť lze v těchto případech názorně demonstrovat tak, že se jeden útvar rozstříhá a ze vzniklých částí se složí ten druhý.

Ve výše diskutované kvadratuře mnohoúhelníku nemusí být na první pohled zřejmé, jak by se měly stříhat stejnoploché pravoúhelníky tak, aby z jednoho šel složit druhý. To si nyní vysvětlíme nad obr. 4.8:

Věta. *Dva pravoúhelníky mají stejný obsah právě tehdy, když jeden lze rozstříhat na části, z nichž lze složit ten druhý.*



Obrázek 4.8: Stříhání stejnoplochých pravoúhelníků.

Implikace zprava doleva je triviální, dokazujeme pouze opačné tvrzení:

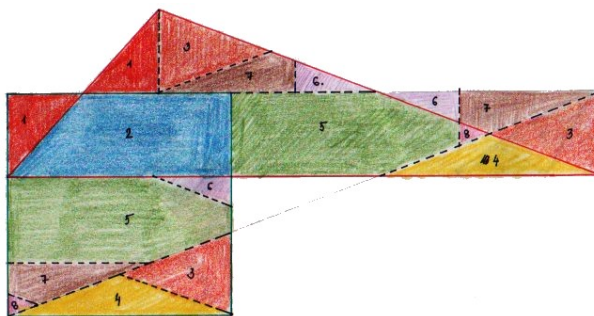
Pravoúhelníky $ADEF$ a $ALMB$ položíme přes sebe a doplníme K jakožto průsečík FE a LM . Podle I.43 víme, že $ADEF$ a $ALMB$ mají stejný obsah, právě když průsečík $R = BM \cap DE$ leží na úhlopříčce AK doplněného pravoúhelníku. Tato podmínka je splněna, právě když trojúhelníky FBX a YDL jsou shodné, což je ekvivalentní s tím, že jsou shodné trojúhelníky FEY a XML . ◀

Pokud úhlopříčka FL protíná společnou část $ADRB$ jako na obrázku, pak lze pravoúhelník $ADEF$ rozstříhat podle úseček FY a BX , trojúhelník FBX přesunout na YDL , trojúhelník FEY přesunout na XML , čímž dostaneme pravoúhelník $ALMB$. Pokud úhlopříčka FL neprotíná společnou část $ADRB$, pak je možné nápad se stříháním a přesouváním zopakovat několikrát nebo vymyslet nějaké alternativní řešení, viz cvičení. □

Odtud vidíme, že libovolný mnohoúhelník je možné nejen kvadraturovat, ale dokonce rozstříhat tak, aby ze vzniklých částí bylo možné složit čtverec. Tato pozorování vedou k následujícímu obecnějšímu závěru, viz např. [Ha, podkap. 24]:

Věta (Wallaceova–Bolyaiova–Gerwienova). *Dva mnohoúhelníky mají stejný obsah právě tehdy, když jeden lze rozstříhat na části, z nichž lze složit ten druhý.*

Kvadratura obecného trojúhelníku společně se stříháním, jež je odvozeno z předchozího rozboru, je naznačena na obr. 4.9.



Obrázek 4.9: [K. Nedvědová, 2009] Kvadratura obecného trojúhelníku se stříháním.

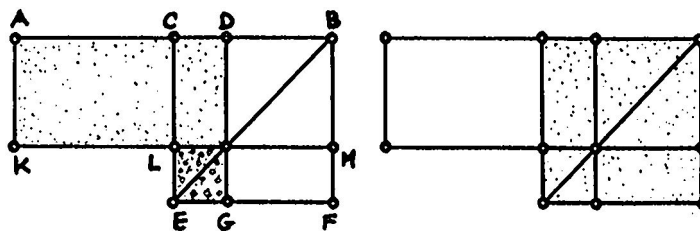
4.7 Cvičení

- (1) Pravoúhelníky $KFBM$ a $KEDF$ na obr. 4.8 mají stejný obsah. Dokažte, že umíte rozstříhat jeden tak, aby ze vzniklých částí šel složit druhý.
- ⇒ (2) Dokažte, že umíte kvadraturovat obecný mnohoúhelník.
- (3) Uvědomte si, že kvadraturu specifického mnohoúhelníku lze často provést specifickým a zpravidla efektivnějším způsobem. . .
- (4) Uvědomte si, že kvadraturovat jiné útvary než mnohoúhelníky může být docela problém (viz 20.1).
- (5) Sestrojte svůj vlastní důkaz Pythagorovy věty pomocí rozstříhání dvou menších čtverců.

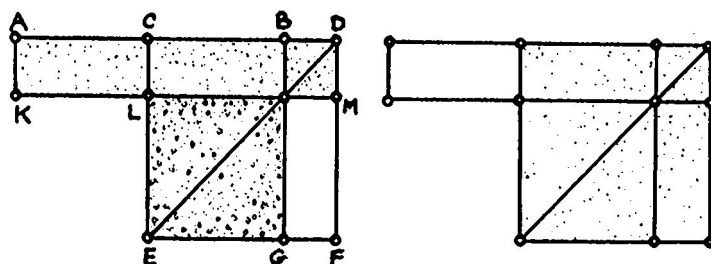
4.8 Geometrická algebra

Tvrzení, která se řadí do této skupiny, nějak souvisí (nebo mohou souviset) s algebrou a v Základech jsou koncentrovány zejména ve II. knize. Patří sem také např. tvrzení I.44 (viz obr. 4.6), které lze chápat jako geometrické řešení lineární rovnice $S = ax$, kde S je obsah daného trojúhelníku a a , resp. x je velikost dané, resp. hledané strany pravoúhelníku se stejným obsahem.

Úvodních několik tvrzení ze II. knihy lze považovat za známé algebraické rovnosti v geometrickém převleku; na následujících obrázcích jsou dvě taková tvrzení na ukázkou.



Obrázek 4.10: [A] II.5: Pokud je C střed úsečky AB a D je libovolný bod mezi C a B , potom platí $AD \cdot BD + CD^2 = CB^2$.



Obrázek 4.11: [A] II.6: Pokud je C střed úsečky AB a D je libovolný bod na téže přímce vpravo od B , potom platí $AD \cdot BD + CB^2 = CD^2$.

Poznámky

Jedna z možných algebraických interpretací uvedených tvrzení je následující. Při značení $|AB| =: b$ a $|DB| =: x$ lze tvrzení II.5 psát jako

$$(b-x)x + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \text{neboli} \quad x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} - x\right)^2.$$

Při stejném značení lze tvrzení II.6 psát jako

$$(b+x)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2 \quad \text{neboli} \quad x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2.$$

Uvedené úpravy známe jako tzv. doplnění do čtverce, jež je ve větách II.5–6 je představeno maximálně názorným způsobem. Tyto úpravy jsou také prvním krokem k vyjádření kořenů obecné kvadratické rovnice, k čemuž se ještě vrátíme v odst. 4.18. Speciálním případem je konstrukce zlatého řezu, viz následující odstavec.

4.9 Zlatý řez

Základní konstrukce, kterou ještě několikrát zužitkujeme, je konstrukce zlatého řezu. Zlatý řez je specifické (a podle mnohých nejhezčí možné) rozdělení úsečky na dvě části (Def.VI.3):

Úsečka je rozdělena ve *zlatém řezu*, pokud je poměr celé úsečky k větší části řezu stejný jako poměr větší části řezu k menší.

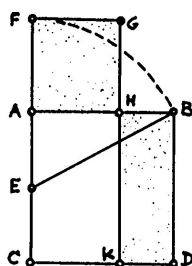
Jinými slovy: bod H na úsečce AB leží ve zlatém řezu, pokud platí

$$BA : AH = AH : HB \quad \text{nebo} \quad AB : BH = BH : HA. \quad (4.1)$$

Konstrukce

Klasická konstrukce zlatého řezu je představena na obr. 4.12:

Věta (II.11). *Body A, C, E, F leží na kolmici k AB , přičemž $AC = AB$, E = střed AC a $EF = EB$; bod H je sestroyen tak, že $AH = AF$. Potom bod H je ve zlatém řezu úsečky AB .*



Obrázek 4.12: [A] II.11: Konstrukce zlatého řezu úsečky AB .

Zdůvodnění uvedené konstrukce plyne z II.6 a z Pythagorovy věty:

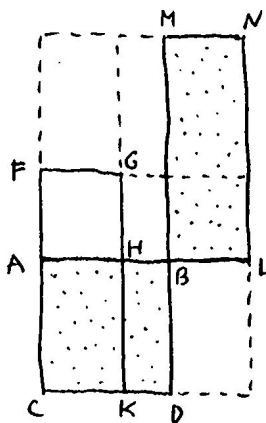
$$CF \cdot FA + AE^2 = EF^2 = EB^2 = AE^2 + AB^2,$$

tj. $CF \cdot FA = AB^2$, což znamená, že obdélník $CFGK$ a čtverec $ABDC$ mají stejný obsah. Tyto pravoúhelníky však mají společnou část $CAHK$, takže pravoúhelníky zvýrazněné na obrázku mají také stejný obsah. Tzn. $AH^2 = AB \cdot BH$ neboli $AH : BH = AB : AH$. \square

Poznámky

Konstrukce II.11 v Základech ve skutečnosti nepojednává o zlatém řezu — o tom je řeč poprvé až v VI.30.⁶ Zlatému řezu se dále věnují tvrzení XIII.1–6 v souvislosti s pětiúhelníkem a následnými konstrukcemi pravidelných mnohostěnů, viz odst. 4.14 a 4.21. Uvádíme jedno typické a užitečné tvrzení, viz obr. 4.13:

Věta. Pro čtyři body A, H, B, L na jedné přímce takové, že $AH = BL$, platí: úsečka AH je větší částí zlatého řezu úsečky AB právě tehdy, když úsečka BL je menší částí zlatého řezu úsečky AL .



Obrázek 4.13: Pokud $AH = BL$, potom H je ve zlatém řezu $AB \iff B$ je ve zlatém řezu AL .

⁶Klasická terminologie je však jiná: místo o zlatém řezu se mluví o poměru krajním a středním.

Podle II.11 víme, že AH je větší částí zlatého řezu úsečky AB , právě když obdélník $CFGK$ má stejný obsah jako čtverec $ABDC$. Podle téhož tvrzení je BL menší částí zlatého řezu AL , právě když $BMNL$ má stejný obsah jako $ABDC$, přičemž $NL = AL$. Z předpokladu věty plyne, že obdélníky $CFGK$ a $BMNL$ jsou shodné, tudíž uvedené výroky jsou skutečně ekvivalentní. \square

Počítání

Na závěr ještě naznačíme, jak je možné konstrukci II.11 zdůvodnit početně. Smysl tohoto počínání bude ozřejmen v odst. 4.18 — konkrétní vyjádření sestrojované veličiny vždy nabízí jistý návod k její konstrukci.

Počtení zdůvodnění II.11. Označíme danou veličinu $|AB| =: b$, hledanou veličinu $|AH| =: x$. Postupně vyjádříme všechny veličiny sestrojené na obr. 4.12:

$$|AE| = |EC| = \frac{1}{2}b, |EB| = \frac{\sqrt{5}}{2}b, |AF| = |AH| = x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b.$$

Definice zlatého řezu v našem značení zní:

$$b : x = x : (b - x),$$

což je ekvivalentní s $b(b - x) = x^2$ neboli

$$x^2 + bx - b^2 = 0. \quad (4.2)$$

Stačí tedy ověřit, že před chvílí sestrojená veličina $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b$ je kořenem této kvadratické rovnice — což skutečně je. \square

4.10 Cvičení

- (1) Připomeňte si klasickou konstrukci zlatého řezu a vymyslete nějakou svoji vlastní konstrukci (návod: sestrojte postupně $\sqrt{5}$, $\sqrt{5} - 1$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$).
- (2) Rovnice (4.2) má dva kořeny; vypočítejte také druhý kořen a zkuste jej nějak geometricky interpretovat.
- (3) Pro danou úsečku DF sestrojte bod A tak, aby F byl zlatým řezem úsečky DA .
- (4) Dokažte, že platí (XIII.4): *Úsečka AH je větší částí zlatého řezu úsečky AB právě tehdy, když*

$$AB^2 + BH^2 = 3AH^2.$$

4.11 Kosinová věta

Asi nejnámějším zobecněním Pythagorovy věty je tzv. kosinová věta. V Základech samozřejmě není o funkci kosinus ani zmínka, nicméně geometrická část kosinové věty je zde celá, viz obr. 4.14:

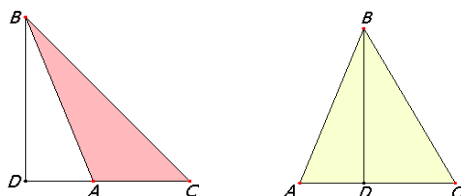
Věta (II.12–13). *V obecném trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu B .*

- (a) *Je-li vnitřní úhel u vrcholu A tupý, potom platí $BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2DA \cdot AC$.*
- (b) *Je-li vnitřní úhel u vrcholu A ostrý, potom platí $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2DA \cdot AC$.*

Dokážeme, že platí (a), druhý případ lze zdůvodnit analogicky:

V následujícím výpočtu používáme Pythagorovu větu pro trojúhelník BDC , úpravu čtverce $DC^2 = (DA + AC)^2$ (jejíž geometrickou interpretaci lze najít v II.4) a znovu Pythagorovu větu pro trojúhelník BDA :

$$\begin{aligned} BC^2 &= BD^2 + (DA + AC)^2 = \\ &= (BD^2 + DA^2) + AC^2 + 2DA \cdot AC = BA^2 + AC^2 + 2DA \cdot AC. \quad \square \end{aligned}$$



Obrázek 4.14: [E_J] II.12–13: V obecném trojúhelníku BAC ozn. D patu výšky z vrcholu B . Potom platí $BC^2 = BA^2 + AC^2 \pm 2DA \cdot AC$ podle toho, zda je vnitřní úhel u vrcholu A tupý nebo ostrý.

Poznámky

Při obvyklém značení $a := |BC|$, $b := |AC|$, $c := |AB|$ a $\alpha := \sphericalangle BAC$ platí, že velikost úsečky DA je rovna absolutní hodnotě $c \cdot \cos \alpha$. Přitom znaménko tohoto čísla je kladné, právě když $\alpha < 90^\circ$. Odtud plyne, že obě části předchozí věty můžeme psát současně jako

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \quad (4.3)$$

Všimněte si, že dosazením specifických hodnot za α dostáváme právě tvrzení, která byla použita v důkazu věty:

- $\alpha = 90^\circ$: $a^2 = b^2 + c^2 + 0$ (Pythagorova věta),
- $\alpha = 180^\circ$: $a^2 = (b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc$ (II.4),
- $\alpha = 0^\circ$: $a^2 = (b - c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc$ (II.7).

4.12 O kružnicích

Úvod

Obvyklá definice kružnice je následující (Def.I.15):

Kružnice je rovinný útvar tvořený koncovými body všech úseček, které jsou navzájem shodné a jejichž opačné koncové body splývají (ve *středu* kružnice).

Na úvod zmiňujeme několik tvrzení (a jednu konstrukci) ze III. knihy Základů, jež se týkají dotyku.⁷ Jejich zdůvodnění je veskrze elementární s odkazy na známé nerovnosti v trojúhelníku, větu SUS apod. Tyto postřehy budeme užívat zejména v podkap. 5.

⁷Dvě kružnice, resp. přímka a kružnice se *dotýkají*, když mají společný právě jeden bod.

III.11–12 *Spojnice středů dotýkajících se kružnic prochází dotykovým bodem.*

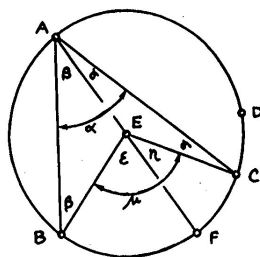
III.16,18,19 *Přímka jdoucí bodem na kružnici je tečnou, právě když je kolmá k průměru procházejícím tímto bodem.*

III.17 *Konstrukce tečny z bodu ke kružnici (bez Thaletovy kružnice).*

Kvůli souvislostem připomínáme několik dalších dobře známých tvrzení. Tato skupina poznatků mívá k obzvlášť užitečnému pojmu mocnosti bodu ke kružnici, o němž se rozpovídáme v samostatném odstavci.

III.20–21 *Věty o středových a obvodových úhlech, viz obr. 4.15.*

[Trojúhelník ABE je rovnoramenný, proto jsou úhly u základny stejné, ozn. β (I.5); pro vnější úhel u vrcholu E podle I.32 platí $\varepsilon = 2\beta$. Ze stejných důvodů platí také $\eta = 2\gamma$. Odtud plyne $\mu = 2\alpha$ a podobně by se zdůvodnily i ostatní varianty jako např. $A = D$.]



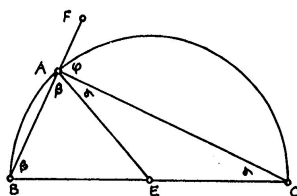
Obrázek 4.15: [A] III.20–21: *Středový úhel k dané úseči je dvakrát větší než obvodový ($\mu = 2\alpha$); proto obvodové úhly na téže úseči jsou všechny stejné.*

III.22 *Věta o tětíovém čtyřúhelníku.*

[Plyne přímo z III.20 a I.32.]

III.31 *Thaletova věta, viz obr. 4.16.*

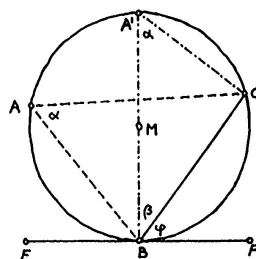
[Možno chápat jako spec. případ III.20 nebo dokázat přímo z I.32.]



Obrázek 4.16: [A] III.31: *Obvodový úhel nad průměrem kružnice je pravý ($\alpha + \beta = R$).*

III.32 *Věta o úsekových úhlech, viz obr. 4.17.*

[Podle III.21 je úhel u A stejný jako úhel u K , ozn. α . Podle III.31 je úhel u C pravý. Podle I.32 je $\alpha + \beta = R$ a podle III.18 je $\varphi + \beta = R$; odtud plyne, že $\alpha = \varphi$.]



Obrázek 4.17: [A] III.32: Úsekový úhel je stejný jako odpovídající úhel obvodový ($\varphi = \alpha$).

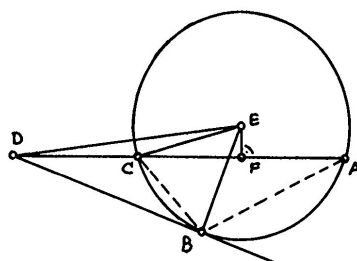
Mocnost bodu ke kružnici

Mocnost bodu ke kružnici je velice užitečný invariant, ke kterému dospějeme na konci následující posloupnosti úvah.

Věta (III.35–36). Pro sečnu kružnice jdoucí bodem D ozn. A a C odpovídající průsečíky. Potom platí, že $DC \cdot DA$ nezávisí na zvolené sečně.

V případě, že D leží vně kružnice a B značí dotykový bod tečny jdoucí bodem D , je

$$DC \cdot DA = DB^2. \quad (4.4)$$



Obrázek 4.18: [A] III.36: Pro libovolnou sečnu jdoucí bodem D platí: $DC \cdot DA = DB^2 = \text{konst.}$

Nejdřív předpokládáme, že bod D leží vně kružnice jako na obr. 4.18:

- (a) V Základech je rovnost (4.4) dokázána několikerým užitím Pythagorovy věty (pro trojúhelníky DBE , DFE , CFE) a pomocí II.6 (pro čtveřici bodů D, C, F, A):

$$\begin{aligned} DB^2 &= DE^2 - EB^2 = DE^2 - EC^2 = (DF^2 + FE^2) - (EF^2 + FC^2) = \\ &= DF^2 - FC^2 = (DF + FC) \cdot (DF - FC) = DA \cdot DC. \end{aligned}$$

- (b) Poněkud názornější je zdůvodnění pomocí podobnosti (viz odst. 4.16): Trojúhelníky DCB a DBA mají úhel u vrcholu D společný a podle III.32 je úhel CAB shodný s úhlem DBC . Tyto trojúhelníky jsou tedy podobné, z čehož mj. plyne

$$DC : DB = DB : DA \quad \text{neboli} \quad DC \cdot DA = DB^2.$$

To zejména znamená, že součin $DC \cdot DA$ nezávisí na sečně.

Oba zmiňované postupy lze jednoduše modifikovat i pro případ, kdy bod D leží uvnitř kružnice. V takovém případě samozřejmě reálná tečna neexistuje, takže se dokazuje pouze to, že součin $DC \cdot DA$ nezávisí na sečně. . . \square

Součin $DC \cdot DA$ je tedy zcela určen danou kružnicí a bodem D (a nikoli zvolenou sečnou). V případě, že D leží vně kružnice, můžeme rovnost (4.4) pomocí středu E a poloměru r kružnice vyjádřit jako

$$|DE|^2 - r^2 \quad (4.5)$$

(podle Pythagorovy věty pro trojúhelník DBE). V případě, že D je uvnitř kružnice, je tento rozdíl sice záporný, ale jeho absolutní hodnota je přece rovna součinu $DC \cdot DA$. .

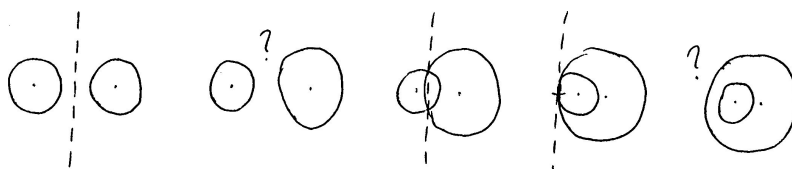
Mocnost bodu D ke kružnici se středem E a poloměrem r je reálné číslo definované rovností (4.5).

Mocnost je tedy kladná pro body vně kružnice, záporná pro body uvnitř kružnice a nulová pro body na kružnici.

Další pojmy

Uvažme dvě kružnice, které se protínají. Pak přímka určená jejich společnými body má tu vlastnost, že každý bod na ní ležící má stejnou mocnost k oběma kružnicím. V případě, že se dvě kružnice dotýkají, má jejich společná tečna (jdoucí společným bodem) zrovna takovou vlastnost. Obecně:

Množina všech bodů v rovině, které mají stejnou mocnost ke dvěma daným kružnicím, se nazývá *chordála*.

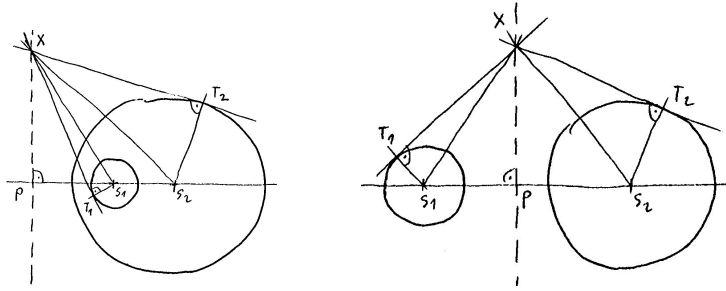


Obrázek 4.19: Chordála dvou kružnic.

Na první pohled nemusí být zřejmé, jak vypadá chordála v případě, že se dané kružnice neprotínají. Pokud kružnice mají společný střed, potom žádný bod nemůže mít stejnou mocnost k oběma kružnicím, tzn. chordála neexistuje. V opačném případě je odpověď v následující větě:

Věta. *Chordála libovolných dvou nesoustředných kružnic je přímka, která je kolmá na spojnici jejich středů.*

Při zdůvodnění používáme definici chordály a Pythagorovu větu. Odkazujeme na obr. 4.20:



Obrázek 4.20: Chordála je přímka kolmá na spojnici středů.

Uvažme libovolný bod X na chordále, patu kolmice na spojnici středů označíme P . Protože X má stejnou mocnost k oběma kružnicím, platí

$$\begin{aligned} |XS_1|^2 - r_1^2 &= |XS_2|^2 - r_2^2, \\ (|XP|^2 + |PS_1|^2) - r_1^2 &= (|XP|^2 + |PS_2|^2) - r_2^2, \\ |PS_1|^2 - r_1^2 &= |PS_2|^2 - r_2^2. \end{aligned}$$

Tzn., že bod P taky leží na chordále. Protože chordála má se spojnicí středů společný právě jeden bod, je to zrovna P . Pata kolmice z každého bodu na chordále tedy bude splývat s P , což znamená, že chordála je právě kolmice ke spojnici středů jdoucí tímto bodem. \square

Ještě jeden pojem související s mocností bodu ke kružnici:

Množina bodů, která má stejnou mocnost ke třem daným kružnicím se nazývá *potenční střed tří kružnic*.

Tento bod se občas zmiňujeme při konstrukcích; v generickém případě je určen jednoznačně. Uvědomte si, že ve speciálních případech potenční střed vůbec nemusí existovat (příp. je nevlastní) nebo naopak nemusí být určen jednoznačně. . .

4.13 Cvičení

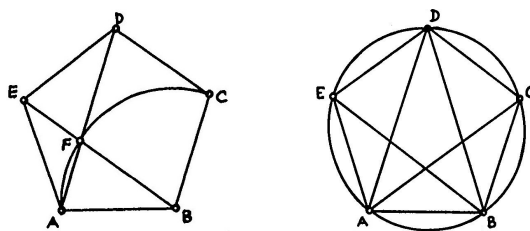
- (1) Sestrojte (eukleidovsky!) tečnu k dané kružnici z daného bodu; svoji konstrukci zdůvodněte a porovnejte s konstrukcí III.17.
- (2) Dokažte některé výše zmiňované a nedokazované tvrzení, např. III.22.
- (3) Sestrojte chordálu dvou kružnic, které se neprotínají.
- (4) Udejte příklad tří kružnic, které mají více potenčních středů.
- \Rightarrow (5) Sestrojte kružnici, která prochází dvěma danými body a dotýká se dané přímky.

4.14 Pravidelný pětiúhelník

Pravidelný mnohoúhelník je takový mnohoúhelník, který má všechny strany a všechny vnitřní úhly shodné. Pravidelný (rovnoramenný) trojúhelník je konstruován v I.1, pravidelný čtyřúhelník (čtverec) je konstruován v I.46, další pravidelné mnohoúhelníky najdeme v IV. knize a dodatky k pravidelnému pětiúhelníku ještě ve XIII. knize. V tomto odstavci důkladně rozebereme pravidelný pětiúhelník.

Postřehy

Předpokládejme nějaký hotový pentagram, který trochu prozkoumáme. Tento má jak stany, tak



Obrázek 4.21: [A] Analýza pravidelného pětiúhelníku.

vnitřní úhly shodné, má pět os symetrií atp. Odtud podle obr. 4.21 vyvozujeme několik postřehů:

- (1) $AD \parallel BC$ a $BE \parallel CD$, takže $BCDF$ je rovnoběžník,
- (2) trojúhelníky ADE a EAF jsou oba rovnoramenné a mají společný úhel, takže jsou podobné,
- (3) obvodové úhly BAC , CAD , DAE atd. jsou všechny shodné, takže trojúhelník ABD má tu vlastnost, že je rovnoramenný a úhly u základny jsou dvojnásobkem úhlu u vrcholu D .⁸

Důsledky a konstrukce

Předpokládejme, že máme danu stranu AB a chceme sestrojít ostatní vrcholy.

- (1') Z (1) plyne $FD = BC = CD = BF$. Pokud si ještě všimneme, že D leží na ose úsečky AB , pak se nabízí rychlá — nikoli však eukleidovská — konstrukce bodu D a odtud celého pětiúhelníku, viz obr. 20.4 na str. 144.
- (2') Z podobnosti trojúhelníků v (2) plyne $AD : DE = EA : AF$, přičemž však $DE = EA = DF$; tedy

$$AD : DF = DF : FA.$$

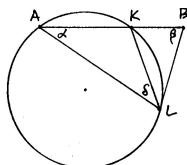
Tzn., že bod F leží na AD ve **zlatém řezu**. Tento poznatek nám spolu se znalostmi z odst. 4.9 dovoluje sestrojít délku strany pětiúhelníku, je-li dána jeho strana, nebo naopak. Tímto jsme zdůvodnili následující tvrzení:

Věta (XIII.8). *Úhlopříčky v pravidelném pětiúhelníku se navzájem dělí ve zlatých řezech, jejichž delší části jsou shodné se stranou pětiúhelníku.*

⁸Trojúhelníku s těmito vlastnostmi se říká *zlatý trojúhelník*.

(3') Postřeh (3) nás navádí k následující myšlence: sestrojme trojúhelník s uvedenými vlastnostmi a zbytek už bude snadný. Toto je právě cesta, kterou najdeme v IV.10 (tzn. bez teorie podobnosti) a kterou zde pro svoji nezpochybnitelnou působivost představíme. Současně si tak připomeneme několik významných tvrzení z prvních knih Základů hezky pohromadě:

Věta (IV.10). *Bod K sestrojen ve zlatém řezu úsečky AB a bod L je sestrojen tak, aby $AL = AB$ a $BL = AK$. Potom trojúhelník ABL je rovnoramenný a jeho úhly u základny jsou dvojnásobkem úhlu zbývajícího ($\beta = 2\alpha$).*



Obrázek 4.22: [Ha] IV.10: Konstrukce zlatého trojúhelníku.

Zdůvodnění konstrukce je následující:

- z konstrukce bodu K plyne, že $BA \cdot BK = BL^2$ (II.11),
- doplníme-li pro lepší představu kružnici AKL , pak předchozí veličinu můžeme interpretovat jako mocnost bodu B ke kružnici; zejména BL je její tečnou (III.36–37),
- úsekový úhel BLK je shodný s LAB (III.32), jež značíme α , tudíž úhel ALB je roven $\alpha + \delta$,
- přitom trojúhelník ABL je rovnoramenný, takže (I.5)

$$\beta = \alpha + \delta,$$

- úhel LKB je vnější úhel v trojúhelníku AKL , proto je také roven $\alpha + \delta$ (I.32),
- odtud plyne, že trojúhelník BLK je rovnoramenný (I.6), tudíž $KL = BL = AK$,
- proto také trojúhelník AKL je rovnoramenný, tzn. (znovu I.5)

$$\alpha = \delta,$$

- celkem tedy opravdu platí $\beta = 2\alpha$. □

Poznámky

Na obr. 4.23 je připomenuta konstrukce zlatého řezu K úsečky AB včetně trojúhelníku ABL , o kterém byla řeč před chvílí. Velice užitečným poznatkem je následující tvrzení, které nabízí jistou zkratku při konstruování pravidelného pětiúhelníku vepsaného do kružnice. Druhá část věty je použita např. při konstrukci pravidelného dvacetistěnu, viz odst. 4.21.

Věta. *Úsečky AB , AJ , resp. BJ na obr. 4.23 představují strany pravidelného šestiúhelníku, desetiúhelníku, resp. pětiúhelníku vepsaného do naznačené kružnice. Zejména platí, že tyto úsečky tvoří strany pravoúhlého trojúhelníku!*

- (3) Dokažte tvrzení XIII.10 bez počítání.
 (4) Sestrojte pravidelný patnáctiúhelník a pokuste se o jiný pravidelný mnohoúhelník.



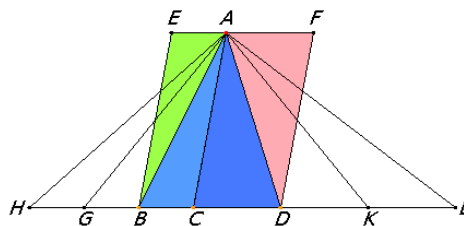
4.16 Teorie podobnosti

Několikrát jsme v předchozím výkladu se značnou výhodou využili podobnosti nějakých trojúhelníků. Protože podobné obraty jsou velice hojné a užitečné, připomeneme si zde několik základních věcí. Nejdřív základní definice (Def.VI.1):

Trojúhelníky (obecněji, mnohoúhelníky) jsou *podobné*, pokud mají po dvou shodné vnitřní úhly a strany u shodných úhlů mají úměrné.

Základní věty

V Základech je podobnostem věnována VI. kniha, jež začíná základním tvrzením VI.1, viz obr. 4.24. Uvědomte si, že vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku je důsledkem této věty a nikoli naopak!



Obrázek 4.24: [E_J] VI.1: *Poměr obsahů trojúhelníků (resp. rovnoběžníků) se stejnou výškou je stejný jako poměr délek jejich základů.*

Věta VI.1 je přímým důsledkem věty o rovnosti obsahů trojúhelníků (I.38) a definice rovnosti poměrů z V. knihy. Tato definice (Def.V.5) říká, že veličiny a, b jsou *ve stejném poměru* jako veličiny c, d ,

$$a : b = c : d,$$

pokud pro každá čísla m, n platí

$$na \stackrel{\geq}{\approx} mb \iff nc \stackrel{\geq}{\approx} md.$$

Možná to zní komplikovaně, ale opak je pravdou: Čísly se samozřejmě myslí celá čísla, veličiny jsou pro moderního čtenáře čísla reálná. Předchozí definici lze tedy interpretovat takto: Reálná čísla $r (= \frac{a}{b})$ a $s (= \frac{c}{d})$ jsou si rovna, pokud pro každé racionální číslo $q (= \frac{m}{n})$ platí $r \stackrel{\geq}{\approx} q \iff s \stackrel{\geq}{\approx} q$. Nejpozději nyní by se nám měla vybavovat konstrukce reálných čísel z racionálních pomocí tzv. Dedekindových řezů!⁹

Přímo z věty VI.1 plyne následující tvrzení, na které se budeme ještě mnohokrát odkazovat:

⁹Reálné číslo r jako Dedekindův řez je určeno množinou všech racionálních čísel, které jsou $\leq r$ (resp. $\geq r$). Rovnost reálných čísel je tak definována jako rovnost odpovídajících množin racionálních čísel.

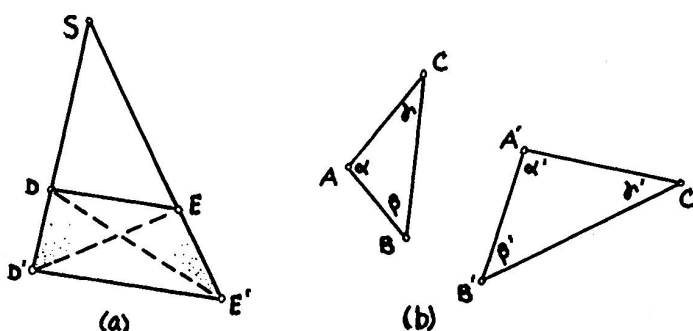
Věta (VI.2). *Přímka je rovnoběžná s jednou stranou trojúhelníku právě tehdy, když protíná zbylé dvě strany úměrně.*

V důkaze se odkazujeme na obr. 4.25. Podle věty VI.1 víme, že

$$\begin{aligned}SD' : SD &= \text{obsah}(SD'E) : \text{obsah}(SDE), \\SE' : SE &= \text{obsah}(SE'D) : \text{obsah}(SED).\end{aligned}$$

Přítom jmenovatelé na pravé straně je zřejmě titíž. Trojúhelníky $SD'E$ a $SE'D$ mají společný průnik SDE , protože tyto trojúhelníky mají stejný obsah, právě když mají stejný obsah trojúhelníky DED' a DEE' . Trojúhelníky DED' a DEE' však mají společnou stranu, tudíž (podle I.38–39) mají stejný obsah právě tehdy, když mají stejnou výšku. Celkem tedy dostáváme, že

$$SD' : SD = SE' : SE \iff D'E' \parallel DE. \quad \square$$



Obrázek 4.25: [A] VI.2: $SD' : SD = SE' : SE \iff D'E' \parallel DE$.

VI.4–5: $\alpha = \alpha'$ a $\beta = \beta'$ a $\gamma = \gamma' \iff b : c = b' : c'$ a $c : a = c' : a'$ a $a : b = a' : b'$.

Odtud dále plyne, že určující vztahy v definici podobnosti trojúhelníků jsou navzájem ekvivalentní:

Věta (VI.4–5). *Trojúhelníky mají po dvou shodné vnitřní úhly, právě když strany u shodných úhlů jsou úměrné.*

Důkaz této věty není nijak složitý, protože jej necháváme jako užitečné cvičení. . .

Ekvivalenci VI.4–5 lze sugestivněji přepsat jako

$$\alpha = \alpha' \text{ a } \beta = \beta' \text{ a } \gamma = \gamma' \iff a' : a = b' : b = c' : c.$$

Pro podobné trojúhelníky je tedy poměr $a' : a = b' : b = c' : c$ konstantní (kladné) reálné číslo, které se nazývá *koeficient podobnosti*.

Úplně na závěr uvádíme základní tvrzení týkající se obsahů podobných útvarů:

Věta (VI.19–20). *Poměr obsahů podobných trojúhelníků (mnohoúhelníků) je stejný jako poměr druhých mocnin jejich odpovídajících stran.*

Na rozdíl od předchozího je zdůvodnění této věty poněkud rafinovanější a obsahuje nejméně jeden krok, který by se dal nazvat trikem. Nemělo by však překvapovat, že na závěr argumentace se

odkazuje na základní větu VI.1. Rozšíření věty na podobné mnohoúhelníky se udělá standardně pomocí triangulace.

Pomocí koeficientu podobnosti lze Větu VI.19 formulovat takto: Obsahy podobných trojúhelníků s koeficientem podobnosti k jsou změněny k^2 -krát. Pokud je náhodou koeficient roven 1, potom jsou trojúhelníky shodné, zejména mají stejný obsah.

Poznámky

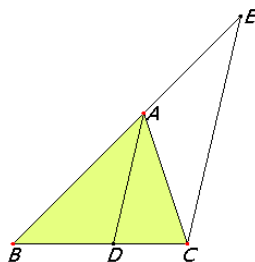
Celá teorie podobnosti je od začátku do konce závislá na postulátu (v) o rovnoběžkách (odst. 4.4). To je patrné z předchozích odkazů na věty o obsahích trojúhelníků (I.38–39), jejichž zdůvodnění se neobejde bez věty o střídavých úhlech (I.29)!

Pomocí podobností trojúhelníků je možné dokázat řadu dříve zmiňovaných tvrzení úspornějším, i když ve své podstatě méně elementárním způsobem. Typickými příklady jsou např. Eukleidovy věty o odvěsně a o výšce (sr. s větou VI.8).

Trojúhelníky SDE a $SD'E'$ na obr. 4.25 jsou nejen podobné, ale v tomto případě navíc *stejnolehlé*. Stejnolehlost je nejsympatičtější (a v jistém smyslu základní) podobnost, kterou budeme zaměstnávat velice často. Stejnolehlost je určena středem, v našem případě S , a koeficientem, který je určen poměrem $SD' : SD = SE' : SE$ (podrobnosti hledejte v odst. 9.3).

4.17 Cvičení

- (1) Dokažte ekvivalenci VI.4–5.
- (2) Dokažte větu VI.3, viz obr. 4.26.



Obrázek 4.26: [E_J] VI.3: AD je osou úhlu $BAC \iff DB : DC = AB : AC$.

- (3) Dokažte tvrzení IV.10 pomocí podobnosti trojúhelníků.
- (4) Najděte v textu další tvrzení, k jejichž zdůvodnění bylo — nebo může být — užito podobnosti.



4.18 Sestrojitelné veličiny

V předchozím textu jsme se několikrát dotkli problému sestrojitelnosti reálných veličin. Konstrukci té či oné veličiny chápeme jako konstrukci reálného čísla, které onu veličinu zastupuje. Vzhledem k tomu, že v eukleidovské geometrii neexistuje žádná kanonická jednotka, musí být tato nějak specifikována předem. Základní úloha, které chceme v tomto odstavci porozumět, zní:

- Rozhodněte, zda je dané reálné číslo sestrojitelné. Pokud ano, tak jej — vzhledem k dané jednotce — sestrojte.

Jako obvykle máme na mysli výhradně konstrukce pomocí eukleidovského pravítka a kružítka.

Reálná čísla reprezentujeme úsečkami, jejichž velikosti jsou vždy nezáporné. Pokud tedy potřebujeme operovat se zápornými veličinami, musíme u odpovídajícím úseček jejich zápornou hodnotu nějak označit...

Opakování

Algebraické operace, které umíme s pravítkem a kružítkem reprodukovat, jsou následující:

- **Sčítání** a **odčítání** reálných čísel je z konstrukčního hlediska triviální — odpovídá přikládání a odebrání úseček na přímce (viz např. diskuzi nad obr. 4.10 a 4.11).
- Konstrukci **součinu** dvou reálných čísel umíme zdůvodnit nejméně dvojím způsobem — na obr. 4.6 označme $|AB| = 1$, $|HA| = a$, $|LK| = b$ a $|HL| = x$:

(a) za předpokladu, že na obrázku jsou samé pravoúhelníky, můžeme důsledek věty I.43 formulovat jako

$$a \cdot b = x \cdot 1 \quad \text{neboli} \quad x = a \cdot b.$$

(b) bez ohledu na to, zda jsou na obrázku pravoúhelníky nebo pouhé rovnoběžníky, z podobnosti trojúhelníků HAB a HLK podle věty VI.4 plyne

$$a : 1 = x : b \quad \text{neboli} \quad x = a \cdot b.$$

Podíl dvou reálných čísel lze sestrojít obdobně, akorát by se v konstrukcích prohodil význam některých veličin, např. b a x . Je zřejmé, že v obou případech můžeme počet čar ve vlastní konstrukci podstatně eliminovat.

- Eukleidova věta o odvěsně, resp. o výšce (ve specifických případech také věta Pythagorova) poskytuje návod ke konstrukci **druhé odmocniny** z libovolného reálného čísla — viz např. obr. 4.7: pokud je $|BE| = 1$, $|EF| = a$ a $|EH| = x$, potom

$$1 \cdot a = x^2 \quad \text{neboli} \quad x = \sqrt{a}.$$

Závěr

Z uvedeného opakování plyne, že jsou-li a a b sestrojitelná reálná čísla, pak také

$$a + b, a - b, a \cdot b, a : b, \sqrt{a}$$

jsou sestrojitelná čísla. Opakováním těchto operací můžeme sestrojovat další a další čísla — ve skutečnosti platí, že takto lze vyčerpát všechny eukleidovsky sestrojitelné veličiny:

Věta. *Reálné číslo je sestrojitelné eukleidovským pravítkem a kružítkem právě tehdy, když jej lze vyjádřit pomocí konečného počtu 1 a operací $+$, $-$, \cdot , $:$, $\sqrt{\quad}$, příp. závorek.*

Jeden směr této ekvivalence máme rozmyšlený, zdůvodnění opačného směru je veskrze algebraické a vypadá zhruba takto:¹⁰

Začneme s úsečkou představující jednotku a pomocí pravítka a kružítka sestrojujeme další body, resp. úsečky. Jakýkoli eukleidovsky sestrojitelný bod v rovině vzniká z již sestrojených bodů jako průnik dvou přímek, průnik přímky s kružnicí nebo průnik dvou kružnic. Algebraická interpretace každé takové konstrukce vede k řešení soustavy dvou rovnic stupně nejvýše dva ve

¹⁰Přesnější formulace lze najít např. v [Ha, Mar₂] nebo [L].

dvou proměnných. Eliminací jedné proměnné dostaneme kvadratickou rovnici, jejíž koeficienty jsou sestrojitelná čísla! Kořeny libovolné kvadratické rovnice však lze vyjádřit pomocí jejích koeficientů a výše zmiňovaných algebraických operací, viz (4.6). Odtud plyne, že souřadnicové vyjádření každého nového bodu, a tedy i velikosti všech sestrojovaných úseček, jsou uvedeného tvaru. . . \square

Poznámky

Vzhledem k dané jednotce lze pomocí operací $+$ a $-$ sestrojiti libovolné celé číslo, pomocí operací \cdot a $:$ lze sestrojiti libovolné racionální číslo. Spolu s operací $\sqrt{\quad}$ lze sestrojiti mnoho iracionálních čísel, nikoli však všechna iracionální, natož pak transcendentní čísla. Ať děláme, co děláme, drtivá většina reálných čísel eukleidovsky sestrojiti **nelze!** Nejzajímavější důsledky tohoto pozorování komentujeme v dodatku 20.1.

Výše uvedenou charakterizaci sestrojitelných veličin samozřejmě v Základech nenajdeme. Související úlohou, která v Základech vyřešená je, je určení kořenů obecné kvadratické rovnice (viz VI.28–29). Algebraické odvození začíná doplněním do čtverce:


$$\begin{aligned}x^2 + bx + c &= 0, \\x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c, \\ \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c.\end{aligned}$$

což po odmocnění a úpravě vede k dobře známému vyjádření

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \quad \text{neboli} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \quad (4.6)$$

Pokud by vedoucí koeficient nebyl 1, můžeme jím hned na začátku celou rovnici dělit a potom jen předchozí úpravy zreprodukovat. . .

4.19 Cvičení

- (1) Vzhledem k dané jednotce sestrojte $\frac{2\sqrt{6}}{3}$, $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$ apod.
-  (2) Sestrojte kořeny obecné kvadratické rovnice.
- (3) Zkuste svoje řešení předchozí úlohy nějak optimalizovat — viz např. rovnici (4.2) a její řešení na obr. 4.12.

4.20 Trocha stereometrie, objemy těles a obsah kruhu

Stereometrie začíná v Základech XI. knihou, v jejímž úvodu jsou definice základních prostorových útvarů, jejich vztahů a vzájemných poloh. Naši pozornosti by neměly uniknout definice *rovnoběžnosti* a *kolmosti* přímek a rovin, příp. jejich pozdější charakterizace. Zde je několik ukázek, na které se budeme odkazovat na několika místech v kapitole IV:

- Přímky jsou *rovnoběžné*, pokud leží v téže rovině a nemají žádný společný bod.
- Pokud jsou vedlejší úhly vymezené dvěma protínajícími se přímkami shodné, pak každý z těchto úhlů se nazývá *pravý* a přímky se nazývají *kolmé*.

- Neprotínající se přímky jsou *kolmé*, pokud rovnoběžka k jedné přímce protínající přímku druhou je k ní kolmá.
- Přímka je *kolmá* k rovině, pokud je kolmá ke všem přímkám, které v ní leží.
- Dvě roviny jsou *kolmé*, pokud přímky, které leží v jedné z těchto rovin a jsou kolmé k průsečnici rovin, jsou také kolmé ke druhé rovině (ekvivalentně: pokud jedna z rovin obsahuje přímku, která je kolmá ke druhé rovině).
- Roviny jsou *rovnoběžné*, pokud se neprotínají.
- Apod.

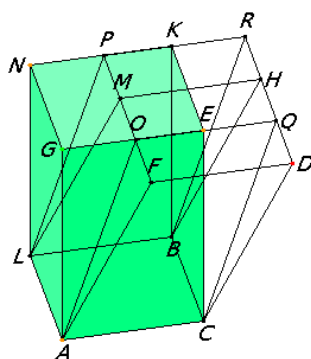
Ve zbytku tohoto odstavce uvádíme pouze několik poznámek, které se týkají objemů základních těles a obsahu kruhu.

Objemy jednoduše

Podstatná část XI. knihy se věnuje **rovnoběžnostěnům** a jejich objemům. Celá teorie je velmi analogická tomu, co známe z I. knihy pro rovnoběžníky — typické tvrzení je na obr. 4.27. Odtud zejména vyplývá, že:

- *Dva rovnoběžnostěny mají stejný objem právě tehdy, když jeden lze rozdělit na části, z nichž lze složit ten druhý.*

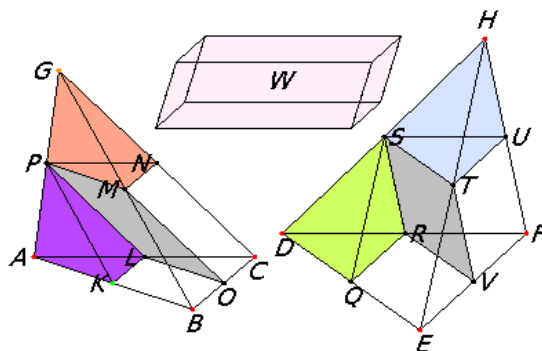
Tento postřeh vypadá jako trojrozměrná analogie věty 4.6 na str. 21, avšak v hodně specifickém provedení.



Obrázek 4.27: [E_J] XI.30: *Rovnoběžnostěny se stejnou základnou a stejnou výškou mají stejný objem.*

Objemy pomocí Eudoxovy metody

Může to vypadat překvapivě, ale diskuze je mnohem komplikovanější, už když se začnou studovat **jehlany**. Základní tvrzení, které se týká objemů jehlanů (jakási trojrozměrná analogie věty VI.1), je na obr. 4.28. Tato věta je však dokázána pomocí Eudoxovy exhaustivní metody, což je prototyp infinitezimálních úvah, jak je známe z matematické analýzy. Přirozenou otázkou je, zda toto tvrzení nelze zdůvodnit elementárněji pomocí stříhání a skládání jako výše. Zajímavý výsledek M. Dehna (1900) ukazuje, že to obecně skutečně nejde:



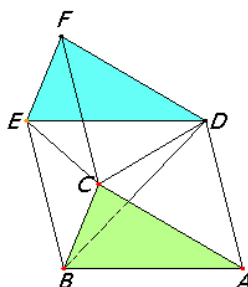
Obrázek 4.28: [E_J] XII.5: *Poměr objemů jehlanů se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich základů.*

- Pro dva mnohostěny se stejným objemem platí, že jeden lze rozdělit na části, z nichž lze složit ten druhý, právě když tyto mnohostěny mají stejný tzv. Dehnův invariant.¹¹

To znamená, že trojrozměrná analogie věty 4.6 obecně neplatí!



Z věty XII.5 snadno plyne věta XII.7, viz obr. 4.29. Teprve poté lze ukázat, že objem obecného jehlanu je třetinový vzhledem k objemu hranolu se stejnou základnou a stejnou výškou. Odtud plyne, že stejný poměr je také mezi objemy kužele a válce, které mají stejnou základnu a stejnou výšku (viz XII.10).



Obrázek 4.29: [E_J] XII.7: *Objem trojbokého jehlanu je roven třetině objemu hranolu se stejnou základnou a stejnou výškou.*

O kruhu a kouli

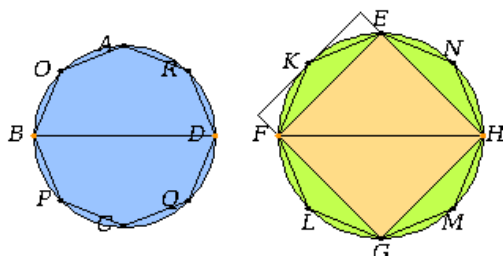
Kromě trojrozměrných těles je ve XII. knize také základní informace o obsahu kruhu. Protože se k tomuto tématu ještě vracíme v odst. 7.2, zformulujeme příslušnou větu společně s analogickým tvrzením pro objem koule:

XII.2 *Poměr obsahů kruhů je stejný jako poměr druhých mocnin jejich průměrů.*

XII.18 *Poměr objemů koulí je stejný jako poměr třetích mocnin jejich průměrů.*

¹¹Podrobnosti lze najít např. v [Ha, podkap. 27].

Obě tato tvrzení jsou dokázána Eudoxovou metodou, o níž jsme se zmiňovali před chvílí: Obsahy (objemy) objektů jsou vyčerpávány mnohoúhelníky (mnohostěny), u nichž příslušné proporce, tj. rovnosti poměrů, známe. Protože se dané objekty vyčerpávají analogicky, jsou odpovídající mnohoúhelníky (mnohostěny) podobné. Základním tvrzením v celé anabázi je proto věta VI.20, kterou jsme citovali v odst. 4.16 (resp. její trojrozměrná analogie XI.33).



Obrázek 4.30: [EJ] XII.2: K obsahu kruhu. . .

Při obvyklém značení můžeme obsah věty XII.2 psát jako

$$S_1 : S_2 = r_1^2 : r_2^2 \quad \text{neboli} \quad S_1 : r_1^2 = S_2 : r_2^2 = \text{konst.} \quad (4.7)$$

a tvrzení XII.18 jako

$$V_1 : V_2 = r_1^3 : r_2^3 \quad \text{neboli} \quad V_1 : r_1^3 = V_2 : r_2^3 = \text{konst.} \quad (4.8)$$

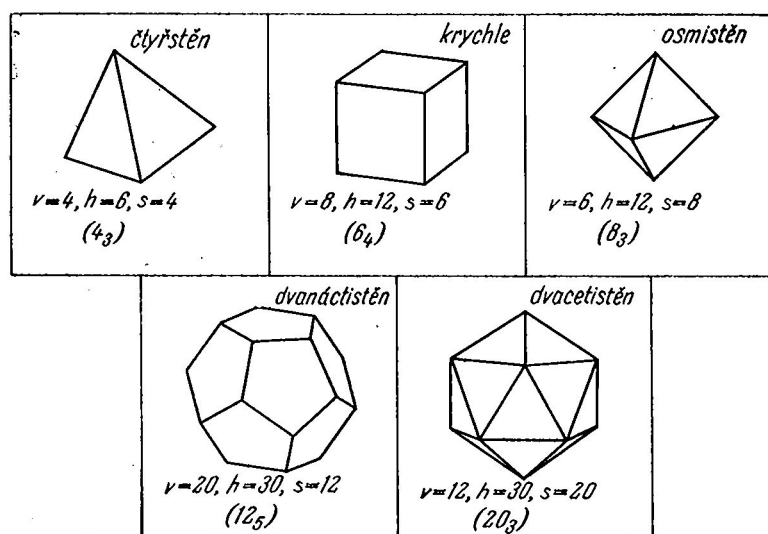
4.21 Platónská tělesa

Celé Základy vrcholí popisem konstrukcí pěti pravidelných konvexních mnohostěnů, jejich klasifikací a diskuzí poměrů jejich stran vzhledem k poloměru opsané sféry (XIII.13–18).

Pravidelný konvexní mnohostěn je konvexní mnohostěn, který má stejný počet stěn kolem každého vrcholu a jehož stěny jsou navzájem shodné pravidelné mnohoúhelníky.

Pravidelné konvexní mnohostěny mají řadu dalších vlastností, které v definici uvedeny nejsou, ale které z ní plynou — mají všechny stěnové úhly shodné, lze je vepsat do koule atd., viz [Ha, podkap. 44]. Pravidelné konvexní mnohostěny jsou známy také jako *Platónská tělesa*¹² a je jich právě pět:

¹²Polopravidelné konvexní mnohostěny jsou známy jako Archimédovská tělesa, pravidelné nekonvexní mnohostěny jako Keplerova tělesa, viz přílohy.



Obrázek 4.31: [Ko] Pravidelné konvexní mnohostěny.

Zdůvodnění, že Platónských těles není více, plyne z následujícího pozorování:

Aby šel z rozvinuté sítě složit konvexní mnohostěn, musí být součet úhlů kolem každého vrcholu ostře menší než plný úhel. Pravidelné konvexní mnohostěny jsou složeny z pravidelných mnohoúhelníků, jejichž vnitřní úhly umíme snadno vypočítat. Odtud vidíme, že Platónská tělesa mohou být složena jedině z trojúhelníků, čtverců nebo pětiúhelníků. Rozborem jednotlivých možností vyčerpáme právě uvedená tělesa. . . \square

V kapitole IV se budeme zabývat otázkou, jak věrně zobrazit Platónská (a jiná) tělesa. K tomu potřebujeme rozumět základním proporcím v jednotlivých tělesech, o čemž je zevrubně pojednáno právě ve XIII. knize. Rozbor čtyřstěnu, krychle a osmistěnu je velmi snadný, pročez je ponechán jako cvičení (viz XIII.13–15). Ve zbytku tohoto odstavce si rozebereme konstrukci pravidelného dvacetistěnu (XIII.16) a dvanáctistěnu (XIII.17). Opakovaně se budeme odkazovat na tvrzení XIII.4 (viz cvičení 4.10(4)) a na tvrzení XIII.10, které jsme parafrázovali jako část věty 4.14 na str. 32:

Věta (XIII.10). *Strany pravidelného pětiúhelníku, šestiúhelníku a desetiúhelníku, jež jsou vepsány do téže kružnice, mají tu vlastnost, že z nich lze vytvořit pravoúhlý trojúhelník (jehož přepona je stranou pětiúhelníku).*

Pravidelný dvacetistěn

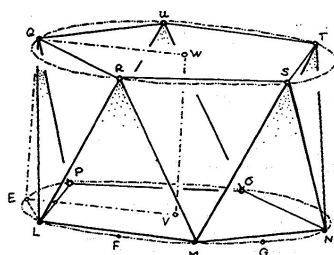
Pravidelný dvacetistěn můžeme sestavit tak, že k bubínkovému základu přidáme dvě čepičky. Bubínkový základ je složen z 10 trojúhelníků, jejichž vrcholy tvoří dva pootočené pravidelné pětiúhelníky, každá z čepiček sestává z 5 trojúhelníků. Aby bylo jasné, jak tyto části správně sestavit, musíme znát jejich výšky, resp. poměry těchto výšek vzhledem k nějaké určující veličině.

Začneme s kružnicí se středem V , na níž sestojíme body L, F, M, G, N, \dots jakožto vrcholy pravidelného desetiúhelníku — vrcholy L, M, N, O, P jsou vrcholy dolního pětiúhelníku, vrcholy E, F, G, \dots představují kolmé průměty horního pětiúhelníku $QRSTU$. K sestrojení dvacetistěnu potřebujeme zjistit výšku bubínku $EQ (= VW)$ a výšku čepičky WZ . Tvrdíme, že platí

$$EQ = EV \quad \text{a} \quad WZ = LE.$$

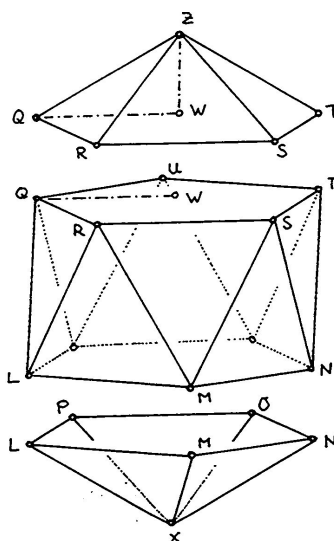
Zdůvodnění je následující:

- (1) Všechny vyznačené trojúhelníky jsou podle předpokladu rovnostranné, zejména QL = strana pravidelného pětiúhelníku vepsaného do dané kružnice. Navíc LE = strana pravidelného desetiúhelníku vepsaného do téže kružnice a trojúhelník LEQ je pravoúhlý. Z tvrzení XIII.10 plyne, že EQ = strana pravidelného šestiúhelníku vepsaného do stejné kružnice, tj. právě její poloměr.



Obrázek 4.32: [A] Pravidelný dvacetistěn poprvé: $EVWQ$ je čtverec.

- (2) Trojúhelník QWZ je pravoúhlý, QZ = strana pravidelného pětiúhelníku a QW = strana pravidelného šestiúhelníku vepsaného do stejné kružnice. Znovu podle XIII.10 zjišťujeme, že WZ = strana vepsaného desetiúhelníku, a tu již máme sestrojenou.

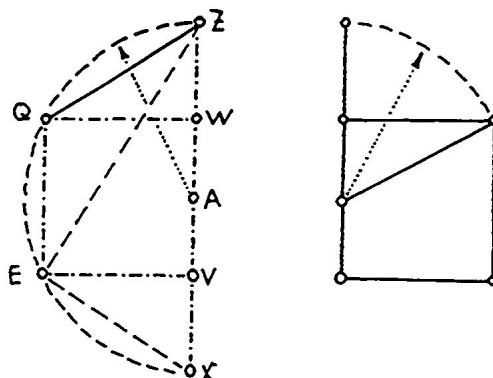


Obrázek 4.33: [A] Pravidelný dvacetistěn podruhé: $WZ = LE$.

- (3) Pro kontrolu ukážeme, že takto sestrojený dvacetistěn je vepsán do koule:

Na obr. 4.23 na str. 33 je naznačeno, jak jsou sestrojeny strany pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku vepsaného do stejné kružnice. Tato konstrukce byla odvozena z konstrukce zlatého řezu podle II.11. Porovnáním s řezem dvacetistěnu vidíme, že body Z, Q, E, X leží

na kružnici. Rotací této kružnice kolem osy ZX dostaneme sféru procházející všemi vrcholy dvacetistěnu.



Obrázek 4.34: [A] Pravidelný dvacetistěn potřetí: řez dvacetistěnem a řez zlatý.

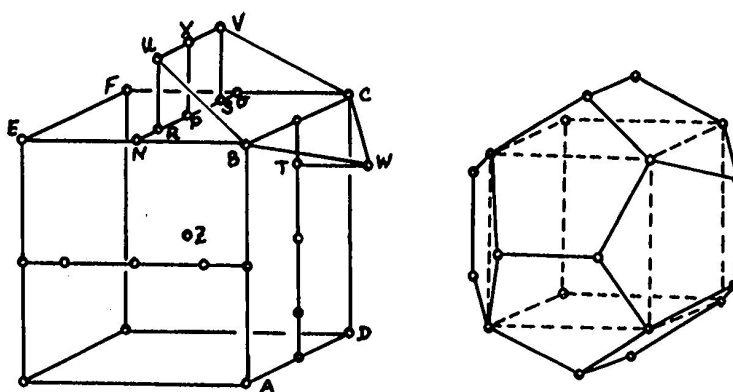
Pravidelný dvanáctistěn

Pravidelný dvanáctistěn může být sestaven tak, že se nad krychlí vhodně postaví pětiúhelníkové střechy. Strana krychle je úhlopříčkou pravidelného pětiúhelníku, který tvoří stěny dvanáctistěnu. To znamená, že stranu dvanáctistěnu snadno sestrojíme jako delší část zlatého řezu strany krychle. Jediné, co potřebujeme ještě znát ke konstrukci dvanáctistěnu, je výška hřebene střechy nad stěnou krychle.

Začneme s krychlí, jejíž stěnu $BCFE$ rozpůlíme úsečkou NO . Bod P je středem NO a bod R je sestaven jako zlatý řez úsečky PN . Hřeben UV je kolmo nad úsečkou RS a potřebujeme určit, jak má být přesně vysoko. Tvrdíme, že pokud sestrojíme U a V tak, aby

$$SV = RU = RP,$$

a že pokud zopakujeme stejnou konstrukci nad každou stěnou krychle, dostaneme pravidelný dvanáctistěn.



Obrázek 4.35: [A] Pravidelný dvanáctistěn: $RU = RP =$ zlatý řez PN .

Zdůvodnění je následující:

- (1) Ukážeme, že body $UBCWV$ leží v jedné rovině:

Protože úsečky UV a BC jsou rovnoběžné, stačí, když ukážeme, že střed X úsečky UV , střed H úsečky BC a bod W leží na jedné přímce. Z tohoto důvodu nyní zaostříme naši pozornost na trojúhelníky HPX a WTH . Z konstrukce plyne, že oba trojúhelníky jsou pravoúhlé a platí

$$PH : PX = PN : PR = PR : RN = TW : TH$$

(první a třetí rovnost odkazuje na rovnost úseček, druhá rovnost je z definice zlatého řezu). To znamená, že tyto trojúhelníky jsou podobné. Protože strany PX a TH jsou rovnoběžné, jsou také ostatní dvojice odpovídajících si stran rovnoběžné, a protože strany XH a HW mají společný bod, leží body X, H, W na jedné přímce.

- (2) Ukážeme, že pětiúhelník $UBCWV$ je pravidelný:

Nejprve ukážeme, že platí rovnost $BU = UV$. Z konstrukce víme, že $RP = RU$ je delší částí zlatého řezu úsečky $PN = BN$. V následující posloupnosti úprav se postupně odkazujeme na Pythagorovu větu v trojúhelníku BRU , Pythagorovu větu v trojúhelníku BNR , rovnost $BN = PN$, větu XIII.4 a rovnost $RU = RP$:

$$\begin{aligned} BU^2 &= BR^2 + RU^2 = BN^2 + NR^2 + RU^2 = \\ &= (PN^2 + NR^2) + RU^2 = 3PR^2 + RU^2 = 4PR^2. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $BU = 2PR = UV$. Stejným způsobem se zdůvodní, že ostatní strany pětiúhelníku jsou stejné.

Podobnými úpravami jako před chvílí lze zdůvodnit, že $BV = BC$. Odtud podle věty SSS plyne, že trojúhelníky BUV a BWC jsou shodné, tudíž vnitřní úhly u vrcholů U a W jsou shodné. Stejným způsobem lze zdůvodnit, že ostatní vnitřní úhly pětiúhelníku jsou stejné — pětiúhelník je tedy pravidelný.

- (3) Pro kontrolu, že sestrojený dvanáctistěn je vepsán do koule, stačí ukázat, že vzdálenost středu krychle je stejná od všech vrcholů dvanáctistěnu. Opětovným užitím Pythagorovy věty a věty XIII.4 lze skutečně ukázat, že

$$ZB^2 = ZU^2 = 3BN^2. \quad (4.9)$$

4.22 Cvičení

- (1) Dokažte, že platí (4.9).
- (2) Odvoďte vztah mezi stranou pravidelného dvacetistěnu a poloměrem opsané sféry.
- (3) Řešte tutéž úlohu pro ostatní Platónská tělesa a porovnejte s vyjádřením v XIII.18.
- (4) Popište možné konstrukce ostatních Platónských těles.



5 Úloha Apollóniova a úlohy příbuzné

Úkolem obecné Apollóniovy úlohy je sestrojiti kružnici, která se dotýká tří daných kružnic. Sestrojit jako obvykle znamená sestrojiti eukleidovským pravítkem a kružítkem. To znamená, že se pídíme hlavně po dotykových bodech, teprve poté kreslíme výslednou kružnici. Jako limitní případy uvažujeme místo daných kružnic také body a přímky v různých kombinacích. V závislosti na

vzájemných polohách tří daných objektů, může mít úloha různé počty řešení — v nejobecnějším případě osm.

Původní Apollóniovo (kolem 250 př.K.) řešení se nezachovalo, několik poznámek je známo díky Pappovy z Alexandrie (kolem 400). Následující výklad částečně sleduje rekonstrukci podle F. Viëta (kolem 1600), kde se zejména užívá dilatace k redukci obecnějších případů. V této podkapitole představíme řešení nejjednodušších úloh tohoto typu a jejich drobná zobecnění. Až se v odst. 9.5 naučíme něco o kruhové inverzi, budeme schopni řešit Apollóniovu úlohu v jakékoli obecnosti, viz cvičení 9.8. Tento přístup je spojován se jménem J. Petersena (1879).

Metod řešení Apollóniový úlohy však existuje daleko víc, o některých z nich se zmiňujeme ještě v dodatku 21.

5.1 Pomocné konstrukce a postřehy

U dotkových — tedy i Apollóniových — úloh bude velmi často výhodné uvažovat místo obyčejného dotyku dotyk orientovaný. Tím se zpravidla zpřehlední řešení úlohy, přičemž všechna (neorientovaná) řešení lze vždy vyčerpát kombinováním všech možných orientací daných objektů. V takových případech budeme místo o kružnicích a přímkách mluvit o cyklech a paprscích:

Cyklus = orientovaná kružnice, *paprsek* = orientovaná přímka.

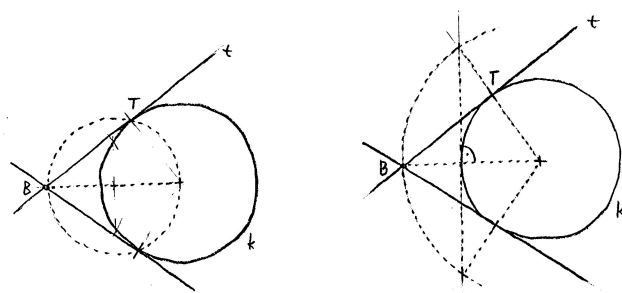
Základní pomocné úlohy, které v souvislosti s Apollóniovými úlohami budeme potřebovat, se týkají konstrukcí tečen ke kružnicím (příp. paprsků k cyklům).

Tečna z bodu ke kružnici

V závislosti na vzájemné poloze bodu a kružnice může mít úloha 0, 1, resp. 2 řešení, a to právě když daný bod leží uvnitř, na, resp. vně kružnice. Jediným netriviálním případem je ten poslední jmenovaný, jehož konstrukční řešení jsme zmiňovali již ve cvičení 4.13. Tuto úlohu umíme řešit dvojím způsobem, viz obr. 5.36:

(a) pomocí Thaletovy kružnice (III.31),

(b) pomocí jisté souměrnosti (III.17).



Obrázek 5.36: Tečna z bodu B ke kružnici k : (a) pomocí Thaletovy kružnice; (b) pomocí souměrnosti.

Společné tečny dvou kružnic

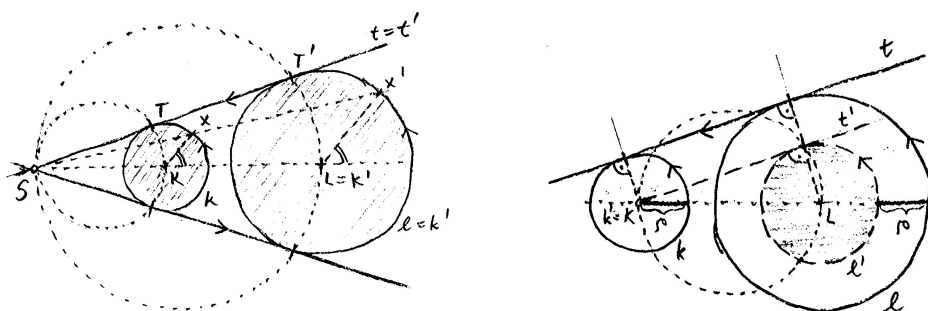
Konstrukci společných tečen ke dvěma daným kružnicím lze redukovat na předchozí konstrukci, a to několikerým způsobem:

(a) pomocí stejnolehlosti,

(b) pomocí dilatace.

Obě tyto transformace budou hrát významnou roli při řešení Apollóniových úloh. Každé z nich se sice věnujeme až v odstavcích 9.3 a 9.7, ale už nyní je budeme volně používat. V souvislosti se stejnolehlostí odkazujeme pouze na fakt, že každé dvě kružnice jsou stejnolehlé, a to dvojnásobným způsobem. U dilatací poprvé musíme uvažovat orientované kružnice neboli cykly. Dilatací cyklu o nějakou hodnotu ρ vznikne cyklus, který je soustředný s daným cyklem a jehož poloměr je o ρ větší, příp. menší v závislosti na znaménku ρ a orientaci.

V závislosti na vzájemné poloze kružnic může mít úloha od 0 do 4 řešení. Pokud hledáme tečné paprsky ke dvěma cyklům, má úloha nejvýše 2 řešení; řešení jedné takové úlohy je na obr. 5.37.



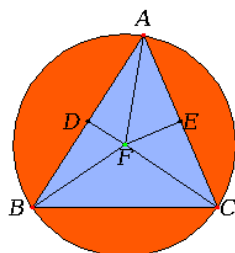
Obrázek 5.37: Společné orientované tečny ke dvěma cyklům k, l : (a) pomocí stejnolehlosti; (b) pomocí dilatace.

5.2 Nejjednodušší případy

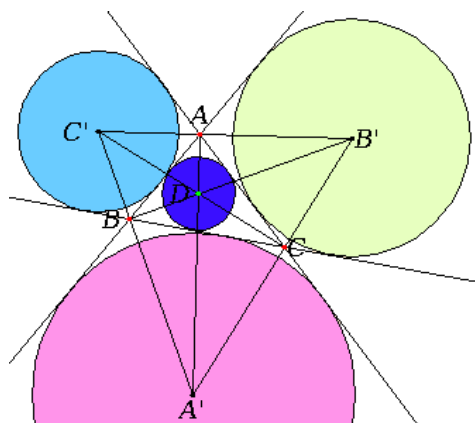
V prvních čtyřech úlohách jsou v zadání pouze body (B) nebo přímky (P).

BBB

Kružnice procházející třemi danými body (v obecné poloze) je právě kružnice opsaná trojúhelníku, viz IV.5. Sestrojit střed hledané kružnice znamená sestavit 2–3 osy úseček. Pro různé nekolineární body má úloha jediné řešení.

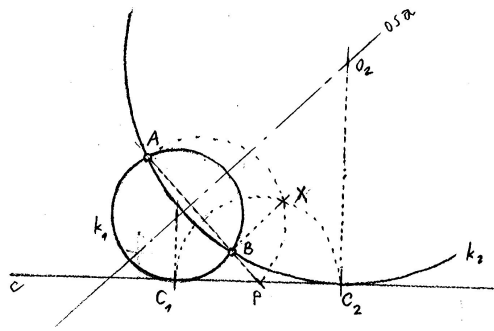
Obrázek 5.38: [E_J] IV.5: Kružnice opsaná trojúhelníku.**PPP**

Jedna z kružnic, která se dotýká tří daných přímek (v obecné poloze), je kružnice vepsaná trojúhelníku, viz IV.4. Sestrojit řešení znamená sestrojit několik **os úhlů**. Úloha má nejvýše čtyři řešení.

Obrázek 5.39: [E_J] IV.4: Kružnice vepsaná mezi tři přímky.**BBP**

Tuto úlohu jsme řešili jako cvičení 4.13(6) pomocí postřehů založených na **mocnosti** bodu ke kružnici: Každý bod na přímce AB má stejnou mocnost ke všem kružnicím procházejícím body A, B ; řešení k se navíc dotýká přímky c , pro bod $P = AB \cap c$ tedy platí $PA \cdot PB = PC^2$. Stačí sestrojit velikost úsečky PC , kterou nanese na přímku c .

Úloha má nejvýše dvě řešení.

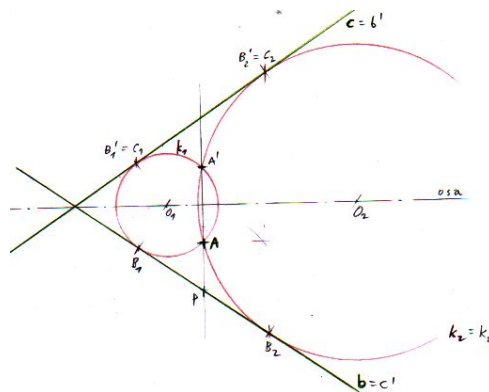


Obrázek 5.40: Řešení BBP pomocí mocnosti: (1) P je průsečík přímek AB a c ; (2) velikost $|PC| = |PX|$ je sestrojena pomocí Eukleidovy věty o odvěsňě; (3) kružnice k je určena body A, B, C .

BPP

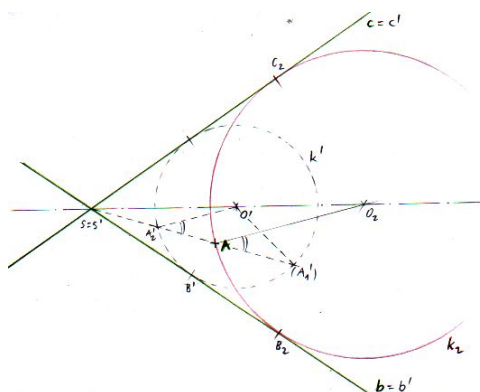
Tady nás napadají hned dva elementární způsoby řešení. Úloha má nejvýše dvě řešení.

- (a) Postřeh: Každé řešení je samo k sobě **symetrické** podle naznačené osy úhlu. Stačí sestrojít symetrický bod A' , zapomenout na jednu přímku a řešit úlohu BBP, kterou již umíme.



Obrázek 5.41: Řešení BBP pomocí osové souměrnosti: (1) A' je symetrický k A podle osy; (2) k je kružnice, která prochází body A, A' a dotýká se b (úloha BBP); (3) body dotyku s přímkami b a c jsou symetrické podle osy.

- (b) Postřeh: Dvě kružnice řešení jsou **stejnolehlé** se středem stejnohlosti v průsečíku daných přímek. Obecněji, k je stejnohhlá (se tímž středem) s libovolnou kružnicí, která se dotýká b a c (a leží ve správném kvadrantu).



Obrázek 5.42: Řešení BPP pomocí stejnolehlosti: (1) k' je libovolná kružnice, která se dotýká b a c ; (2) k' chápeme jako stejnolehlý obraz k : A' je průsečík polopřímky SA s kružnicí k' ; (3) střed O a dotykové body B, C kružnice k , která je řešením, odpovídá středu O' a dotykovým bodům B', C' kružnice k' .

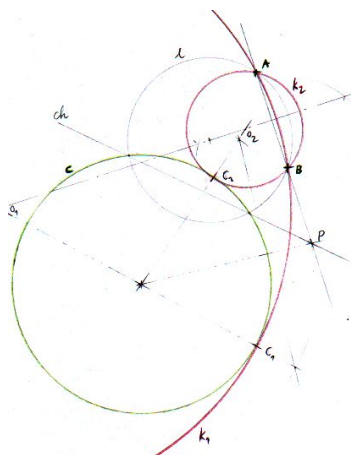
5.3 Mírná zobecnění

Uvádíme první dvě úlohy, kde se v zadání objevuje kružnice (K).

BBK

Můžeme řešit podobně jako BBP: Každý bod na přímce AB má stejnou **mocnost** ke všem kružnicím procházejícím body A, B ; řešení k se navíc dotýká c , na přímce AB tedy existuje bod (P), který má tutéž mocnost také ke kružnici c . Stačí sestrojít P a odtud tečny ke kružnici c .

Úloha má nejvýše dvě řešení.



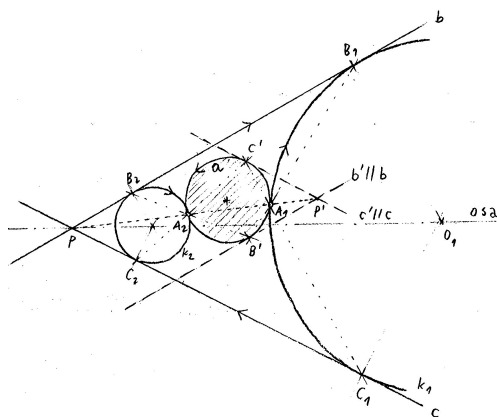
Obrázek 5.43: Řešení BBK pomocí mocnosti: (1) l je libovolná kružnice procházející A, B ; (2) ch je chordála kružnic l a c ; (3) bod P je průsečíkem chordály a přímky AB ; (4) C je dotykový bod tečny z bodu P ke kružnici c ; (5) kružnice k je určena body A, B, C .

PPK

Tento typ úlohy umíme s dosavadními dovednostmi řešit alespoň dvěma způsoby. Úloha má nejvýše osm řešení.

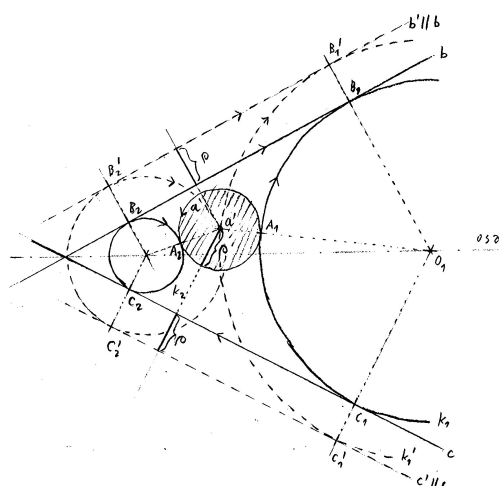
Vzhledem ke zvoleným orientacím jako na obrázcích níže má úloha dvě řešení.

- (a) Zobecnujeme řešení BPP(b): Každé dvě kružnice jsou **stejnolehlé**. Nyní se díváme na kružnici danou a kružnici řešení — stačí určit střed stejnohlosti A .



Obrázek 5.44: Řešení PPK pomocí stejnohlosti: (1) b' a c' jsou přímky rovnoběžné s b a c , které se dotýkají kružnice a ; (2) b' a c' chápeme jako stejnohlelé obrazy přímek b a c : střed stejnohlosti $A = A'$ je průsečíkem přímky PP' s kružnicí a ; (3) střed O a dotykové body B, C cyklu $k = a'$, který je řešením, odpovídá středu cyklu a a pomocným dotykovým bodům B', C' .

- (b) Pomocí vhodné **dilatace** lze tento typ úlohy redukovat na výše diskutovaný případ BPP — hodnota ρ určující dilataci je rovna poloměru zadané kružnice a .



Obrázek 5.45: Řešení PPK pomocí dilatace: (1) b' a c' jsou přímky rovnoběžné s b a c , které jsou posunuté o poloměr kružnice a ; (2) b' a c' chápeme jako dilatované přímky b a c , kružnice a je dilatována do bodu a' ; (3) k' je kružnice, která prochází bodem $a' = A'$ a dotýká se přímek b', c' (úloha BPP); (4) dotykové body kružnice k leží na spojnicích se středem O .

5.4 Další zobecnění a výhled

K řešení obecné Apollóniový úlohy se potřebujeme ještě něčemu naučit, a proto se k problému ještě vrátíme ve cvičení 9.8.

Pomocí nápadů, které jsme zmiňovali v této podkapitole, však můžeme řešit řadu dalších — i když pořád trochu specifických — případů už nyní. Mezi takové případy může patřit např. zadání, v němž se některé z daných objektů dotýkají, příp. je v zadání bod, který leží na některém ze zbylých objektů.¹³ Jiným specifickým případem je zajisté situace, kdy dvě z daných kružnic mají stejný poloměr, viz cvičení.

5.5 Cvičení

(1) Řešte BPK v takové poloze, že daný bod leží na dané přímce.

⇒ (2) Řešte KKK za předpokladu, že dvě z daných kružnic mají stejný průměr.

(3) Řešte podobné úlohy v podobně specifických případech...

6 Kuželosečky

Další tématický celek, který je spojován se jménem Apollóniovým, tvoří kuželosečky. V této podkapitole uvedeme několik ekvivalentních definic elipsy a stručně zmíníme několik užitečných důsledků. Podobné definice a vlastnosti lze zformulovat také pro parabolu a hyperbolu.

¹³Úlohy tohoto typu se občas nazývají *Pappovy úlohy*.

6.1 Elipsa

Elipsa je rovinná křivka, která může být definována mnoha různými způsoby. Některé nejznámější stručně připomeneme a hlavně naznačíme, proč jsou navzájem **ekvivalentní**. V odst. 10.4 ještě přidáme jeden možný pohled na elipsu.

Elipsa je rovinná křivka definovaná některým z následujících ekvivalentních způsobů:

(a) uzavřená kuželo-sečka, tj. řez kuželové plochy takovou rovinou, která protíná všechny její povrchové přímky;

(b) množina bodů v rovině, jež mají konstantní součet vzdáleností od dvou bodů E a F :

$$|EX| + |XF| = \text{konst.};$$

(c) množina bodů v rovině, jež mají konstantní poměr vzdáleností od bodu F a přímky d , přičemž

$$|XF| : |Xd| = \text{konst.} < 1;$$

(d) křivka určená kvadratickou rovnicí (vzhledem k vhodné souřadné soustavě)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{resp.} \quad y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2.$$

Související pojmy a vztahy jsou následující:

- body E a F jsou *ohniska*, přímka d je *řídící přímka* (elipsa má dvě ohniska a dvě řídící přímky),
- kvadratická rovnice v (d) je tzv. *středová*, resp. *vrcholová rovnice* elipsy (pojmenováno podle umístění počátku odpovídající souřadné soustavy),
- a = délka *hlavní poloosy*, b = délka *vedlejší poloosy*, $p = \frac{b^2}{a}$ = *parametr elipsy*,
- konstanta v (b) je rovna $2a$,
- konstanta v (c) je rovna $\frac{e}{a}$, kde $e = \sqrt{a^2 - b^2} =$ *výstřednost* elipsy.

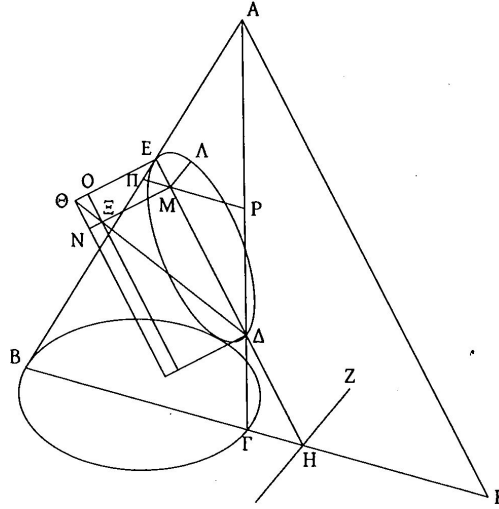
Diskuzi začneme ukázkou z klasického a velmi zevrubného pojednání o kuželosečkách od Apollónia z Pergy. Zde je elipsa definována podle (a), ostatní charakterizace jsou odtud odvozené.

Věta (Apollóniova). *Uvažme kužel s kruhovou podstavou¹⁴ a jeho eliptický řez jako na obr. 6.46. Potom pro libovolný bod Λ na elipse platí*

$$\Lambda M^2 = \Xi M \cdot ME, \tag{6.10}$$

kde M je pata kolmice z Λ na ΔE a Ξ je bod na úhlopříčce pevného přiloženého obdélníku se stranami ΔE a $E\Theta$, kde $E\Theta$ je určená vztahem $\Delta E : E\Theta = AK^2 : (BK \cdot K\Gamma)$.

¹⁴Kužel nemusí být nutně rotační.



Obrázek 6.46: [Š] Ke 13. větě z I. knihy Apollóniových Kuželoseček...

Úsečka $E\Theta$ je sestrojena poněkud uměle, za chvíli však bude jasné, že odpovídá právě parametru p elipsy.

Odvození (6.10) plyne právě z definující rovnosti pro úsečku $E\Theta$ a podobností několika trojúhelníků:

$$\frac{\Delta M}{M\Xi} = \frac{\Delta E}{E\Theta} = \frac{AK}{BK} = \frac{AK}{K\Gamma} = \frac{EM}{M\Pi} = \frac{\Delta M}{MP}.$$

Když levou stranu rozšíříme ME , budou mít poměry na obou stranách stejný číselník, odkud plyne rovnost jmenovatelů:

$$M\Xi \cdot ME = M\Pi \cdot MP.$$

Navíc rovina $\Lambda\Pi P$ je rovnoběžná s podstavou, tudíž řezem kuželové plochy touto rovinou je kružnice a ΠP je její průměr. Podle Thaletovy věty je úhel $\Pi\Lambda P$ pravý a podle Eukleidovy věty o výšce platí:

$$M\Pi \cdot MP = M\Lambda^2.$$

Dosazením do předchozí rovnice tak dostáváme (6.10). □

Důsledek. *Definice (a) a (d) jsou ekvivalentní.*

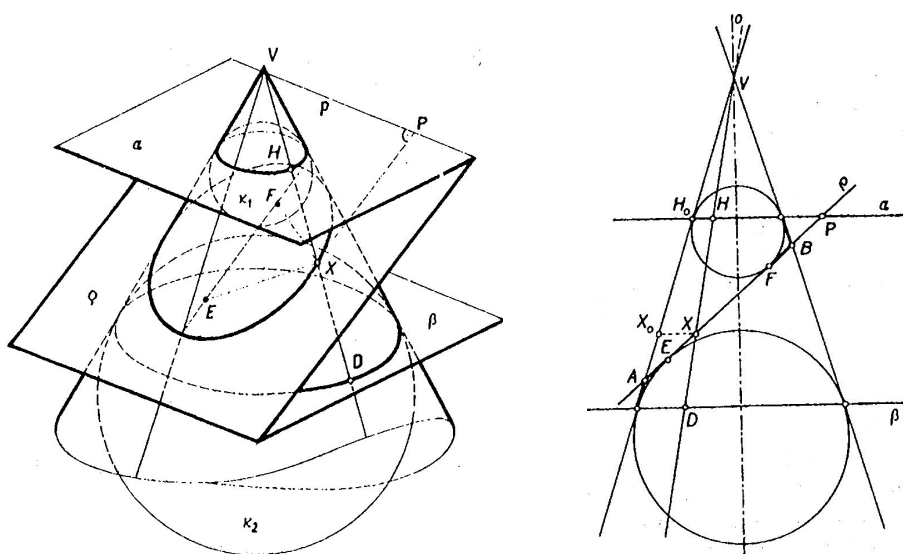
Označíme si $|E\Theta| =: 2p$, dále $|E\Delta| =: 2a$, $|EM| =: x$ a $|M\Lambda| =: y$. Z podobnosti trojúhelníků $\Theta E\Delta$ a $\Theta O\Xi$ umíme při tomto značení vyjádřit $|\Xi M| = 2p - \frac{p}{a}x$. Rovnici (6.10) pak můžeme přepsat jako

$$y^2 = \left(2p - \frac{p}{a}x\right)x,$$

což je právě vrcholová rovnice elipsy v (d). □

Zbývající ekvivalence plynou z následující pozoruhodné věty.

Věta (Dandelinova–Queteletova). *Předpokládejme, že rovinným řezem rotační kuželové plochy je elipsa. Pak ohniska této elipsy jsou právě body dotyku kulových ploch, které se dotýkají jak kužele, tak roviny řezu.*

Obrázek 6.47: [Ku₂] K Dandelinově–Queteletově větě...

Celé následující zdůvodňování je odvozeno z jednoduchého poznatku, že všechny tečny z daného bodu k dané kulové ploše jsou stejně dlouhé (myslíme samozřejmě úsečky od daného bodu k bodům dotyku).

Na obr. 6.47 značí E, F dotykové body kulových ploch s řeznou rovinou, X je libovolný bod na elipse, body H, D jsou průsečíky přímky VX s dotykovými kružnicemi kužele a vepsaných koulí. Chceme ukázat, že platí $|EX| + |XF| = \text{konst.}$, tj., že E a F jsou právě ohniska elipsy:

Podle výše uvedeného poznatku je $|EX| = |DX|$ a $|XF| = |XH|$, tudíž

$$|EX| + |XF| = |DX| + |XH| = |DH|.$$

Protože je kužel rotační, je vzdálenost $|DH|$ stále stejná pro všechny povrchové přímky, což jsme právě měli dokázat. \square

Důsledek. Definice (a), (b) a (c) jsou navzájem ekvivalentní, přičemž řídící přímky elipsy jsou právě průsečnice $\rho \cap \alpha$ a $\rho \cap \beta$ na obr. 6.47.

Ekvivalence (a) a (b) plyne přímo z předchozí věty. Ekvivalence s definicí (c) bude zřejmá, když dokážeme charakterizovat řídící přímky. Pro průsečnici $p = \rho \cap \alpha$, ohnisko F a pro libovolný bod X na elipse chceme ukázat, že platí $|XF| : |Xp| = \text{konst.} < 1$, tj., že p je její řídící přímka.

Vzdálenost $|Xp|$ měříme jako vzdálenost $|XP|$, kde P je pata kolmice z X na p ; v pomocném bočním průmětu vidíme tuto vzdálenost nezkresleně. Před chvílí jsme si uvědomili, že $|XF| = |XH|$; tuto vzdálenost vidíme v bočním průmětu jako velikost pootočené úsečky $|X_0H_0|$ (pro jistotu dodáváme, že $HH_0 \parallel XX_0$). Platí tedy:

$$|XF| : |Xp| = |X_0H_0| : |XP|.$$

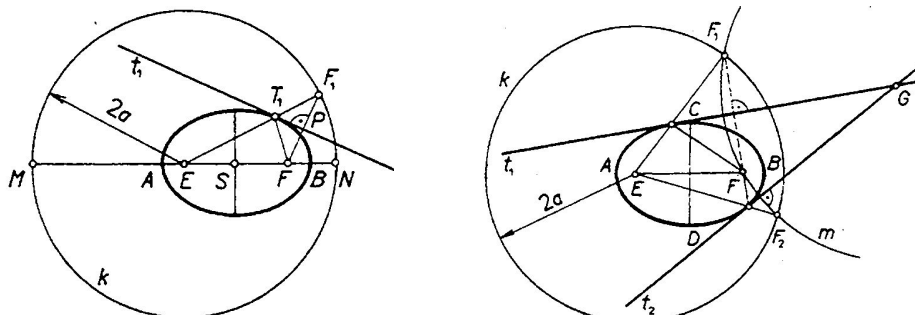
Protože trojúhelníky AH_0P a AX_0X (v bočním průmětu!) jsou stejnohlé, platí:

$$|X_0H_0| : |XP| = |AH_0| : |AP|,$$

což je konstanta (určená výhradně vzájemnou polohou rovin ρ, α a kužele). Navíc je zřejmé, že tato konstanta je < 1 , což jsme měli dokázat. \square

6.2 Další vlastnosti a pojmy

Z ohniskových vlastností elipsy lze vyvodit několik dalších poznatků, které jsou užitečné např. při konstrukcích tečny, viz obr. 6.48.



Obrázek 6.48: [Ku₂] Vlastnosti tečen elipsy...

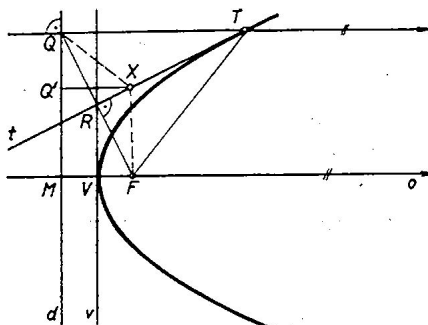
Tyto vlastnosti lze použít k elementárním konstrukcím *pólu*, resp. *poláry* přímky, resp. bodu vzhledem k dané elipse...

Elipsu jako takovou samozřejmě nelze narýsovat pravítkem a kružítkem, pouze libovolné množství na ní ležících bodů...

Pro přibližné určení elipsy v okolí jejích vrcholů se užívá tzv. (*hyper-*)*oskulačních kružnic*...

6.3 Ostatní kuželosečky

Většina výše uvedených poznatků, které jsme zformulovali o elipse, má analogie pro ostatní nedegenerované kuželosečky, tj. *parabolu* a *hyperbolu*. Až bude někdy čas, tak jich tady pár vyjmenujeme...



Obrázek 6.49: [Ku₂] Vlastnosti tečen paraboly...

7 Co ještě v Základech není

Nemá smysl vyjmenovávat, co všechno v Základech není. V této podkapitole chceme upozornit pouze na takové věci, které budou pro nás relevantní v následujícím výkladu, příp. takové věci, ke

kterým se sice vrátet nebudeme, ale které neodmyslitelně patří do klasické aneb školské geometrie.

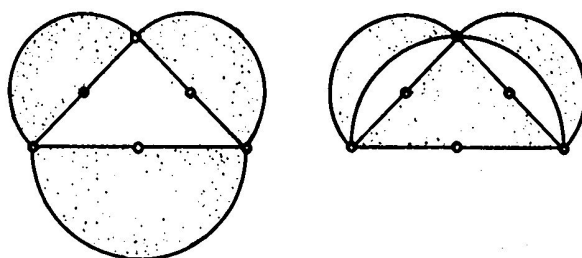
Do první skupiny rozhodně patří **geometrická zobrazení**, zejména transformace v rovině a zobrazení prostoru do roviny. Těmto tématům věnujeme samostatné kapitoly III a IV.

Do druhé skupiny vybíráme následující témata — momentálně tuto látku nijak nerozvádíme, k jejich pochopení, příp. zdůvodnění však není třeba nic víc, než čím jsme se dosud zaobírali.

7.1 Hippokratovy půlměsíce

Následující tvrzení se týká obsahu specifické plochy omezené kružnicemi. Z Thaletovy věty, z Pythagorovy věty a z věty o obsahu kruhu přímo vyplývá, že

Věta (Hippokratovy půlměsíce). *Půlměsíce na obr. 7.50 mají stejný obsah jako daný (libovolný) pravoúhlý trojúhelník.*



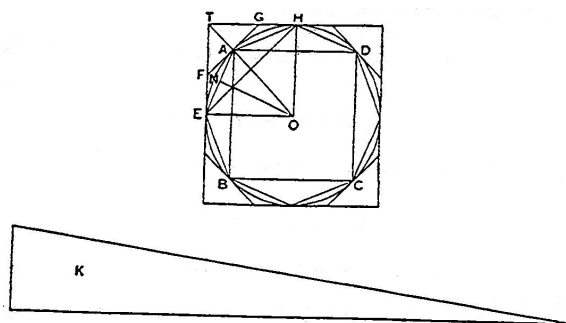
Obrázek 7.50: [A] Vyznačené půlměsíce mají stejný obsah jako odpovídající pravoúhlý trojúhelník.

7.2 Archimédova pojednání o kruhu a kouli

Na konci odst. 4.20 jsme zformulovali dvě tvrzení o obsahu kruhu a objemu koule. Obě tato tvrzení podstatným způsobem doplnil Archimédés, a to následovně:

Věta (Archimédova).

- *Obsah kruhu je roven obsahu pravoúhlého trojúhelníku, jehož jedna odvěsna je shodná s poloměrem, druhá s obvodem kruhu.*
- *Objem koule je roven dvěma třetinám objemu opsaného válce.*



Obrázek 7.51: [HTD] K měření kruhu.

Při obvyklém značení první část věty říká, že $S = r \cdot o$, což spolu s (4.7) dává

$$S = r \cdot o = \text{konst} \cdot r^2.$$

To znamená, že stejná konstanta vystupuje ve vyjádření jak obsahu, tak obvodu kruhu v závislosti na jeho poloměru. Tradičně se tato konstanta značí π , tudíž

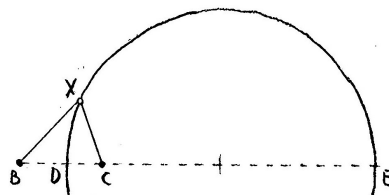
$$o = \pi \cdot r \quad \text{a} \quad S = \pi \cdot r^2.$$

Z druhé části věty plyne, že tatáž konstanta π figuruje (překvapivě) také ve vyjádření objemu koule v závislosti na jeho poloměru:

$$V = \frac{2}{3} \cdot S \cdot 2r = \frac{2}{3} \cdot \pi r^2 \cdot 2r = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

7.3 Apollóniova kružnice

Věta (Apollóniova). *Množina všech bodů v rovině, které mají konstantní poměr vzdáleností od dvou daných bodů, tvoří kružnici.*



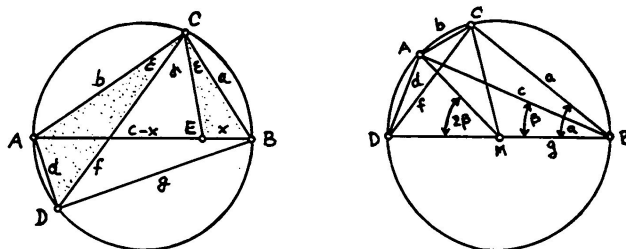
Obrázek 7.52: Apollóniova kružnice:

7.4 Ptolemaiova věta

Věta (Ptolemaiova). *Pro libovolný tětiový čtyřúhelník $ADBC$ platí, že součin velikostí úhlopříček je roven součtu součinů velikostí dvojic protilehlých stran:*

$$AB \cdot CD = AD \cdot CB + AC \cdot BD.$$

Z této věty lze vydedukovat geometrické zdůvodnění tzv. součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus.....



Obrázek 7.53: [A] K Ptolemaiově větě.

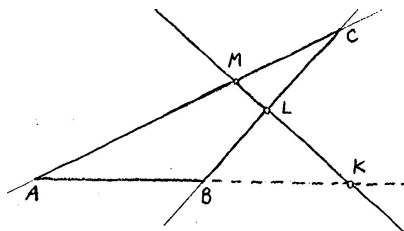
7.5 Menelaova věta

Věta (Menelaova). *Pro libovolný trojúhelník ABC a libovolnou přímku p platí:*

Pokud přímka p protíná přímky AB , BC a CA popořadě v bodech K , L a M , z nichž žádný není vrcholem trojúhelníku, potom

$$(ABK) \cdot (BCL) \cdot (CAM) = -1.$$

Přitom např. číslo (ABK) ve formulaci věty značí poměr vzdáleností $AF : BF$, který je opatřen kladným (záporným) znaménkem právě tehdy, když bod F je vně (uvnitř) úsečky AB .¹⁵



Obrázek 7.54: K Menelaově větě.

7.6 Věta o průsečíku výšek a Eulerova přímka

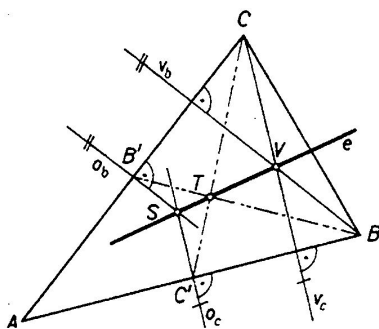
Následující jednoduchý poznatek kupodivu v Základech nenajdeme:

Věta (o průsečíku výšek). *Výšky libovolného trojúhelníku se protínají v jednom bodě.*

Přikládáme ještě jedno související tvrzení:

Věta (Eulerova). *V libovolném trojúhelníku platí, že střed kružnice opsané, těžiště a průsečík výšek jsou kolineární.*

V rovnostranném trojúhelníku samozřejmě body S, T, V splývají; v obecném trojúhelníku tyto body leží na přímce, které se říká *Eulerova*.



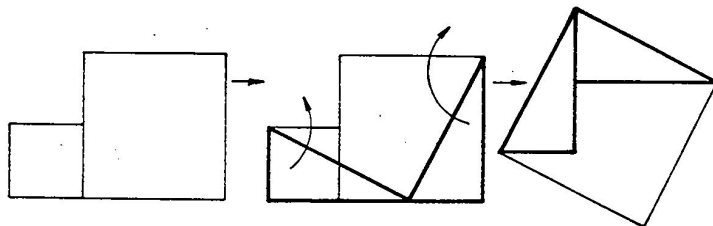
Obrázek 7.55: [Ku₂] Eulerova přímka.

¹⁵Viz též definici na str. 77.

8 Typické úlohy

8.1 Kvadratura mnohoúhelníku

V odst. 4.6 jsme se naučili, jak pro obecný mnohoúhelník sestrojít čtverec se stejným obsahem. Představili jsme jeden z možných způsobů podle [E]. Navíc jsme si uvědomili, že tato stejnoplochost lze vždy realizovat nejnázornějším možným způsobem, a to rozstříháním a přeskládáním daného útvaru. Pro každé konkrétní zadání je vždy vhodné zamýšlet se nad alternativami. Zejména pro specifické mnohoúhelníky lze vymyslet specifická řešení, viz např. následující obrázek:



Obrázek 8.56: [Ku₃] Kvadratura dvou čtverců.

Protože se zde sestruje čtverec, který má stejný obsah jako dva dané čtverce, lze tuto konstrukci interpretovat jako důkaz Pythagorovy věty (sr. s I.47 na str. 18). Pokud byste kvadraturu takového mnohoúhelníku provedli nějakým jiným způsobem, vytvoříte svůj vlastní důkaz této základní geometrické věty...



8.2 Sestrojitelné veličiny

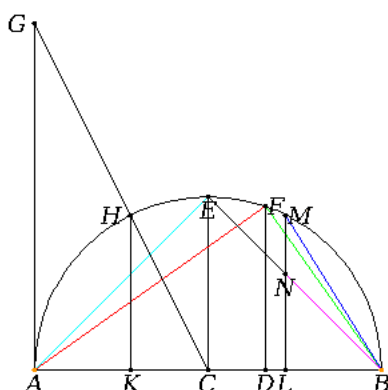
V odst. 4.18 jsme charakterizovali eukleidovsky sestrojitelné veličiny a uvědomili jsme si vztah mezi jejich početním vyjádřením a konstrukcí. Současně jsme si na příkladu uvědomili, že slovná konstrukce odvozená ze zápisu obvykle nebývá ta optimální.

Jinou ukázkou tohoto fenoménu ukážeme na příkladu poměru mezi stranou pravidelného konvexního mnohostranu a průměrem jemu opsané sféry (viz cvičení 4.22). Pokud s značí velikost strany a d průměr opsané sféry, potom

- pro čtyřstěn platí $d^2 : s^2 = 3 : 2$,
- pro osmistěn platí $d^2 : s^2 = 2$,
- pro krychli platí $d^2 : s^2 = 3$,
- pro dvanáctistěn platí $d^2 : s^2 = (3 - \sqrt{5}) : 6$,
- pro dvacetistěn platí $d^2 : s^2 = 2\sqrt{5} : (\sqrt{5} - 1)$.

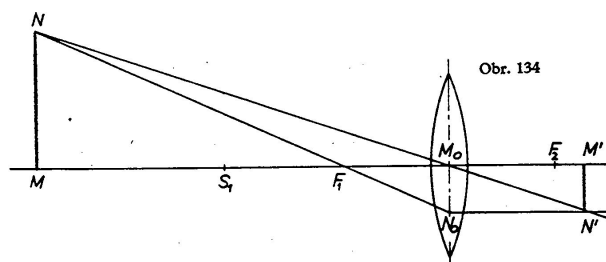
Pro dané d je odpovídající s jednoznačně určeno a z uvedených vyjádření bychom měli tuto veličinu umět sestrojít. Vymyslete nějakou svoji konstrukci, poté najděte sestrojenou veličinu na následujícím obrázku ($d = |AB|$, C je v polovině, K, L jsou ve čtvrtinách a D je ve třetině úsečky AB).



Obrázek 8.57: [E_J] Strany pravidelných mnohostrannů vepsaných do sféry

8.3 Podobnosti

Základní věty teorie podobnosti jsme představili v odst. 4.16. Aplikací těchto tvrzení je celá řada, oblíbené jsou např. úlohy s měřením vzdáleností, resp. velikostí rozličných (často nedostupných) objektů. Na následujícím obrázku je zadání jedné takové úlohy:



Obrázek 8.58: [G9] Obraz předmětu se nachází 14 cm od čočky a je vysoký 3,2 cm, čočka má ohniskovou vzdálenost 10 cm. Určete skutečnou výšku předmětu a jeho vzdálenost od čočky.

V následujících úlohách se na podobnost útvarů odkazujeme ještě při řešení problémů na obr. 8.60 a 8.62.

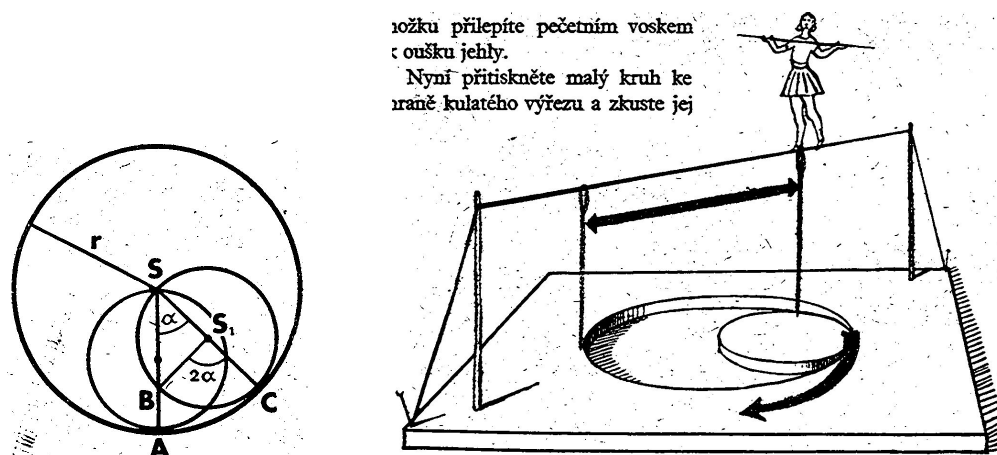
8.4 O kružnicích

Středové a obvodové úhly

Když se kružnice kutálí po přímce nebo jiné kružnici, opisuje každý její bod křivku — v obecném případě cykloidu. Ve specifických případech se může stát, že tato křivka je podstatně jednodušší.

Pokud např. uvažujeme kružnici, která se odvaluje uvnitř kružnice s dvojnásobným poloměrem, potom lze s odkazem na větu o středových a obvodových úhlech (viz odst. 4.12) jednoduše zdůvodnit, že každý její bod se pohybuje po úsečce, která je průměrem velké kružnice. Na následujícím obrázku je náčrtek k důkazu a současně jedna z mnoha praktických aplikací tohoto tvrzení.

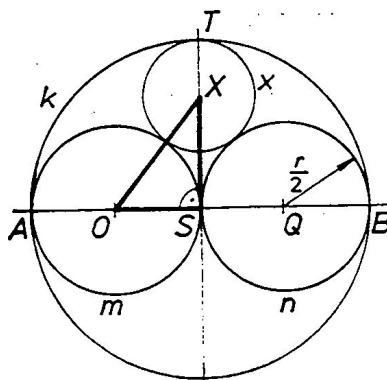




Obrázek 8.59: [Pe] Kotoulení kružnice uvnitř kružnice s dvojnásobným poloměrem.

Specifická úloha Apollóniova

V podkap. 5 jsme se seznámili s několika metodami řešení několika úloh Apollóniova typu. Obecnou úlohu se třemi kružnicemi zatím řešit neumíme, ale specifické zadání na obr. 8.60 zajistí ano.



Obrázek 8.60: [Ku₃] Kružnice k, m, n se navzájem dotýkají, přičemž středy všech tří kružnic jsou kolineární a kružnice m, n mají stejný průměr. Sestrojte kružnici, která se těchto tří kružnic dotýká.

Tuto úlohu umíme řešit několika různými způsoby, a to (a) pomocí pojmu mocnosti bodu ke kružnici, (b) pomocí vhodné stejnolehlosti nebo (c) pomocí dilatace. Kromě toho lze použít (d) osovou souměrnost (trik), příp. můžeme polohu středu hledané kružnice (e) vypočítat a následně tento bod sestrojít. Po přečtení odst. 9.5 můžeme ještě doplnit řešení (f) pomocí kruhové inverze.

Doplňte nějaké další řešení a rozhodněte, který z uvedených postupů lze aplikovat v obecnějším případě, kdy kružnice m, n mají různé průměry. Viz též podobnou úlohu na obr. 8.62.

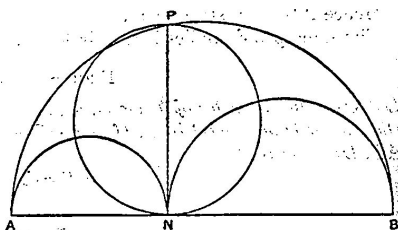
Dvě úlohy Archimédovy

Následující úloha se vrací k obsahu plochy omezené kružnicemi:

Úsečka AB je průměrem velké kružnice, bod N je libovolný bod na AB , bod P leží na půlkružnici tak, že $PN \perp AB$, a úsečky AN, NB jsou průměry dvou menších kružnic. Dokažte, že — nezávisle na poloze bodu N — je obsah oblasti omezené třemi půlkružnicemi stejný jako obsah kruhu s průměrem PN .



(Nápověda: věta o obsahu kruhu a Eukleidova věta o výšce.)

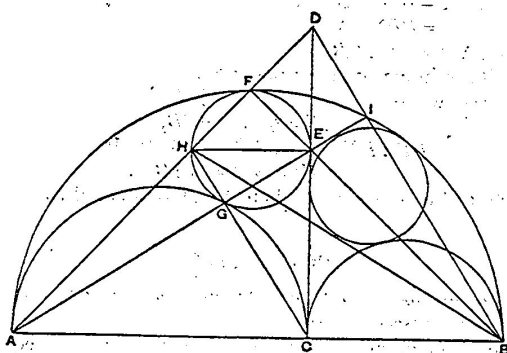


Obrázek 8.61: [HTD] Obsah oblasti omezené půlkružnicemi AB, AN a NB je stejný jako obsah kruhu PN .

Na následujícím obrázku jsou opět tři navzájem se dotýkající půlkružnice AB, AC, CB , kolmice z jejich společného bodu C a dvě další kružnice, z nichž každá se dotýká dvou půlkružnic a kolmice CD . Sestrojit tyto dvě kružnice nejspíš ještě neumíme, avšak pomocí základní teorie podobnosti lze dokázat, že obě tyto kružnice jsou shodné — a to nezávisle na poloze bodu C .



(Nápověda: $HE \parallel AB, CH \parallel BD$ a dvakrát věta VI.2 $\implies AC \cdot CB = AB \cdot HE$.)



Obrázek 8.62: [HTD] Kružnice dotýkající se kolmice CD a půlkružnic AB, AC , je shodná s kružnicí dotýkající se kolmice CD a půlkružnic AB, CB .

V této kapitole zmiňujeme několik užitečných geometrických zobrazení. Některá známe z dřívějších kapitol, několik dalších příkladů doplníme, hlavně však popíšeme jejich obecné vlastnosti a zařadíme do širšího kontextu.

Hlavní páteř tvoří shodná—podobná—afinní—projektivní zobrazení, jimž bychom měli rozumět nejlépe. Kromě toho se zmíníme o kruhové inverzi (jakožto základním konformním zobrazení) a dilataci (jakožto zástupci čeledi kontaktních zobrazení).

Začínáme zpravidla se zobrazeními eukleidovské roviny do sebe, avšak věty a definice, v nichž se o rovině nemluví, jsou platné obecně. Nejpozději před definicí projektivních zobrazení budeme donuceni eukleidovskou rovinu (prostor) rozšířit o body v nekonečnu.

Postřehy a závěry z podkapitoly 9 ještě shrneme a zorganizujeme v podkapitole 10. Zejména si dáváme záležet, abychom pro každou skupinu zobrazení rozuměli tzv. základním zobrazením.

9 Panoptikum geometrických zobrazení

V této podkapitole začínáme tím, že reagujeme na poznámky týkající se transformací v předchozím textu, zejména v podkapitole 5. To je důvod, proč jsou odstavce 9.5 a 9.7 vklíněny právě mezi podobná a afinní zobrazení, ačkoli by podle naznačené hierarchie měly patřit jinam. Na konci tohoto bloku bychom měli být konečně schopni řešit obecnou Apollóniovu úlohu, viz cvičení 9.8.

Odstavce 9.9 a 9.11 budou naopak zásadní v kapitole IV, tzn. při studiu zobrazovacích metod trojrozměrného prostoru do roviny.

9.1 Shodnosti

Dva trojúhelníky jsou shodné, když mají po dvou shodné strany a vnitřní úhly. Charakterizace shodnosti trojúhelníků poskytují věty SUS, SSS apod.

Dva shodné obecné trojúhelníky jednoznačně určují shodné zobrazení roviny do sebe takové, že jeden trojúhelník je obrazem toho druhého.¹ To znamená, že pro libovolný další bod v rovině

¹ Uvědomte si, že např. dva shodné rovnostranné trojúhelníky neurčují shodné zobrazení jednoznačně, a to díky symetriím trojúhelníka jako takového.

jsme schopni sestavit jeho obraz, a to dokonce několika způsoby, viz cvičení. Při těchto konstrukcích si uvědomujeme vlastnosti obecných shodných zobrazení, které připomínáme v závěru tohoto odstavce.

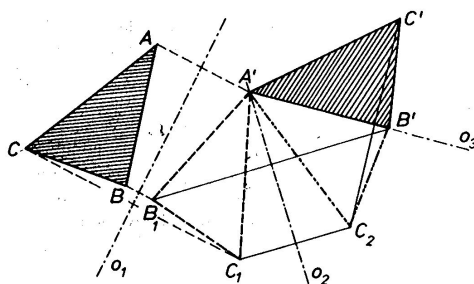
Shodnosti v rovině

Shodností v rovině je pouze několik málo druhů, z nichž většinu známe od nejútlejšího věku — měly by to být shodnosti (a)–(d) z níže uvedeného seznamu. U každé z těchto shodností přesně víme, jak je definována, co jsou její určující prvky a jak sestavit obraz obecného bodu. Základní shodností v rovině je *osová souměrnost*, a to z následujícího důvodu:

Věta. Každou shodnost v rovině lze realizovat jako složení nejvýše tří osových souměrností.

Zdůvodnění věty v nejobecnějším možném případě je naznačeno na obr. 9.1 — shodnost je určena obrazem $A'B'C'$ obecného trojúhelníku ABC :

- Označme o_1 osu úsečky AA' a sestrojme osově souměrný obraz $A_1B_1C_1$ trojúhelníku ABC podle této osy; z volby o_1 plyne, že $A_1B_1C_1 = A'B_1C_1$.
- Označme o_2 osu úsečky B_1B' a sestrojme osově souměrný obraz $A_2B_2C_2$ trojúhelníku $A'B_1C_1$ podle této osy; ze shodností $AB = A_1B_1 = A'B'$ plyne, že o_2 prochází bodem $A' = A_1$, tudíž $A_2B_2C_2 = A'B'C_2$.
- Označme o_3 osu úsečky C_2C' a sestrojme osově souměrný obraz $A_3B_3C_3$ trojúhelníku $A'B'C_2$ podle této osy; z předchozího a ze shodností všech trojúhelníků plyne, že $o_3 = A'B'$, tudíž $A_3B_3C_3 = A'B'C'$. \square



Obrázek 9.1: [Sek] Každá shodnost v rovině je složením nejvýše tří osových souměrností.

Pokud by v zadání nebo v kterémkoli kroku předchozí konstrukce splývalo více bodů nejednou se zadanými obrazy, konstrukce by byla kratší a výsledná shodnost specifitější. Takto jsme schopni klasifikovat všechny druhy shodností, které v rovině můžeme potkat:

- identita* = složení dvou osových souměrností takových, že $o_1 = o_2$,
- posunutí* = složení dvou osových souměrností takových, že $o_1 \parallel o_2$,
- otáčení* = složení dvou osových souměrností takových, že o_1 a o_2 jsou různoběžné,
- (c') *středová souměrnost* = složení dvou osových souměrností takových, že o_1 a o_2 jsou kolmé,

(d) *osová souměrnost* = osová souměrnost,

(e) *posunutá souměrnost* = složení tří obecných osových souměrností jako výše.

Středová souměrnost je otáčení o přímý úhel, proto ji podřazujeme obecnému otáčení. První tři transformace jsou *přímé* (zachovávají orientaci), poslední dvě *nepřímé* (mění orientaci). Pojmenování posledního (generického) druhu je odvozeno z toho, že každou posunutou souměrnost lze realizovat jako složení osové souměrnosti a posunutí. Na obr. 9.1 tento rozklad nemusí být na první pohled patrný, na obr. 9.2 však určitě ano!



Obrázek 9.2: [Mar] Posunutá souměrnost.

Shodnosti obecně

Zobrazení je *shodné*, když zachovává vzdálenosti bodů, tj. pro libovolné body A, B a jejich obrazy A', B' platí:

$$|A'B'| = |AB|. \quad (9.1)$$

Shodná zobrazení mají samozřejmě další vlastnosti, které v definici neuvádíme — dokažte, že z definice plyne, že shodná zobrazení

- zobrazují přímky na přímky,²
- zachovávají odchylky přímků,
- zachovávají obsahy, resp. objemy.


Přímo z definice také plyne, že každé shodné zobrazení je prosté. Shodná transformace roviny (prostoru) do sebe je proto nutně bijektivní. Bijektivní shodné zobrazení se stručně nazývá *shodnost*.

Klasifikace shodností v prostoru je o něco bohatější než v rovině, většinu jejich druhů však zase zná každý. Na rozdíl od transformací v rovině je středová souměrnost v prostoru nepřímá a osová souměrnost (otáčení kolem přímky o přímý úhel) je přímá. Základní shodností v prostoru je *souměrnost podle roviny* (zrcadlení).

Shodností se s úspěchem užívá při řešení mnoha konstrukčních úloh, viz např. příklad je na obr. 5.41.

9.2 Cvičení

(1) Připomeňte si definice všech výše jmenovaných shodností, zejména popište jejich určující prvky.

- (2) Pro dva dané shodné trojúhelníky rozhodněte, zda jsou osově souměrné (zformulujte nějaké přirozené kritérium). 
- (3) Pokud je odpověď v předchozí úloze záporná, pak:
- pojmenujte odpovídající shodnost a popište její určující prvky,
 - vyjádřete tuto shodnost jako složení osových souměrností,
 - alespoň dvojnásobným způsobem sestrojte obraz libovolného dalšího bodu.

9.3 Podobnosti

Dva trojúhelníky jsou podobné, když mají po dvou shodné vnitřní úhly a strany u shodných úhlů mají úměrné. Úvod do teorie podobnosti spolu s charakterizací podobných trojúhelníků máme v odst. 4.16.

Dva podobné (obecné) trojúhelníky jednoznačně určují podobné zobrazení roviny do sebe takové, že jeden trojúhelník je obrazem toho druhého. To znamená, že pro libovolný další bod v rovině jsme schopni sestrojít jeho obraz, a to dokonce několikerým způsobem, viz cvičení. Při těchto konstrukcích si uvědomujeme vlastnosti obecných podobných zobrazení, které připomínáme v závěru tohoto odstavce.

Stejnolehlost (škálování, homotetie)

Stejnolehlost je základní podobnost, která je obecně definována takto:


Stejnolehlost je transformace eukleidovské roviny/prostoru, která je určena středem S a koeficientem $k \in \mathbb{R}$ tak, že obraz X' libovolného bodu X leží na přímce SX a platí:

$$\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX} \quad \text{neboli} \quad X' = S + k \cdot \overrightarrow{SX}. \quad (9.2)$$

Speciální, resp. degenerované případy — které zpravidla za stejnohlosti nevydáváme — odpovídají hodnotám $k = 1, -1$, resp. 0 a jsou to identita, středová souměrnost, resp. nulové zobrazení (všechno se zobrazuje do jediného bodu).

Nezávisle na znaménku koeficientu k je stejnohlost v rovině vždy přímým zobrazením. V prostoru je to jinak — stejnohlost v prostoru je přímá, právě když $k > 0$.

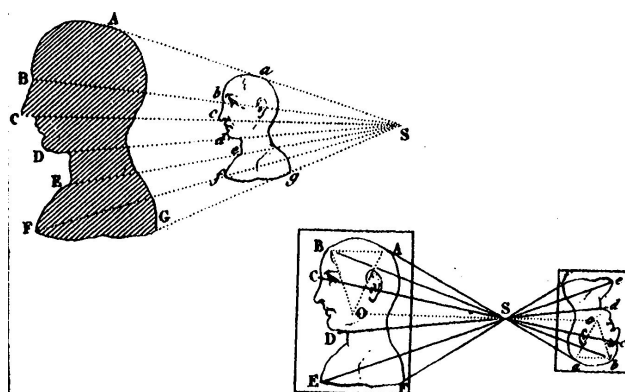
Střed stejnohlosti je jejím jediným samodružným (pevným) bodem a všechny přímky procházející tímto bodem se zobrazují samy do sebe. S odkazem na větu VI.2 (str. 35) si uvědomujeme, že libovolná přímka se zobrazuje na přímku, která je s ní rovnoběžná. Odtud zejména vyplývá možný návod ke konstrukci obrazu obecného bodu vzhledem k dané stejnohlosti.

Tuto vlastnost (každá přímka se zobrazuje na přímku s ní rovnoběžnou) má pouze několik dalších transformací, jmenovitě identita a posunutí. Odtud plyne, že skládáním stejnohlostí nelze obdržet nic jiného než identitu, posunutí nebo obecnou stejnohlost. Upřesnění je v následující větě, jejíž zdůvodnění plyne opět hlavně z věty VI.2: 

Věta (o skládání stejnohlostí). *Složení dvou stejnohlostí se středy S_1, S_2 a koeficienty k_1, k_2 je:*

(a) *identita, právě když $k_1 k_2 = 1$ a $S_1 = S_2$,*

²Nápověda: charakterizujte body na přímce AB pomocí vzdáleností od A a od B .



Obrázek 9.3: [Be] Stejnolehlost v rovině je vždy přímá.

(b) posunutí, právě když $k_1 k_2 = 1$ a $S_1 \neq S_2$,

(c) obecná stejnoolehlost, právě když $k_1 k_2 \neq 1$.

Navíc platí, že v případě (2) je vektor posunutí násobkem vektoru $\overrightarrow{S_1 S_2}$ a v případě (3) leží střed výsledné stejnoolehlosti na přímce $S_1 S_2$ (pokud $S_1 \neq S_2$).

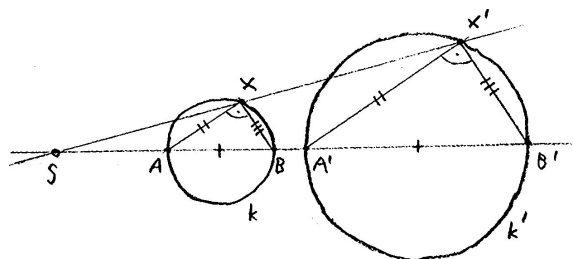
V souvislosti s výše diskutovanými úlohami o kružnicích doplňujeme následující jednoduché tvrzení:

Věta. Stejnolehlým obrazem kružnice je kružnice. Navíc, každé dvě neshodné kružnice v rovině jsou stejnolehlé, a to dvojím způsobem.

Zdůvodnění plyne z vlastností stejnoolehlosti, Thaletovy věty, resp. věty opačné, viz obr. 9.4:

Pro libovolný bod $X \in k$ podle Thaletovy věty platí, že úhel AXB je pravý. Pro obrazy bodů A, X, B vzhledem k libovolné stejnoolehlosti platí, že $A'X' \parallel AX$ a $B'X' \parallel BX$, tudíž úhel $A'X'B'$ je také pravý. To znamená, že bod X' leží na kružnici s průměrem $A'B'$.

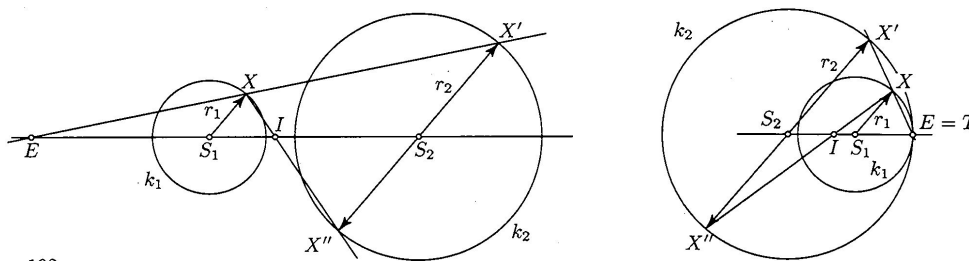
Konstrukce středů stejnoolehlosti dvou daných kružnic pomocí rovnoběžných průměrů je na obr. 9.5 (viz též obr. 5.37). To, že si v těchto stejnoolehlostech odpovídají také všechny ostatní body kružnic, plyne z právě dokázaného tvrzení. \square



Obrázek 9.4: Stejnolehlým obrazem kružnice je kružnice.

Pro dvě dané neshodné kružnice se koeficienty odpovídajících stejnoolehlostí liší pouze znaménkem (absolutní hodnota je rovna poměru poloměrů daných kružnic). Střed, který odpovídá

stejnolehlosti s kladným znaménkem, nazýváme *vnější*, ten druhý nazýváme *vnitřní*. Tyto dva středy splývají, právě když dané kružnice jsou soustředné. Pokud se kružnice dotýkají zvenku, resp. zevnitř, potom vnější, resp. vnitřní střed stejnohlosti splývá s bodem dotyku. Dvě shodné kružnice mají pouze vnitřní střed stejnohlosti (příp. můžeme říct, že ten vnější je v nekonečnu).



Obrázek 9.5: [Ku] Každé dvě kružnice jsou stejnohlné, a to dvojnásobem.

Mongeova věta

Bezprostředním důsledkem předchozích dvou tvrzení je následující věta:

Věta (Mongeova). *Pro tři kružnice v rovině platí, že vnější středy stejnohlosti jsou kolineární, stejně tak každé dva vnitřní středy stejnohlosti a jeden vnější jsou kolineární.*

Uvažme obecnou situaci jako na obr. 9.6 (ve speciálních případech mohou některé středy stejnohlosti splývat nebo se objevit v nekonečnu). Ukážeme, že trojice středů N, R, Q leží na přímce; ostatní tři případy jsou analogické:

Bod N je vnějším středem stejnohlosti kružnic a, b , bod R je vnitřním středem stejnohlosti kružnic b, c a bod Q je vnitřním středem stejnohlosti kružnic a, c . Složením prvních dvou stejnohlostí dostáváme stejnohlost, která zobrazuje kružnici a na kružnici c , a to tak, že bodu $X \in a$ odpovídá bod $X'' \in c$. To znamená, že středem této stejnohlosti je právě bod Q . Z třetí části věty o skládání stejnohlostí plyne, že bod Q leží na přímce NR . \square

Mongeova věta tvoří jednu ze tří komponent, z nichž se skládá zdůvodnění Gergonnova řešení obecné Apollóniovovy úlohy, viz dodatek 21.2. Kromě toho byla stejnohlost jako taková užita při řešení několika speciálních Apollóniových úloh, viz podkap. 5.

Obecná podobnost

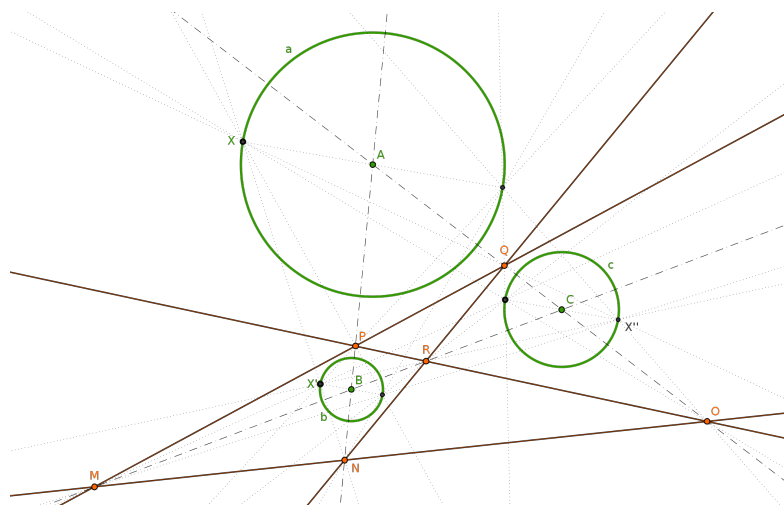
Zobrazení je *podobné*, když pro libovolné body A, B a jejich obrazy A', B' platí:

$$|A'B'| = k \cdot |AB|, \quad (9.3)$$

kde k je kladná reálná konstanta, tzv. koeficient podobnosti.

Podobná zobrazení s koeficientem $k = 1$ jsou shodná. Podobná zobrazení mají následující — odvozené — vlastnosti:

- zobrazují přímky na přímky,
- zachovávají odchylky přímek,



Obrázek 9.6: Mongeova věta: Šest středů stejnolehlostí tří kružnic tvoří vrcholy tzv. úplného čtyřrohu.

- obsahy, resp. objemy s mění k^2 -, resp. k^3 -krát.

(Zdůvodnění, nebo aspoň jejich náznak, máme v odst. 4.16.)

Z definice také přímo plyne, že každé podobné zobrazení je **prosté**. Podobná transformace roviny (prostoru) do sebe je tedy nutně bijektivní, stručně řečeno *podobnost*.

Pokud obecnou podobnost s koeficientem k složíme s nějakou stejnolehlostí s koeficientem $\frac{1}{k}$, pak výsledné zobrazení je shodnost. Odtud můžeme vydedukovat následující tvrzení:

Věta. Každou podobnost lze realizovat jako složení shodnosti a stejnolehlosti (a to mnoha různými způsoby).

Spolu s větou 9.1 můžeme předchozí tvrzení formulovat také tak, že každou podobnost v rovině lze realizovat jako složení stejnolehlosti a nejvýše tří osových souměrností.

Celkem zajímavý a nesamozřejmý výsledek je v následující větě, kterou si zdůvodníme až v příštím semestru, zato však velmi jednoduše.

Věta. Každá podobnost, která není shodností, má právě jeden samodružný bod.

Pro podobnosti v rovině existuje také konstrukční zdůvodnění této věty, jež necháváme zájemcům jako užitečné cvičení.³

9.4 Cvičení

- (1) Doplněte podrobnosti ve větě o skládání stejnolehlostí; dokažte, že vektor posunutí v případě (b) je $\mathbf{v} = (1 - k_2)\overrightarrow{S_1S_2}$ a střed stejnolehlosti v případě (c) je $S = S_1 + \frac{1-k_2}{1-k_1k_2}\overrightarrow{S_1S_2}$.
- (2) Pro dva dané podobné trojúhelníky rozhodněte, zda jsou stejnohlelé (zformulujte nějaké přirozené kritérium). ◀

³Nápověda: (1) samodružný bod S podobnosti má konstantní poměr vzdáleností od vzoru a obrazu libovolného bodu v rovině (jmenovitě $|SA'| : |SA| = k$); (2) pro libovolný pevně zvolený pár A, A' tvoří množina všech bodů s touto vlastností tzv. Apollóniovu kružnici; (3) podobnost v rovině je jednoznačně určena obrazem obecného trojúhelníku.

(3) Pokud je odpověď v předchozí úloze záporná, pak:

- vyjádřete odpovídající podobnost jako složení stejnolehlosti a shodnosti,
- alespoň dvojným způsobem sestrojte obraz libovolného dalšího bodu,
- pokuste se určit samodružný bod této podobnosti.

(4) Sestrojte přímkou spojující daný bod s průsečíkem dvou různoběžných přímek, který je mimo rýsovací plochu.

9.5 Kruhá inverze

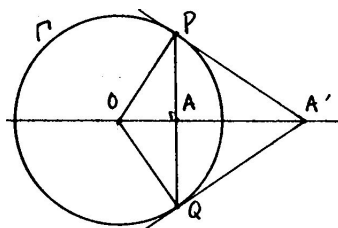
Nyní přichází první avizovaná odbočka, v níž představíme základní konformní zobrazení v rovině — kruhovou inverzi.

Definice

Kruhá inverze je transformace eukleidovské roviny bez jednoho bodu O , která je určena tzv. řídicí kružnicí se středem O a poloměrem r tak, že obraz X' libovolného bodu $X \neq O$ leží na polopřímce OX a platí:

$$|OX| \cdot |OX'| = r^2.$$

Přímo z definice a Eukleidovy věty o odvěsně plyne možný návod ke konstrukci obrazu daného bodu, viz obr. 9.7: PA' je tečna ke kružnici Γ , trojúhelník OPA' je tedy pravoúhlý, A je pata výšky z vrcholu P — podle Eukleidovy věty o odvěsně platí $OA \cdot OA' = OP^2 = r^2$. Příslušnou konstrukci umíme bez problému domyslet bez ohledu na to, zda A je uvnitř nebo vně řídicí kružnice. . .



Obrázek 9.7: [Ha] Obraz bodu při kruhové inverzi určené kružnicí Γ .



Z definice dále plynou následující jednoduchá tvrzení:

- Kruhá inverze je involutivní transformace, tzn. složení dvou kruhových inverzí s toutéž řídicí kružnicí je identita.*
- Všechny body na řídicí kružnici jsou samodružné, tzn. zobrazují se samy na sebe.*
- Všechno, co je vně řídicí kružnice, se zobrazuje dovnitř, a naopak.*
- Každá přímka procházející středem inverze se zobrazuje sama do sebe; přitom jediné samodružné body jsou průsečíky s řídicí kružnicí a $\lim_{X \rightarrow \infty} X' = O$.*

Z posledně jmenované vlastnosti je patrné, proč v definici vylučujeme případ $X = O$: Všechny body v **nekonečnu** se zobrazují do středu O a naopak, obrazem středu O by mohl být libovolný bod v nekonečnu. I kdybychom eukleidovskou rovinu o tyto body rozšířili (což tak jako tak za chvíli uděláme), obraz středu O by nebyl určen jednoznačně. Právě tuto vlastnost budeme v dalším s oblibou využívat!

Další vlastnosti

Kruhová inverze má mnoho dalších nesamozřejmých, ale velmi užitečných vlastností, které si nyní postupně představíme.

Věta. Při kruhové inverzi s řídicí kružnicí Γ a středem O platí:

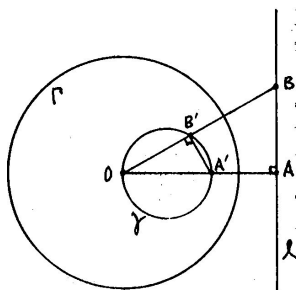
- (e) Přímka neprocházející středem O se zobrazuje na kružnici procházející středem O , a naopak.
- (f) Kružnice kolmá ke Γ se zobrazuje sama do sebe. Naopak, každá kružnice procházející dvojicí inverzních bodů je kolmá ke Γ .
- (g) Obecná kružnice neprocházející středem O se zobrazuje do jiné kružnice neprocházející O .

Důkazy. (e) Na obr. 9.8 uvažujeme přímku l , patu A kolmice ze středu O na přímku l , obraz A' bodu A vzhledem ke kruhové inverzi určené kružnicí Γ a kružnicí γ s průměrem OA' . Ukážeme, že kružnice γ je obrazem přímky l , a naopak.

Pro libovolný bod $B \in l$ ozn. B' průsečík $OB \cap \gamma$. Podle Thaletovy věty je úhel $OB'A'$ pravý. Trojúhelníky OAB a $OA'B'$ jsou oba pravoúhlé a mají společný úhel u vrcholu A . To znamená, že se shodují ve všech vnitřních úhlech a jsou tudíž podobné. Odtud plyne, že

$$OB' : OA = OA' : OB \quad \text{neboli} \quad OB' \cdot OB = OA' \cdot OA.$$

Body A, A' si však odpovídají vzhledem ke kruhové inverzi Γ , tudíž $OB' \cdot OB = OA' \cdot OA = r^2$. Odtud plyne, že libovolný bod na přímce l se zobrazuje do bodu na kružnici γ , a naopak.

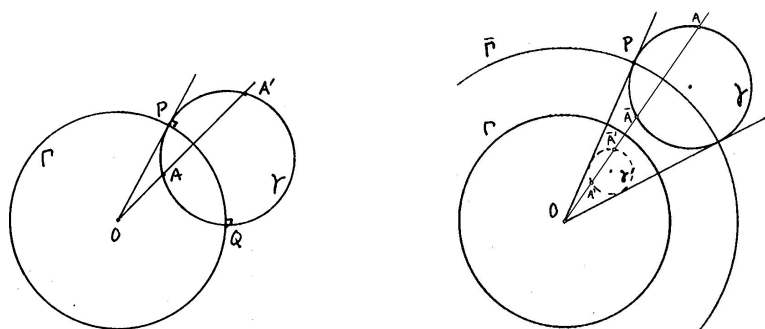


Obrázek 9.8: [Ha] Obrazem přímky při kruhové inverzi je kružnice procházející středem, a naopak.

(f) Předpokládejme, že kružnice γ protíná řídicí kružnici Γ kolmo, tzn., že tečny ve společném bodě P jsou kolmé, viz obr. 9.9 vlevo. Odtud plyne, že poloměr OP je tečnou ke kružnici γ . Pro libovolnou sečnu jdoucí bodem O ozn. A, A' průsečíky s kružnicí γ . Podle věty III.36 (str. 28) víme, že

$$OA \cdot OA' = OP^2 = r^2,$$

což znamená, že body A, A' si odpovídají vzhledem ke kruhové inverzi Γ .



Obrázek 9.9: [Ha] Obrazem kružnice neprocházející středem je opět kružnice; kružnice se zobrazuje sama do sebe právě tehdy, když protíná řídicí kružnici kolmo.

Opačné tvrzení vyplývá z předchozího a z věty III.37, což je věta opačná k III.36.

(g) Místo toho, abychom toto tvrzení dokazovali přímo (což je sice možné, ale poněkud pracné), použijeme následujícího triku, viz obr. 9.9 vpravo:

Uvažme kružnici $\bar{\Gamma}$, která je soustředná s Γ a protíná kružnici γ kolmo. Ukážeme, že složení kruhových inverzí $\bar{\Gamma}$ a Γ je stejnoolehlost. Obrazem kružnice γ vzhledem k této stejnoolehlosti je opět kružnice, kterou označíme γ' . Vzhledem k tomu, že při kruhové inverzi $\bar{\Gamma}$ se kružnice γ zobrazí sama do sebe (f), musí být obrazem kružnice γ vzhledem ke kruhové inverzi Γ právě kružnice γ' .

Pro libovolný bod $A \in \gamma$ označíme $\bar{A} \in \gamma$ jeho obraz v kruhové inverzi $\bar{\Gamma}$ a obraz \bar{A} v kruhové inverzi Γ označíme \bar{A}' . Z definice kruhové inverze plyne, že

$$OA \cdot O\bar{A} = \bar{r}^2 \quad \text{a} \quad O\bar{A} \cdot O\bar{A}' = r^2$$

(kde r , resp. \bar{r} značí poloměr kružnice Γ , resp. $\bar{\Gamma}$). Úpravou těchto dvou rovnic dostáváme

$$O\bar{A}' = k \cdot OA,$$

kde $k = \frac{r^2}{\bar{r}^2}$ (konstanta!). Odtud plyne, že body A a \bar{A}' si odpovídají jako vzor a obraz vzhledem ke stejnoolehlosti se středem O a koeficientem k . \square

Pozor, uvažujeme-li kružnici neprocházející středem kruhové inverze a její obraz, potom středy těchto kružnic si neodpovídají jakožto vzor a obraz v kruhové inverzi! Toho si lze všimnout např. u libovolné kružnice, která protíná řídicí kružnici kolmo. Obecněji, kruhová inverze rozhodně nezachovává vzdálenosti bodů, ani jejich poměry.

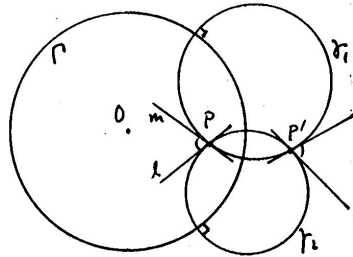
Kruhová inverze však zachovává odchylky jakýchkoli protínajících se křivek (nemůžeme říct odchylky přímek, protože přímky se většinou zobrazují na kružnice):

Věta. *Kruhová inverze je konformní zobrazení, tzn. zachovává odchylky protínajících se křivek.*

V důkaze odkazujeme na obr. 9.10:

Odchylku jakýchkoli dvou křivek v jejich společném bodě P reprezentujeme pomocí jejich tečen m a l . Tutéž odchylku však můžeme stejně dobře reprezentovat pomocí dvojice kružnic, které prochází bodem P a mají přímky m a l jako tečny. Takových dvojic je samozřejmě nekonečně mnoho — my si vybíráme právě kružnice γ_1 a γ_2 , které jsou kolmé k řídicí kružnici Γ ! Tyto kružnice se zobrazují samy do sebe (f), obrazem bodu P je druhý společný bod P' kružnic

a odchylka m a l se transformuje na odchylku kružnic v bodě P' .⁴ Nicméně tato odchylka je táž jako v bodě P , což jsme chtěli dokázat. \square



Obrázek 9.10: [Ha] Kruhová inverze je konformní zobrazení.

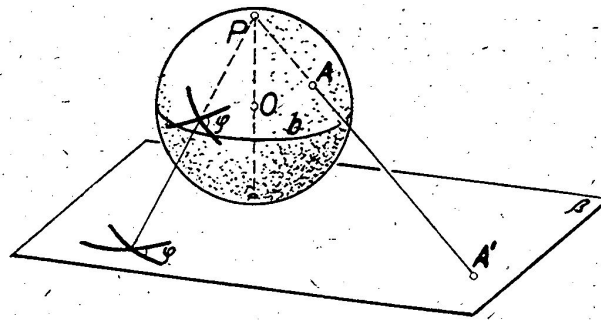
Poznámky

Na závěr si ještě uvědomte, že kruhová inverze je nepřímá transformace a že mezním případem kruhové inverze (pro $r \rightarrow \infty$) je osová souměrnost. \leftarrow

Kruhovou inverzi zmiňujeme zejména v souvislosti s Apollóniovými úlohami — díky výše odvozeným vlastnostem kruhové inverze můžeme složitost těchto úloh celkem zajímavě redukovat, viz následující cvičení a dodatek 21.1.

Všechny konformní transformace v rovině lze vyčerpat skládáním podobných zobrazení a kruhových inverzí.

Na závěr uvádíme jeden další dobře známý příklad konformního zobrazení — *stereografickou projekci*, viz obr. 9.11. Kruhová inverze v rovině lze definovat pomocí stereografické projekce a naopak...



Obrázek 9.11: [Kut] Stereografická projekce je konformní bijektivní zobrazení ze sféry bez jednoho bodu (P) do roviny.

9.6 Cvičení

(1) Pomocí kruhové inverze řešte znovu některé Apollóniovy úlohy zmiňované v podkapitole 5. \leftarrow

⁴Pozor, tečny na obr. 9.10 v bodě P' jsou nakresleny kvůli vyznačení odchylky, nikoli jako obrazy tečen m a l vzhledem k Γ .

(2) Vyjádřete stejnolehlost s daným středem a koeficientem jako složení kruhových inverzí.

9.7 Dilatace

Druhou odbočku věnujeme dilataci. O dilataci jsme několikrát mluvili v podkapitole 5, kde jsme však uvažovali výhradně dilatace orientovaných kružnic a přímk. V tomto odstavci chceme porozumět dilataci jako takové.

Definice

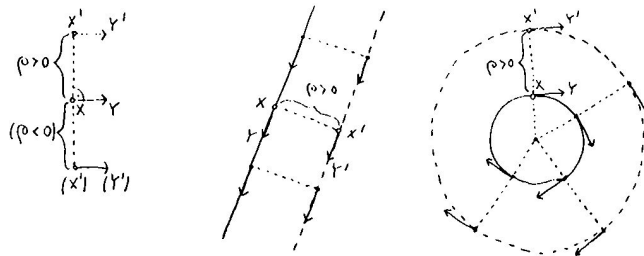
Na rozdíl od všech ostatních zobrazení v tomto textu — **dilatace není bodové zobrazení!** To znamená, že nemá smysl mluvit o obrazu bodu X , protože ten může být při jedné a téže dilataci zobrazen do různých bodů, a to v závislosti na tom, na kterém cyklu tento bod chápeme.

Dilatace tedy není zobrazení na množině bodů, je to však zobrazení na množině tzv. orientovaných dotykových (kontaktních, příp. tečných) elementů. Orientovaný dotykový element (v rovině) můžeme reprezentovat polopřímkou, vektorem vázaným v bodě apod.

Dilatace patří do čeledi geometrických zobrazení, kterým se říká **kontaktní zobrazení**. Všechna kontaktní zobrazení mají tu vlastnost, že zachovávají orientovaný dotyk křivek.

Dilatace je kontaktní zobrazení určené reálným číslem $\rho \neq 0$ tak, že obraz orientovaného kontaktního elementu zastoupeného polopřímkou XY je reprezentován polopřímkou $X'Y'$, která je posunuta o vzdálenost ρ kolmo k XY , a to na správnou stranu v závislosti na orientaci.

Konvence je taková, aby směrový vektor \overrightarrow{XY} a vektor posunutí $\overrightarrow{XX'}$ (v tomto pořadí) tvořily kladnou bázi, když ρ je kladné, a zápornou bázi, když ρ je záporné.




Obrázek 9.12: Dilatace není bodové zobrazení, dilatace je kontaktní zobrazení! Vlevo je naznačen obraz dotykového elementu XY v závislosti na znaménku ρ ; další dva obrázky ilustrují obraz orientované přímky, resp. kružnice jakožto obálky jejich dotykových elementů pro $\rho > 0$.

Poznámky

Pokud říkáme, že „dilatujeme křivku“ o nějakou hodnotu ρ , rozhodně musí být tato křivka nějak **orientovaná!** Formálně „dilatace orientované křivky“ probíhá tak, že si v každém jejím bodě představíme odpovídající tečnou polopřímkou, tu posuneme o danou vzdálenost ρ ve správném směru a výsledek je obálkou těchto posunutých polopřímek. Pozor, klidně se může stát, že spojitá křivka dilataje na křivku nespojitou (např. když daná křivka obsahuje nějaký bod vratu)!

Dilatace se hojně užívá k redukci složitosti obecnějších Apollóniových úloh; právě tato metoda dominuje ve Viětově rekonstrukci původního řešení.

9.8 Cvičení

- (1) Dilatujte několik písmen malé psací abecedy (orientovaných podle toho, jak jsou napsána), a to jak v kladném, tak záporném smyslu.
- (2) Dokažte, že s pomocí dilatace a kruhové inverze umíte vyřešit obecnou Apollóniovu úlohu. 

9.9 Afinní zobrazení

Než se propracujeme k pojmu obecného afinního zobrazení, uvádíme několik dobře známých příkladů, které mají *něco* společného. . .

Často skloňovaným slovním spojením v této podkapitole je dělicí poměr trojice bodů na přímce, proto s ním kvůli lepší přehlednosti začneme.

Dělicí poměr

O poměrech vzdáleností tří bodů na přímce jsme mluvili mnohokrát. Pro pozdější účely se vyplatí tento pojem nějak zafixovat:

Dělicí poměr trojice kolineárních bodů (A, B, C) je reálné číslo d takové, že platí $\overrightarrow{AC} = d \cdot \overrightarrow{BC}$; značíme a symbolicky zapisujeme takto:


$$d = (ABC) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}. \quad (9.4)$$

Bez vektorů lze dělicí poměr definovat takto:

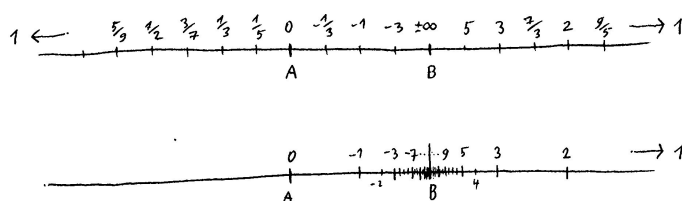
$$(ABC) = \begin{cases} -\frac{|AC|}{|BC|}, & \text{pokud } C \text{ leží mezi body } A, B, \\ +\frac{|AC|}{|BC|}, & \text{pokud } C \text{ neleží mezi body } A, B. \end{cases}$$

V mezních případech vychází dělicí poměr následovně:

$$\lim_{C \rightarrow A} (ABC) = 0, \quad \lim_{C \rightarrow B} (ABC) = \pm\infty, \quad \lim_{C \rightarrow \infty} (ABC) = 1.$$

Pro dva dané body je poloha třetího bodu na odpovídající přímce jednoznačně určena dělicím poměrem, viz obr. 9.13. Definice samozřejmě závisí na pořadí bodů ve trojici — např. bod C je středem úsečky AB právě tehdy, když 

$$(ABC) = (BAC) = -1 \iff (ACB) = (BCA) = 2 \iff (CAB) = (CBA) = \frac{1}{2}.$$



Obrázek 9.13: K dělicímu poměru trojice kolineárních bodů: u několika bodů X na přímce je vyznačena hodnota (ABX) .

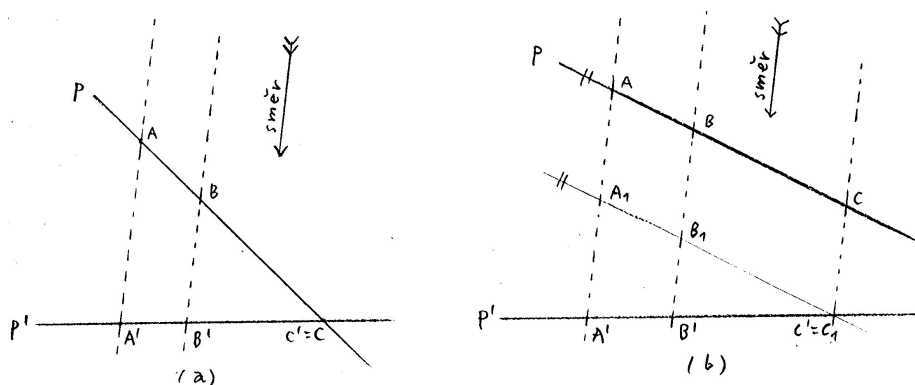
Rovnoběžné promítání

Rovnoběžné promítání je zobrazení z prostoru do roviny, mezi dvěma rovinami, z roviny do přímky apod. takové, že všechny promítací paprsky jsou rovnoběžné. Průmět libovolného bodu je určen jako průsečík promítacího paprsku s cílovým objektem. Průmětem přímky může být buď přímka, nebo bod.

Rovnoběžné promítání obecně velikosti úseček, avšak zachovává dělicí poměr tří bodů na přímce:

Věta. *Pokud se při rovnoběžném promítání zobrazí různé kolineární body na různé body, potom se jejich dělicí poměry zachovávají.*

Předpokládejme, že obrazem přímky není bod. Směr promítání s , daná přímka p a její obraz p' leží v jedné rovině. Pokud by náhodou byly přímky p a p' rovnoběžné, potom se zachovávají dokonce vzdálenosti, tudíž i dělicí poměry. Předpokládejme tedy, že p a p' jsou různoběžné. Tvrzení věty zdůvodníme nejprve ve speciálním případě, poté obecně, viz obr. 9.14:



Obrázek 9.14: Dělicí poměr je při rovnoběžném promítání invariantní!

- (a) V tomto případě ($C' = C$) je tvrzení obsahem věty VI.2, kterou jsem dokázali na str. 35. Při značení z předchozího pododstavce můžeme leda psát

$$(ABC) = (A'B'C).$$

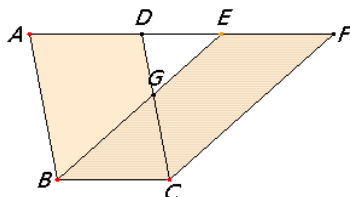
- (b) Uvažujme dvě obecné přímky s rovnoběžnými průměty libovolných tří bodů. Vedeme pomocnou rovnoběžku s p jdoucí bodem C' : Pro rovnoběžné průměty A_1, B_1, C' bodů A, B, C

platí, že mají stejné vzdálenosti, tudíž $(A_1B_1C') = (ABC)$. Navíc podle (a) platí, že $(A_1B_1C') = (A'B'C')$, takže celkem dostáváme

$$(ABC) = (A'B'C'). \quad \square$$

Elace (naklonění, zkosení)

Rovnoběžník $BCFE$ na obrázku můžeme chápat jako obraz rovnoběžníku $BCDA$ při nějaké transformaci eukleidovské roviny — tuto transformaci budeme odborně nazývat *elací*.



Obrázek 9.15: [E_J] Elace neboli naklonění.

Elace má přímku samodružných bodů (v tomto příkladu BC), kterou nazýváme *osou*. Elace je zcela určena osou o a dvojicí bodů $A \mapsto A'$ (v tomto příkladu $A' = E$) takovou, že

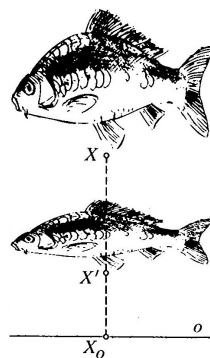
$$AA' \parallel o.$$

To znamená, že obraz libovolného bodu v rovině je tímto zadáním jednoznačně vymezen a navíc je snadné jej sestrojít — pokud prozatím není jasné jak, čtěte dál!

Elace je přímá transformace, není to však shodnost ani podobnost. Elace je navíc zajímavá tím, že (podle věty I.35) zachovává obsahy.

Osová afinita (škálování v jednom směru)

Elace je mezním případem transformace, které se říká *osová afinita*. Typickým příkladem osové afinity je transformace na obr. 9.16. Tato osová afinita má vodorovnou osu (= přímku samodruž-



Obrázek 9.16: [Ku] Typická osová afinita: škálování v jednom směru.

ných bodů) a v tomto směru se „nic neděje“. Ve svislém směru se všechno zkracuje a podstatné

je, že „všude stejně“! Odborněji můžeme říct, že ve svislém směru je pro každou trojici bodů X , X' a X_0 , které si odpovídají jako na obr. 9.16, jejich dělicí poměr konstantní.

Definice obecné osové afinity je následující:

Osová afinita je transformace eukleidovské roviny, která je určena osou o a dvojicí bodů $A \mapsto A'$, a to následujícím způsobem: body na ose o jsou samodružné a pro obraz X' libovolného bodu $X \notin o$ platí

$$XX' \parallel AA' \quad \text{a} \quad (X'X X_0) = (A'A A_0) = \text{konst.}, \quad (9.5)$$

kde X_0 , resp. A_0 , značí průsečík přímky XX' , resp. AA' , s osou o .

Směru přímky AA' se říká *směr* osové afinity, konstantě $(A'A A_0)$ se říká *modul* (nebo taky *charakteristika*). Pořadí bodů v definici modulu není náhodné, ale je voleno tak, aby toto číslo mělo dobrý geometrický význam:

- modul je právě škálovací poměr v daném směru,
- absolutní hodnota modulu nám říká, jak se mění obsahy,
- osová afinita je přímá/nepřímá transformace, právě když modul je kladný/záporný.

Speciálními, resp. mezními případy osové afinity jsou:

- *osová souměrnost*, pokud modul = -1 a směr $\perp o$,
- *šikmá souměrnost*, pokud modul = -1 a směr $\not\perp o$,
- *elace*, pokud směr $\parallel o$ (\implies modul = 1),
- *rovnoběžné promítání* do přímky o , pokud modul = 0 .

Pro kontrolu: V případě elace není bod A_0 vůbec definován, resp. leží v nekonečnu; z definic však plyne, že modul = $\lim_{A_0 \rightarrow \infty} (A'A A_0) = 1$. V případě promítání do přímky je $A' = A_0$, což skutečně znamená, že modul = $(A'A A') = 0$.

Uvědomte si, že přímo z definice osové afinity (a vět o podobných trojúhelnících) plyne návod ke konstrukci obrazu libovolného bodu X , viz obr. 9.17. Z definice dále plyne, že osová afinita zachovává dělicí poměr bodů na jakékoli přímce (tedy ne jen na ose nebo ve směru AA').

Obecné afinní zobrazení

Osová afinita a rovnoběžné promítání do přímky jsou základní afinní zobrazení v rovině. Definice obecného afinního zobrazení je následující:

Zobrazení je *afinní*, když

- zobrazuje kolineární body na kolineární body,
- zachovává dělicí poměry bodů,
- zachovává rovnoběžnost přímk.

Zobrazení je *afinní*, když

- (a') zobrazuje přímky na přímky nebo body,
- (b') zachovává rovnoběžnost přímek.

Bijektivní afinní zobrazení se nazývá *afinita*. Výše zmiňované rovnoběžné promítání do přímky tedy určitě není afinita.

Základní afinní transformace v rovině jsou osové afinity a rovnoběžná promítání do přímky, což jsou právě takové afinní transformace, které mají přímku samodružných bodů. Zobecnění některých základních tvrzení z odstavců o shodnostech a podobnostech je následující:

Věta. *Každá afinní transformace v rovině*

- je jednoznačně určena obrazy tří bodů v obecné poloze,
- lze vyjádřit jako složení nejvýše tří základních afinních transformací.

První fakt se velmi přesvědčivě dokazuje tak, že se pro daný libovolný bod v rovině pomocí vlastností (a)–(c) sestrojí jeho obraz, viz cvičení.

Druhý fakt se zdůvodňuje velmi podobným způsobem, jako věta 9.1 o rozkladu shodností. Jediný rozdíl je v tom, že na rozdíl od rozkládání shodností na osové souměrnosti máme při rozkládání obecných afinních zobrazení daleko více volnosti. \square

Vyhledky

Základní afinní transformace v prostoru jsou afinity, které mají rovinu samodružných bodů (jež zobecňuje rovinu souměrnosti pro zrcadlení), a rovnoběžná promítání do roviny. Právě rovnoběžná promítání prostoru do roviny budou důkladně studována v následující kapitole. Už nyní si však můžeme uvědomit, jak zobecnit předchozí tvrzení pro obecná afinní zobrazení z prostoru (kamkoli):

Věta. *Každé afinní zobrazení z prostoru je jednoznačně určeno obrazy čtyř bodů v obecné poloze.*

Zdůvodnění opět spočívá v odvození konstrukce obrazu libovolného bodu v prostoru vzhledem k obrazům čtyř daných bodů, a to výhradně pomocí vlastností (a)–(c) z definice afinního zobrazení. To znamená, že základními konstrukčními nástroji je opět

- přenášení dělicích poměrů,
- konstrukce rovnoběžek.

K tématu se znovu vracíme v podkapitole 13 a následujících.

9.10 Cvičení

- ③ (1) Pro dané tři kolineární body A, B, C a dva další body K, L sestrojte bod M tak, aby $(KLM) = (ABC)$. (Uvažujte také jiné permutace bodů ve trojici.)
- ③ (2) Pro dva dané trojúhelníky rozhodněte, zda je jeden obrazem druhého vzhledem k nějaké osové afinitě (zformulujte nějaké přirozené kritérium).

(3) Pokud je odpověď v předchozí úloze záporná, pak:

- vyjádřete odpovídající afinitu jako složení osových afinit,
- sestrojte obraz libovolného dalšího bodu v rovině.

(4) Vyjádřete stejnoolehlost s daným středem a koeficientem jako složení osových afinit.

(5) Předp., že tři dané body jsou obrazy sousedních vrcholů pravidelného n -úhelníku ($n = 4, 5, 6, 8, 10, \dots$); sestrojte obrazy ostatních vrcholů.

(6) Sestrojte afinní obraz pravidelného n -bokého hranolu ($n = 4, 5, 6, 8, 10, \dots$).

9.11 Projektivní zobrazení

Než se propracujeme k pojmu obecného projektivního zobrazení, zobecníme základní afinní zobrazení — od rovnoběžného promítání ke středovému, od osové afinity k osové kolineaci. V této souvislosti si záhy uvědomíme, že je nutné začít brát vážně také body v nekonečnu. Odtud pojem projektivního rozšíření eukleidovské přímky, roviny atd.

Často skloňovaným pojmem v této podkapitole je dvojpoměr čtveřice bodů na přímce, proto s ním rovnou začneme.

Dvojpoměr

Dvojpoměr čtveřice kolineárních bodů (A, B, C, D) je reálné číslo definované jako poměr dělicích poměrů $(ABC) : (ABD)$; vzhledem k (9.4) píšeme následovně:

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}. \quad (9.6)$$

Vzhledem k tomu, že $\lim_{D \rightarrow \infty} (ABD) = 1$, platí $\lim_{D \rightarrow \infty} (ABCD) = (ABC)$, což zapisujeme jako

$$(ABCD_\infty) = (ABC).$$

V některých dalších mezních případech vychází dvojpoměr následovně:

$$\lim_{C \rightarrow A} (ABCD) = 0, \quad \lim_{C \rightarrow B} (ABCD) = \pm\infty, \quad \lim_{C \rightarrow D} (ABCD) = 1$$

apod. Pokud je náhodou

$$(ABCD) = -1,$$

říkáme o čtveřici bodů, že je v tzv. *harmonickém poměru*. Takovou čtveřici tvoří např. $(ABCD_\infty)$, kde C je středem úsečky AB .

Pro dané tři kolineární body je poloha čtvrtého bodu na téže přímce jednoznačně určena dvojpoměrem. Definice dvojpoměru samozřejmě závisí na pořadí bodů ve čtveřici. Podobně jako u dělicího poměru však můžeme pozorovat jisté symetrie — obecně např. platí

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$



Středové promítání

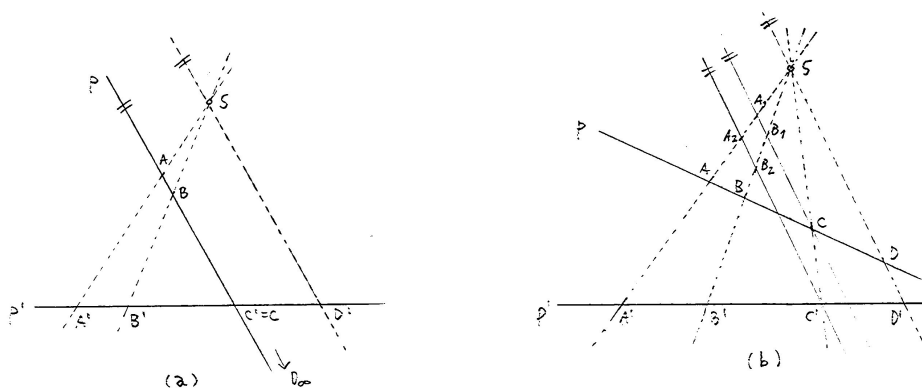
Středové promítání je jedno ze základních projektivních zobrazení, které dokonce dalo celé této skupině zobrazení jméno. Máme na mysli promítání z prostoru do roviny, mezi dvěma rovinami, z roviny do přímky apod. Průmět libovolného bodu je určen jako průsečík promítacího paprsku s cílovým objektem. Průmětem přímky může být buď přímka, nebo bod.

Středové promítání obecně nezachovává dělicí poměr tří bodů, avšak zachovává dvojpoměr čtyř bodů na přímce:

Věta (Pappova). *Pokud se při středovém promítání zobrazí různé kolineární body na různé body, potom se jejich dvojpoměry zachovávají.*

Předpokládejme, že obrazem přímky není bod. Střed promítání S , daná přímka p a její obraz p' leží v jedné rovině. Pokud by náhodou byly přímky p a p' rovnoběžné, potom se zachovávají dokonce dělicí poměry, tudíž i dvojpoměry.

Předpokládejme tedy, že p a p' jsou různoběžné. Tvrzení věty zdůvodníme nejprve ve speciálním případě ($C' = C$ a D v nekonečnu), poté obecně, viz obr. 9.19. Odkazujeme výhradně na základní tvrzení o podobných trojúhelnících:



Obrázek 9.19: Dvojpoměr je při středovém promítání invariantní!

- (a) Trojúhelníky $A'AC'$ a $A'SD'$ jsou podobné a $C' = C$, tudíž $\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'D'}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{SD}}$. Trojúhelníky $B'BC'$ a $B'SD'$ jsou taky podobné, tudíž $\frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{B'D'}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{SD}}$. Odtud dělením obou rovnic dostáváme

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'D'}} : \frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{B'D'}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{B'C'}} : \frac{\overrightarrow{A'D'}}{\overrightarrow{B'D'}}.$$

Výraz nalevo je právě $(ABC) = (ABCD_\infty)$, napravo je $(A'B'C'D')$, takže v tomto specifickém případě skutečně platí

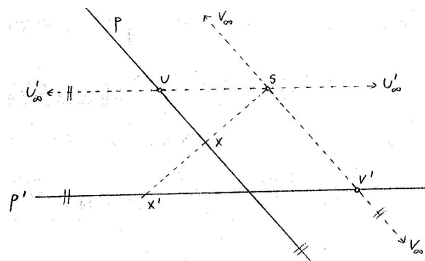
$$(ABCD_\infty) = (A'B'C'D').$$

- (b) Uvažujme dvě obecné přímky se středovými průměty libovolné čtveřice bodů. Vedeme pomocné rovnoběžky jdoucí body C a C' : Podle (a) platí, že $(A_1B_1C) = (ABCD)$ a současně $(A_2B_2C') = (A'B'C'D')$. Navíc ale z podobnosti pomocných trojúhelníků plyne $(A_1B_1C) = (A_2B_2C')$, takže i v tomto obecném případě platí

$$(ABCD) = (A'B'C'D'). \quad \square$$

Projektivní rozšíření

V předchozích odstavcích jsme si mohli všimnout, že občas je výhodné pracovat s *nevlastními body*, tj. body v nekonečnu. Pokud např. uvažujeme středové promítání mezi dvěma (různoběžnými) přímkami p a p' , potom na p existuje bod U , který se zobrazuje do nevlastního bodu přímky p' , a na p' máme bod V' , jehož vzor je nevlastní bod přímky p . Takovým bodům říkáme *úběžníky* a časem zjistíme, jak jsou při konstrukcích užitečné.



Obrázek 9.20: Středové promítání zobrazuje projektivní přímky na projektivní přímky.

Pokud se chceme vyjadřovat přesně, potom nemůžeme říkat, že se při středovém promítání přímka p zobrazuje na přímku p' . Správně by bylo: přímka p bez bodu U se zobrazuje na přímku p' bez bodu V' . Těmto nešikovnostem se lze jednoduše vyhnout tím, že všechny základní objekty rozšíříme o jejich nevlastní body:

Projektivní rozšíření přímky, roviny, resp. prostoru je eukleidovská přímka, rovina, resp. prostor rozšířená, resp. -ný o jejich body v nekonečnu.

Body v nekonečnu jmenujeme *nevlastní*, ostatní pak *vlastní*.

Tato definice je dost neformální — kritický čtenář by se měl ptát, co jsou ty body v nekonečnu a kolik jich vlastně je, příp. jak je reprezentovat pomocí vlastních objektů?! Nejprve si uvědomíme, že každá přímka v eukleidovské rovině má jenom jeden nevlastní bod (a nikoli dva).⁵ Tento fakt vyplývá z jednoho ze základních postulátů eukleidovské geometrie, totiž postulátu o rovnoběžkách (viz odst. 4.4):

Věta. *Projektivní rozšíření přímky má právě jeden nevlastní bod.*

Každý bod $X \in p$ je zastoupen promítacím paprskem SX , viz obr. 9.20. Jak se bod X vzdaluje po přímce p do nekonečna, přímka SX konverguje k rovnoběžce s přímkou p . Protože ke každé přímce prochází libovolným daným bodem právě jedna rovnoběžka, má libovolná přímka v eukleidovské rovině právě jeden nevlastní bod. \square

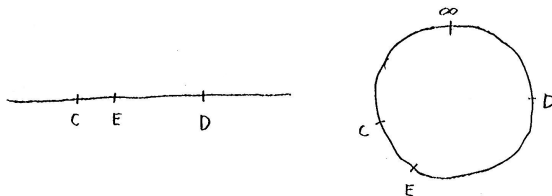
Toto pozorování má několik zajímavých důsledků:

- Projektivní přímka je uzavřená.
- Nemá smysl uvažovat uspořádání bodů na projektivní přímce.
- Projektivní přímka nerozděluje projektivní rovinu na dvě nesouvislé části.

⁵Projektivní rozšíření přímky je tedy něco jiného, než rozšířená reálná osa, jak ji známe z analýzy.

- Každé dvě projektivní přímky v projektivní rovině se protínají.

Rovnoběžnost přímek v rozšířené eukleidovské rovině tedy chápeme jako speciální případ různoběžnosti, kdy průsečík je nevlastní bod.



Obrázek 9.21: Na eukleidovské přímce je bod E mezi body C a D . Na projektivní přímce nemá relace „mezi“ valného smyslu.

Jiný základní axióm eukleidovské geometrie říká, že dva body jednoznačně určují přímku.⁶ Pokud uvažujeme dva různé nevlastní body, pak jimi určená přímka musí být celá nevlastní, jinak bychom byli ve sporu s předchozím tvrzením. Odtud plyne, že:

Věta. *Projektivní rozšíření roviny, resp. prostoru má projektivní přímku, resp. rovinu nevlastních bodů.*

Před chvílí jsme mluvili o vzájemných polohách přímek v rozšířené rovině. Podobně můžeme diskutovat v projektivním rozšíření prostoru — dvě projektivní přímky mohou být:

- mimoběžné, pokud nemají společný bod,
- různoběžné, pokud mají společný právě jeden vlastní bod,
- rovnoběžné, pokud mají společný právě jeden nevlastní bod,
- totožné, pokud mají společné aspoň dva body.

⇒ Doplněte si diskusi vzájemných poloh přímky a roviny, příp. dvou rovin. . .

Osová kolineace

Díky projektivnímu rozšíření eukleidovské roviny (prostoru) lze všechny výše zmiňované afinní zobrazení chápat jako speciální případy tzv. projektivních zobrazení, k jejichž obecné definici nezadržitelně směřujeme. Jedním příkladem, jemuž rozumíme už nyní, je rovnoběžné promítání, které chápeme jako středové promítání z nevlastního středu. Podobně lze chápat osovou afinitu jako speciální případ obecnější — a tudíž základnější — transformace, jejíž jméno zní osová kolineace:⁷

Osová kolineace je transformace v projektivní rovině určená osou o , středem S a dvojicí bodů $A \mapsto A'$, a to následujícím způsobem: střed S a body na ose o jsou samodružné a pro obraz X' libovolného dalšího bodu X platí

$$XX' \cap AA' = S \quad \text{a} \quad (X'X X_0 S) = (A'A A_0 S) = \text{konst.}, \quad (9.7)$$

⁶Tento axióm patří v Hilbertově systému do skupiny axiómů incidence, které jsou platné v obecném projektivním prostoru.

⁷V literatuře se často místo přívlastku osová užívá středová.

kde X_0 , resp. A_0 , značí průsečík přímky XX' , resp. AA' , s osou o .

Konstantě $(A'A A_0 S)$ se říká *modul* (nebo taky *charakteristika*) osově kolineace. Na rozdíl od modulu osově afinity, je interpretace modulu osově kolineace poněkud problematičtější — v projektivní rovině zejména nemá smysl mluvit o orientaci (tzn. nemá smysl rozlišovat přímé/nepřímé transformace).

Zdůrazňujeme, že osová kolineace je dobře definovaná pouze jako transformace v projektivní (tedy nikoli eukleidovské) rovině, tzn. že nevlastní body se mohou zobrazit do vlastních, a naopak. Speciálními, resp. mezními případy osově kolineace jsou:

- *osová afinita*, pokud je střed nevlastní,
- *stejnolehlost*, pokud je osa nevlastní,
- *posunutí*, pokud jsou střed i osa nevlastní,
- *středové promítání* do přímky o , pokud je osa vlastní a modul = 0.

Pro doplnění: V případě osově afinity je modul $(A'A A_0 S_\infty) = (A'A A_0)$. V případě stejno-
lehlosti je bod A_0 nevlastní a modul $(A'A A_0 S) = (A'A S) =$ koeficient stejno-
lehlosti. V případě posunutí je nutně $S = A_0$ a modul $(A'A S S) = 1$. V případě promítání do přímky je
 $A' = A_0$, což skutečně znamená, že modul $(A'A A' S) = 0$.

V souvislosti s analogickou diskuzí v odst. 9.9 nás může ještě napadnout uvažovat osově kolineace s modulem ± 1 :

- *projektivní elace*, pokud $S \in o$ (\implies modul = 1),
- *harmonická souměrnost*, pokud modul = -1 .

V případě projektivní elace je $S = A_0$, což skutečně znamená, že modul $(A'A S S) = 1$. Elace (resp. posunutí) je tedy speciálním případem projektivní elace, kdy střed (resp. střed i osa) je nevlastní. Speciálním případem harmonické souměrnosti je šikmá souměrnost, a to když osa je nevlastní.

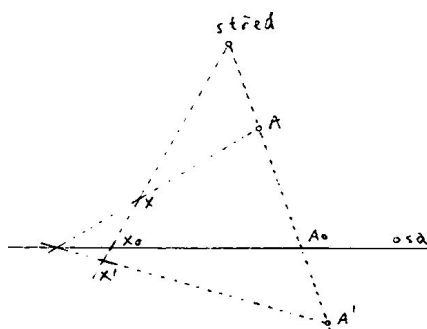
Uvědomte si, že přímo z definice osově kolineace (a Pappovy věty) plyne návod ke konstrukci obrazu libovolného bodu X , viz obr. 9.22. Odtud dále plyne, že osová kolineace zachovává dvojpoměry bodů na jakékoli přímce (tedy ne jen na ose nebo přímce procházející středem)!

Obecné projektivní zobrazení

Osová kolineace a středové promítání jsou základní projektivní zobrazení v rovině. Definice obecného projektivního zobrazení je následující:

Zobrazení je *projektivní*, když

- (a) zobrazuje kolineární body na kolineární body,
- (b) zachovává dvojpoměry.



Obrázek 9.22: Obraz bodu X v osově kolineaci určené středem, osou a dvojicí bodů $A \mapsto A'$: (1) obraz X' leží na přímce SX ; (2) průsečík AX s osou je samodružný; (3) obraz X' leží na spojnici A' s pomocným bodem (2).

Projektivní zobrazení samozřejmě může být dobře definováno pouze jako zobrazení mezi projektivními (nikoli eukleidovskými) prostory, rovinami apod.

Definující podmínky neznamenají nic jiného, než že se (projektivní) přímky zobrazují na přímky, resp. na body (tedy nikoli např. na úsečky). Stručně a ekvivalentně můžeme definici vyslovit takto:

Zobrazení je *projektivní*, když

(a') zobrazuje projektivní přímky na projektivní přímky nebo body.

Bijektivní projektivní zobrazení se nazývá *projektivita* nebo častěji *kolineace*.

Základní projektivní transformace v projektivní rovině jsou osově kolineace a středová promítání do přímky, což jsou právě takové projektivní transformace, které mají přímku samodružných bodů. Zobecnění některých základních tvrzení z předchozích odstavců je následující:

Věta. *Každá projektivní transformace v rovině*

- je jednoznačně určena obrazy čtyř bodů, z nichž žádné tři nejsou kolineární (příp. obrazy tří bodů v obecné poloze a úběžníky dvou přímek, které jsou těmito body určeny),
- lze vyjádřit jako složení nejvýše čtyř základních projektivních transformací.

První fakt se zdůvodňuje konstruktivně zobecněním afinního případu — klíčovou dovedností, kterou při sestřování obrazu obecného bodu používáme, je přenašení dvojpoměru čtveřice bodů, viz cvičení.

Druhý fakt je zobecněním druhé části věty 9.9 na str. 82; opět pozorujeme ohromné množství možností v možných rozkladech. \square

Alternativní formulace první části věty má upozornit na konstrukčně velice užitečné body — *úběžníky*, což jsou obrazy nevlastních bodů. Z předchozího víme, že nevlastní body projektivní roviny tvoří projektivní přímku. Obrazem této přímky vzhledem k jakémukoli projektivnímu zobrazení je opět projektivní přímka, kterou nazýváme *úběžnicí*.

Vyhledky

Základní projektivní transformace v prostoru jsou kolineace, které mají rovinu samodružných bodů, a středová promítání do roviny. Právě středová (spec. taky rovnoběžná) promítání prostoru do roviny budou důkladně studována v následující kapitole. Už nyní si však můžeme uvědomit, jak zobecnit předchozí tvrzení pro obecná projektivní zobrazení z prostoru (kamkoli):


Věta. *Každé projektivní zobrazení z prostoru je jednoznačně určeno např. obrazy čtyř bodů v obecné poloze a úběžníky tří přímek, které jsou těmito body určeny a které neleží v jedné rovině.*

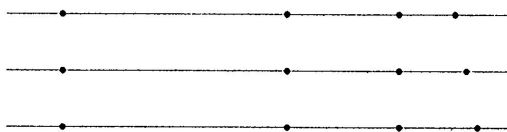
Zvolená formulace odpovídá tomu, jak nejčastěji budeme s projektivními zobrazeními nakládat. Jiná možná zadání projektivních zobrazení momentálně neřešíme, k tématu se znovu vrátíme v podkapitolách 13 a 17. Základními konstrukčními nástroji v každém případě bude

- přenášení dvojpoměrů,
- spolupráce s úběžníky.


Často se vyplatí také spolupráce s vybranými úběžnicemi (při středových promítáních prostoru do roviny známe úběžnici základní roviny pod přezdívkou *horizont*).

9.12 Cvičení

- (1) Pro dané čtyři kolineární body A, B, C, D a tři kolineární body K, L, M sestrojte bod N tak, aby $(KLMN) = (ABCD)$. (Uvažujte také jiné permutace bodů ve čtveřici.) 
- (2) Rozhodněte, která ze čtveřic bodů na obr. 9.23 je projektivním obrazem čtveřice stejně vzdálených bodů.



Obrázek 9.23: [St] Která čtveřice je projektivním obrazem čtveřice ekvidistantních bodů?

- (3) Sestrojte projektivní obraz čtvercového dláždění roviny.
- (4) Pro dva dané čtyřúhelníky rozhodněte, zda je jeden obrazem druhého vzhledem k nějaké osově kolineaci (zformulujte nějaké přirozené kritérium). 
- (5) Pokud je odpověď v předchozí úloze záporná, pak:
 - vyjádřete odpovídající projektivní transformaci jako složení osových kolineací,
 - sestrojte obraz libovolného dalšího bodu v rovině.
- (6) Předp., že čtyři dané body jsou obrazy sousedních vrcholů pravidelného n -úhelníku ($n = 5, 6, 8, 10, \dots$); sestrojte obrazy ostatních vrcholů.
- (7) Sestrojte projektivní obraz pravidelného n -bokého hranolu ($n = 4, 5, 6, 8, 10, \dots$).

10 Přehledy a poznámky

10.1 Hierarchie geometrických zobrazení

Všechna diskutované typy zobrazení si na závěr zorganizujeme. V následující tabulce uvádíme, které vlastnosti se při tom či onom zobrazení zachovávají, přičemž podstatné invarianty jsou zvýrazněny symbolem \oplus . V následujícím přehledu samozřejmě nevystupuje dilatace (viz odst. 9.7).

	vzdál.	kolin.	děl. pom.	dvojpom.	obs.	odch.
shodná	\oplus	+	+	+	+	+
podobná	–	\oplus	+	+	–	\oplus
ekviafinní	–	\oplus	\oplus	+	\oplus	–
afinní	–	\oplus	\oplus	+	–	–
projektivní	–	\oplus	–	\oplus	–	–
konformní	–	–	–	–	–	\oplus

Tabulka 10.1: Přehled geometrických zobrazení a jejich vlastností.

Ekviafinní zobrazení jsou taková afinní zobrazení, jež zachovávají obsahy plošných útvarů (v prostoru samozřejmě objemy). Příklady ekviafinních zobrazení jsou všechna shodná zobrazení, elace a šikmá symetrie. *Konformní* zobrazení jsou zobrazení, která zachovávají odchylky protínajících se křivek. Kromě všech podobných zobrazení je to např. kruhová inverze.

Přímo z definic a odvozených vlastností umíme zorganizovat všechny diskutované typy zobrazení jako na obr. 10.24 (šipka naznačuje podřízenost ve smyslu každé shodné je podobné apod.) Z uvedeného také plynou následující jednoduché důsledky:

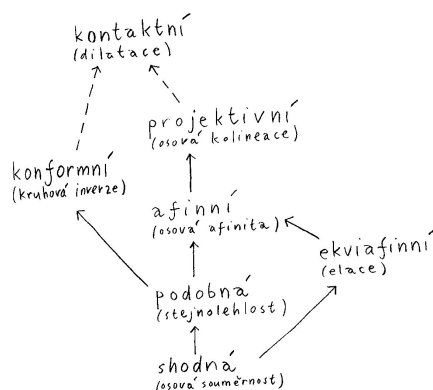
Důsledky.

- (1) *Projektivní zobrazení, které zobrazuje všechny vlastní body na vlastní (ekvivalentně, nevlastní body na nevlastní), je afinní.*
- (2) *Afinní zobrazení, které zachovává poměry vzdáleností nekolineárních bodů, je podobné.*
- (3) *Projektivní zobrazení, které je konformní, je podobné.*
- (4) *Podobné zobrazení, které je ekviafinní, je shodné.*

Poznámky

Všechna zobrazení od shodných po afinní jsou definovaná mezi eukleidovskými prostory (různých dimenzí). Projektivní zobrazení musíme uvažovat mezi projektivními rozšířeními eukleidovských prostorů. Z vlastností základního konformního zobrazení — kruhové inverze — víme, že tuto nelze globálně definovat v eukleidovské rovině, ale ani v jejím projektivním rozšíření. Tím správným prostorem je tzv. Möbiovo rozšíření eukleidovské roviny, což je rozšíření o jeden jediný nevlastní bod. Möbiovu rovinu lze identifikovat se sférou, a to pomocí stereografické projekce, viz obr. 9.11.

Vzhledem k tomu, že shodná, podobná a také ekviafinní zobrazení jsou nutně prostá, není možné tímto způsobem zobrazit trojrozměrný prostor do roviny. Zobrazení prostoru do roviny, která zobrazují přímky na přímky, jsou tedy projektivní nebo afinní — s tímto poznatkem bychom měli otvírat následující kapitolu.



Obrázek 10.24: Hierarchie geometrických zobrazení (v závorce uveden typický představitel z každé třídy).

10.2 Základní transformace v rovině

V tomto odstavci si přehledně připomeneme základní transformace v (projektivní) rovině a jako obvykle něco málo doplníme. Nejpozději na tomto místě bychom si měli všimnout, že všechny dosud jmenované základní transformace mají něco společného:

- *osu* = přímkou samodružných bodů,
- *střed* = samodružný bod takový, že každá přímka jdoucí tímto bodem se zobrazuje sama do sebe.

Osa a střed mohou být jak vlastní, tak nevlastní, a podle toho taky můžeme jednotlivé typy základních transformací rozlišovat. Obecnou definici tedy můžeme vyslovit následovně:

Projektivní transformace v rovině, která má osu a střed, se nazývá *základní*.

Z Desarguesovy věty (viz odst. 10.3) plyne, že projektivní transformace v rovině má osu právě tehdy, když má střed. Celkem jednoduše lze také zdůvodnit, že žádná projektivní transformace nemůže mít víc než jednu osu a jeden střed. . .



Úplně **nejzákladnější** transformace je osová kolineace — všechny ostatní exempláře chápeme jako speciální, resp. mezní případy, viz tab. 10.2. Uvědomte si, že podmínky v jednotlivých sloupcích nejsou úplně nezávislé! Např. z definice modulu plyne, že pokud $S \in o$, potom je modul nutně roven 1. Taky se jistě nemůže stát, aby S i o byly nevlastní a současně $S \notin o$, apod.

střed S	osa o	$S \in o$	modul	druh
vlastní	vlastní	ne	0	středové promítání do přímky
		ano	1	projektivní elace
		ne	-1	harmonická souměrnost
		ne	jinak	osová kolíneace
nevlastní	vlastní	ne	0	rovnoběžné promítání do přímky
		ano	1	elace
		ne	-1	šikmá, resp. osová souměrnost
		ne	jinak	osová afinita
vlastní	nevlastní	ne	0	(promítání do bodu)
		ne	1	(identita)
		ne	-1	středová souměrnost
		ne	jinak	stejnolehlost
nevlastní	nevlastní	ano	1	posunutí

Tabulka 10.2: Klasifikace základních transformací v projektivní rovině

Případ identické transformace, resp. promítání do bodu uvádíme v závorkách, protože se jedná o triviální, resp. degenerovaný případ, který do tohoto přehledu sice patří, ale není základní transformací ve výše vymezeném smyslu. V případě harmonické souměrnosti je modul roven -1 , což znamená, že každá čtveřice (X', X, X_0, S) je v harmonickém poměru. Šikmá souměrnost je harmonická souměrnost s nevlastním středem a osová souměrnost je navíc charakterizována tím, že směr souměrnosti je kolmý k ose.

10.3 Desarguesova věta

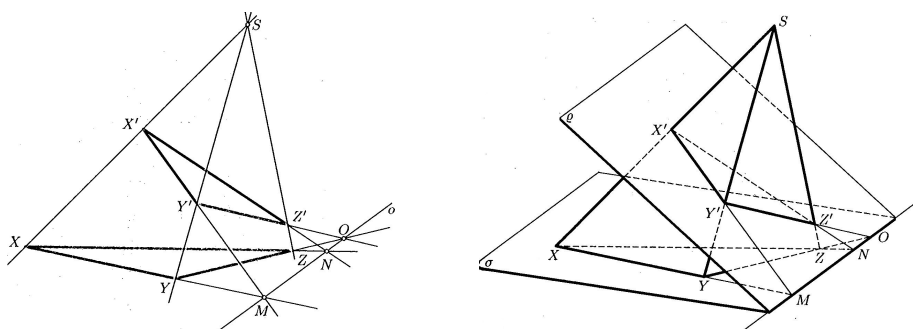
Ve cvičeních 9.2, 9.4, 9.10, resp. 9.12 jsme přemýšleli, jak charakterizovat základní shodné, podobné, afinní, resp. projektivní transformace v (projektivní) rovině. Jako nejzákladnější transformace jsme rozpoznali osové kolíneace. V souvislosti s jejich charakterizacemi musíme zmínit následující klasické tvrzení:

Věta (Desarguesova). *Pro libovolné dva trojúhelníky XYZ a $X'Y'Z'$ v projektivní rovině platí: přímky XX' , YY' , ZZ' prochází jedním bodem právě tehdy, když průsečíky přímk XY a $X'Y'$, YZ a $Y'Z'$, XZ a $X'Z'$ leží na jedné přímce.*

Planimetrický důkaz tohoto tvrzení je značně netriviální, věta je však velmi srozumitelná s vhodnou trojrozměrnou interpretací, viz obr. 10.25:

Při zdůvodňování první implikace se odkážeme na poznatek, že každé dvě roviny — v tomto případě roviny obsahující dané trojúhelníky — se protínají v přímce (vlastní či nevlastní). Při zdůvodňování druhé implikace se odkážeme na poznatek, že každé tři roviny, které neobsahují společnou přímku — v tomto případě roviny určené třemi dvojicemi odpovídajících si stran — mají společný právě jeden bod (vlastní či nevlastní). \square

Nad obr. 10.25 asi nikoho nepřekvapí, že první aplikace osové kolíneace (resp. afinity) potkáme při sestřování řezů jehlanovitých (resp. hranolovitých) těles, viz cvičení 13.4.



Obrázek 10.25: [Ku] Desarguesova věta a její trojrozměrná interpretace.

10.4 Projektivní obraz kružnice

Korespondence mezi rovinami ρ a σ na obr. 10.25 je obyčejné středové promítání mezi dvěma rovinami v prostoru; odborně se takové korespondenci říká *perspektivní kolineace*. V duchu předchozího odstavce můžeme osovou kolineaci v rovině chápat jako průmět perspektivní kolineace mezi dvěma rovinami v prostoru do jiné roviny.

Tato pozorování nám však silně připomínají jinou podobnou situaci — „kružnice“ a elipsa na obr. 6.46 jsou v úplně stejném vztahu jako dva trojúhelníky na obr. 10.25. Planimetrická interpretace této korespondence je samozřejmě opět **osová kolineace**.

V perspektivní kolineaci může kružnici odpovídat libovolná kuželosečka a při středovém promítání se každá kuželosečka zobrazuje do kuželosečky. To v důsledku znamená, že obrazem kružnice vzhledem k osové kolineaci může být libovolná nedegenerovaná⁸ kuželosečka. Speciálním případem osové kolineace je osová afinita a — jako každé afinní zobrazení — tato neumí zobrazit žádný vlastní bod na nevlastní. To znamená, že obrazem kružnice vzhledem k osové afinitě může být jedině elipsa. Odtud plyne následující tvrzení, které má velice užitečné konstrukční důsledky.

Věta. *Obrazem kružnice v osové kolineaci (afinitě) je nedegenerovaná kuželosečka (elipsa). Naopak, libovolná nedegenerovaná kuželosečka (elipsa) je obrazem kružnice vzhledem k nějaké osové kolineaci (afinitě).*

Vzhledem k tomu, že středová promítání a osové kolineace jsou základní projektivní zobrazení, předchozí tvrzení je možné ještě zobecnit:

Věta. *Projektivním obrazem kružnice je kuželosečka. Naopak, každá kuželosečka je projektivním obrazem kružnice.*

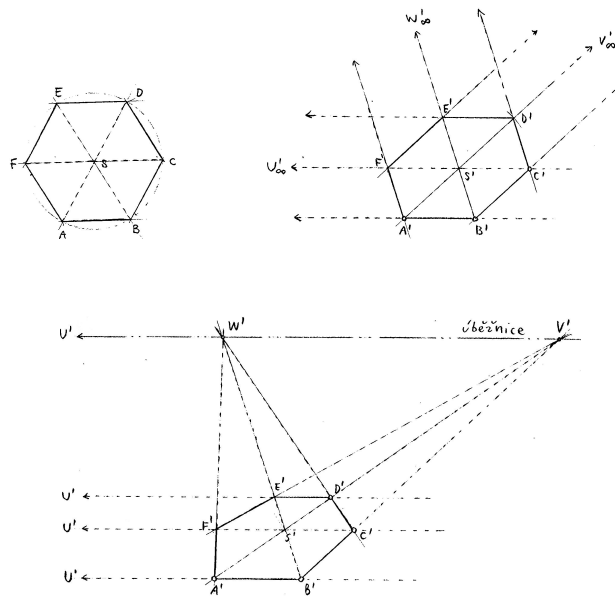
Na poznatky z tohoto odstavce se budeme odkazovat v odst. 11.5 a 19.4.

11 Typické úlohy

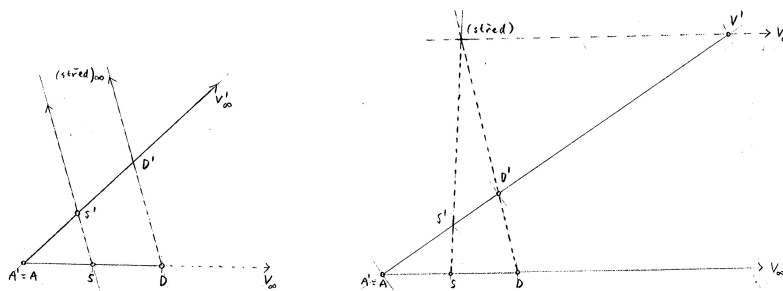
11.1 Opět úloha Apollóniova

Na obr. 8.62 (str. 63) jsme si uvědomovali, že s tehdejšími dovednostmi jsme neuměli sestavit kružnice, které by se dotýkaly daných půlkružnic a přímky. Řešení pomocí chytře zvolené kruhové inverze je na následujícím obrázku:

⁸Pokud by byla degenerovaná, nebyla by kolineace kolineací, tj. nebyla by bijektivním zobrazením.



Obrázek 11.27: Pravidelný šestiúhelník a jeho afinní, resp. projektivní obraz.



Obrázek 11.28: Přenášení dělicího poměru, resp. dvojpoměru.

11.3 Obraz hranolu a hranatých těles

Při afinním, resp. projektivním zobrazení prostoru do roviny potřebujeme navíc nějakou informaci o zobrazení jednoho dalšího bodu, který neleží v dříve zobrazené rovině. Tuto dovednost si vyzkoušíme na konstrukci obrazu pravidelného hranolu.

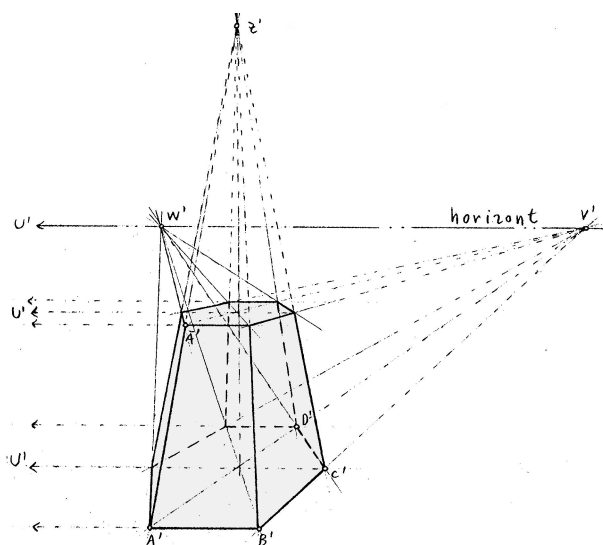
Obraz hranolu

V afinním případě stačí zadat obraz jednoho takového bodu — sestrojte afinní obraz pravidelného šestibokého hranolu, který je určen obrazy vrcholů A, B, C spodní podstavy a obrazem vrcholu \bar{A} horní podstavy.

V projektivním případě obraz jednoho dalšího bodu samozřejmě nestačí! Tuto nejednoznačnost lze eliminovat různě — na obr. 11.29 je sestrojen projektivní obraz pravidelného šestibokého



hranolu, který je určen obrazy vrcholů A, B, C, D spodní podstavy, obrazem vrcholu \bar{A} horní podstavy a úběžníkem Z' hrany AA .



Obrázek 11.29: Projektivní obraz pravidelného šestibokého hranolu.

Obě podstavy hranolu jsou ve skutečnosti rovnoběžné, a proto mají tutéž úběžnici (na obrázku přejmenována na horizont). Díky tomu si můžeme všimnout, že korespondence mezi šestiúhelníkem spodní podstavy a šestiúhelníkem horní podstavy je naše oblíbená **osová kolineace**,¹¹ jejíž osa je právě tato úběžnice a střed je úběžník Z' . Tento postřeh je samozřejmě možné (a vhodné!) konstrukčně využít. . .

Poznámky

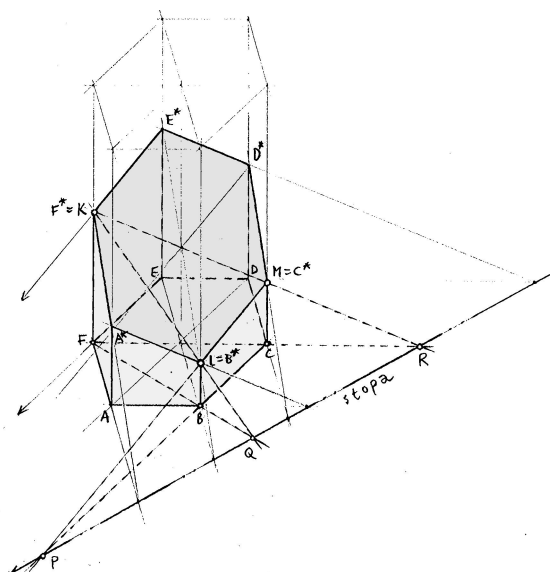
Každý hranol můžeme chápat jako jehlan, jehož vrchol je nevlastní. Pokud máme sestavit obraz obecného jehlanu, zjišťujeme, že v předchozím rozboru se téměř nic nemění. Při zobrazování jiných hranatých těles může být situace komplikovanější, ale pouze z technického hlediska — teoretické principy jsou pořád stejné. K těmto otázkám se vracíme v následující kapitole, takže je prozatím opouštíme.

11.4 Řez hranolu a jehlanu

Konstrukci řezu obecného hranolu obecnou rovinou zatím neumíme, ale jednoduché úlohy tohoto typu můžeme řešit už nyní s odkazem na osovou kolineaci (resp. afinitu) a Desarguesovu větu, viz obr. 10.25.

Na následujícím obrázku je afinní průmět hranolu a body K, L, M , které všechny leží na svislých hranách. V tomto případě je korespondence mezi průmětem šestiúhelníku podstavy a průmětem šestiúhelníku řezu **osová afinita**, jejíž osou je průsečnice roviny podstavy a roviny řezu a směrem je směr svislých hran. Pomocí této afinity snadno sestojíme všechny ostatní body řezu.

¹¹Pokud by byl náhodou úběžník Z' nevlastním bodem, potom by se jednalo o osovou afinitu.



Obrázek 11.30: Afinní obraz pravidelného šestibokého hranolu a jeho řez rovinou KLM .

Právě konstrukce průsečnice rovin (tj. osy afinity) může obecně dělat problém, jinak jsou všechny úlohy tohoto typu pro nás stejné. Pokud bychom pracovali s projektivním obrazem hranolu (nebo s jakýmkoli obrazem jehlanu), pak bychom se místo na osovou afinitu odkazovali na osovou kolineaci.

K řezům obecně se ještě vracíme v odst. 19.2.

11.5 Úlohy s kuželosečkami

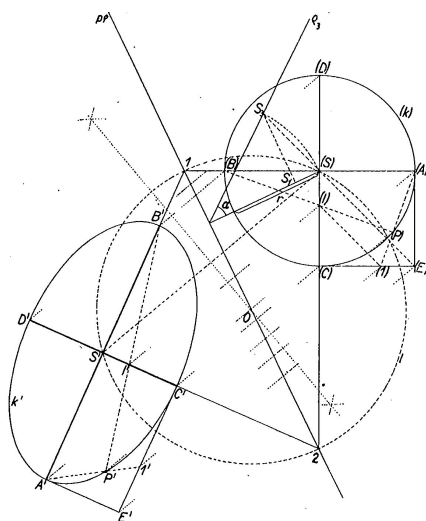
Tady zmiňujeme několik úloh, na které budeme odkazovat při zobrazování oblých těles (odst. 19.4). Pro některé z následujících úloh samozřejmě existují elementární konstrukce odvozené z ohniskových vlastností kuželoseček. My budeme ve všech případech zaměstnávat **osovou kolineaci (afinitu)** mezi kuželosečkou a kružnicí. Tato je buď součástí nebo ji lze podle potřeby vymyslet, a to dokonce několika způsoby.

Úlohy formulujeme pro elipsu, avšak není problém zobecnit pro obecnou (nedegenerovanou) kuželosečku. Úlohy toho typu najdou uplatnění v odst. 19.4.

Konstrukce hlavních průměrů

Předpokládejme, že elipsa je dána jako obraz kružnice vzhledem k osové afinitě určené osou p a obrazem S' středu (S). Sestrojit onu elipsu pro nás znamená sestrojit její hlavní průměry, což jsou sdružené průměry, které jsou současně navzájem kolmé.

Řešení na obr. 11.31 je odvozeno z toho, že sdružené průměry v kružnici jsou právě navzájem kolmé průměry. Hledáme tudíž takovou dvojici kolmých průměrů v kružnici, jejímž obrazem jsou zase kolmé průměry. Odpovídající přímky se protínají na ose (body 1 a 2) a pravý úhel u vrcholu (S), resp. S' je charakterizován tím, že leží na Thaletově kružnici (ozn. l). Střed této kružnice leží na ose úsečky $(S)S'$ a na ose afinity p ...

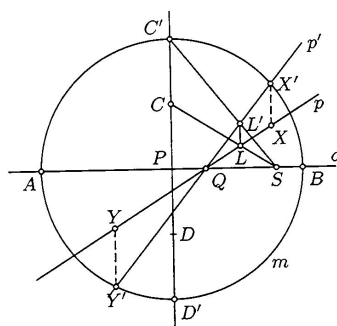


Obrázek 11.31: [KV] Hlavní průměry elipsy pomocí osové afinity.

Průnik přímky s kuželosečkou

Elipsa je dána svými vrcholy A, B, C , máme sestavit její průnik s přímkou p .

K řešení na obr. 11.32 užíváme (uměle vytvořenou) osovou afinitu mezi elipsou a kružnicí s průměrem AB — tato afinita má osu AB a je zcela určena dvojicí bodů $C \mapsto C'$. Přirozený postup je následující: sestojíme obraz přímky p , určíme její průsečíky s kružnicí (X', Y') a vzory těchto dvou bodů (X, Y) jsou řešením úlohy.

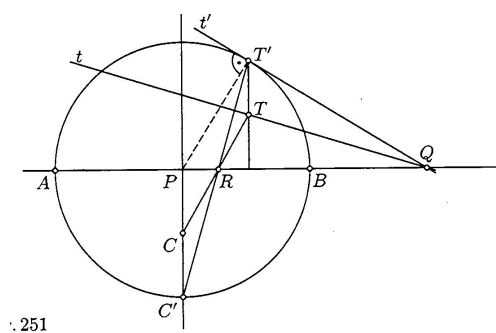


Obrázek 11.32: [Ku] Průnik přímky s elipsou pomocí osové afinity.

Tečna ke kuželosečce

Elipsa je dána svým hlavním průměrem AB a bodem T , máme sestavit tečnu k elipse z bodu T .

Pomocí stejné osové afinity jako v předchozí úloze můžeme postupovat takto: sestojíme obraz bodu T , sestojíme tečnu z tohoto bodu ke kružnici, vzor této přímky je tečnou k elipse.



. 251

Obrázek 11.33: [Ku] Tečna k elipse pomocí osově afinity.

Uvedené myšlenky lze snadno modifikovat např. k sestavení tečny k dané elipse z daného bodu či v daném směru. . .

V této kapitole zmiňujeme několik metod zobrazování trojrozměrného prostoru do roviny. Po stručném přehledu se podíváme na vybrané metody podrobněji.

12 Úvod

Promítání rozlišujeme na

- *středová* (z vlastního středu),
- *rovnoběžná* (z nevlastního středu).

U rovnoběžného promítání dále podle polohy směru promítání k průmětně rozlišujeme na

- *kolmá*,
- *šikmá*.

Při jakémkoli promítání je za každým bodem v průmětně schována celá přímka v prostoru. Chceme-li tedy jednoznačně specifikovat skutečnou polohu bodu v prostoru, potřebujeme buď nějakou dodatečnou informaci nebo tzv. *sdrúžený průmět* na nějakou jinou průmětnu: na mapách se k průmětům význačných bodů přidávají kóty (viz podkap. 15), v technické praxi se poloha bodu v prostoru nejčastěji specifikuje jeho *nárysem* a *půdorysem* (tj. kolmými průměty na dvě navzájem kolmé průmětny, viz podkap. 14).

Středová, resp. rovnoběžná promítání jsou základní **projektivní**, resp. **afinní** zobrazení, o nichž už ledacos víme z předchozího textu — každé takové zobrazení je jednoznačně určeno obrazy několika bodů v obecné poloze. Promítání zadaná tímto způsobem nazýváme *volná* (viz podkap. 13), v ostatních případech mluvíme o promítáních *vázaných*.

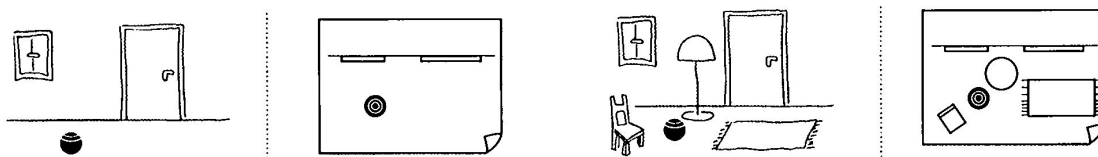
12.1 Základní úlohy

Velice typickým problémem, se kterým se budeme potýkat především, je sestavení názorného průmětu tělesa zadaného nárysem a půdorysem, příp. naopak. Přibližným řešením takových úloh

se mohou bavit děti od nejútlejšího věku, viz obr. 12.1; my bychom měli umět klíčové postřehy pojmenovat a zrealizovat přesně! Připomeňme, že základní dovedností, bez které se v těchto případech neobejdeme, nadále zůstává

- (1) přenášení dvojpoměru, resp. dělicího poměru kolineárních bodů.

V dalším budeme některé postupy **zefektivňovat** a hlavně se naučíme **měřit** úsečky a úhly (které se promítáním zkreslují) ve skutečných velikostech.



Obrázek 12.1: [SMS] K danému průmětu pokoje načrtněte jeho půdorys.

Často bude těleso dáno svým nárysem a půdorysem, vzhledem k těmto průmětnám bude zadána nějaká nová průmětna a střed (směr) promítání. Naším úkolem bude sestrojení průmětu tělesa do této nové průmětny z daného středu (v daném směru), což znamená, že musíme sestrojiti průnik několika promítacích paprsků s touto průmětnou. (Jiná úloha vedoucí k týmž konstrukcím je sestrojení stínu vrženého daným tělesem do dané roviny při daném typu osvětlení.) Při těchto úlohách narážíme na problém, ve kterém se velice často chybuje — rozpoznat, zda dvě přímky dané svými průměty jsou ve skutečnosti rovnoběžné, různoběžné nebo mimoběžné. *Základní polohové úlohy*, které musíme bezpečně ovládat, tedy jsou:

- (2) rozpoznat vzájemnou polohu dvou přímek,
- (3) sestrojiti průnik přímky s rovinou.

Podobná úloha k (2) je např. určit vzájemnou polohu bodu a roviny. Speciálním případem úlohy (3) je konstrukce *stopníků*, tzn. průsečíků přímky s průmětnami. Související úlohy jsou: průnik dvou rovin (speciálně, konstrukce *stop*, tj. průsečnic roviny s průmětnami), řez tělesa rovinou, průsek dvou těles apod.

Při konstrukcích se dále neobejdeme bez umění měření vzdáleností, resp. nanášení dané vzdálenosti na danou přímku, a podobně s odchylkami přímek. Pokud měříme vzdálenost bodu od roviny, neobejdeme se bez pomocné kolmice (a její paty. . .). *Základní metrické (měřičské) úlohy*, které musíme bezpečně ovládat, tedy jsou:

- (4) určit vzdálenost dvou bodů,
- (5) určit odchylku dvou přímek,
- (6) sestrojiti kolmici.

Související úlohy jsou: určit vzdálenost bodu od přímky, určit vzdálenost dvou přímek, určit odchylku přímky od roviny, sestrojiti kolmou rovinu k dané přímce apod.

12.2 Výhled

Jednou z motivací k dalšímu studiu této kapitoly je touha po názorném a správném zobrazování různých těles, zejména těch hezkých (viz odst. 19.3). Poté, co si uvědomíme základní zákonitosti

a osvojíme si několik základních konstrukcí, zjistíme, že umíme zobrazit (příp. změřit) téměř cokoli (viz např. obr. na str. 168).

První zákonitosti včetně opakování základních poznatků a konstrukcí z odstavců o afinních a projektivních zobrazeních jsou zformulovány v podkap. 13. Většinu dílčích problémů, které při reálných konstrukcích potřebujeme, představujeme v podkapitole 14. Tam také diskutujeme pár obecně platných principů, které se týkají vzájemných poloh, vzdáleností, kolmostí a odchylek rovin/přímek/bodů. Několik komplexnějších úloh najdete v podkap. 19. Ostatní části jsou veskrze informativní.

13 Volné promítání

Volné promítání rozlišujeme jak středové, tak rovnoběžné, přičemž přívlastek volné znamená, že průmětna a střed/směr promítání nejsou vzhledem k zobrazovanému objektu nijak předem specifikovány. V této podkapitole zopakujeme několik obecných poznatků o určenosti rovnoběžného a středového promítání a odtud odvozených konstrukcí průmětu obecného bodu v prostoru. Dále představíme řešení základní polohové úlohy — průnik přímky s rovinou — a s těmito poznatky zamíříme do dalších částí ke slibovaným efektivnějším postupům.

13.1 O určenosti volného promítání

Volný průmět tělesa bývá zadán průměty několika málo bodů. Tím je také určen průmět libovolného bodu v prostoru, tedy volné promítání jako takové. Podle toho, zda se jedná o promítání středové nebo rovnoběžné, se liší způsoby určení: Středové promítání je projektivní zobrazení a věta na str. 89 nám říká kolik bodů vlastně potřebujeme, aby byl průmět určen jednoznačně. Podobně, rovnoběžné promítání je afinní a o určenosti takových zobrazení mluví věta na str. 82.

Promítáním prostoru do roviny samozřejmě nikdy nevyčerpáme všechna možná projektivní/afiní zobrazení, proto průměty určujících bodů nemohou být úplně libovolné. Určitě se např. nemůže stát, že by se tři body v obecné poloze promítly do jednoho bodu. Následující věta je jednou z možných formulací tohoto principu v případě rovnoběžného promítání:

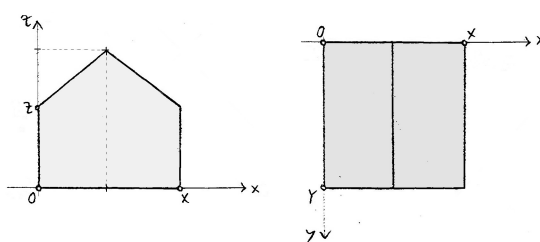
Věta (Pohlkeova–Schwarzova). *Rovnoběžným průmětem tří navzájem kolmých a stejně dlouhých úseček se společným krajním bodem může být jakákoli trojice úseček v rovině se společným krajním bodem, přičemž nejvýše jedna z těchto úseček nebo nejvýše jedna dvojice těchto úseček může mít nulovou délku, resp. odchylku.*

Za stejně dlouhými navzájem kolmými úsečkami si samozřejmě představujeme nějakou kartézskou souřadnou soustavu. Každý bod v prostoru je jednoznačně určen svými souřadnicemi vzhledem k této soustavě. Souřadnice geometricky reprezentujeme body, které jsou sestrojeny pomocí rovnoběžek se souřadnými osami. Pomocný bod v rovině určené osami x, y , resp. x, z budeme nazývat jeho *půdorysem*, resp. *nárysem*.

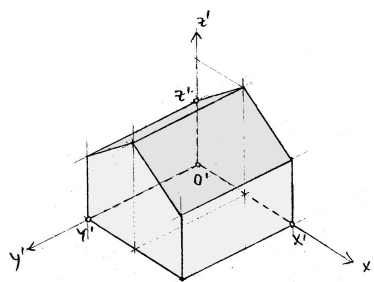
13.2 Zobrazení bodu

Z uvedeného je jasné, jak sestrojit průmět libovolného bodu v prostoru, viz obr. 13.3 a 13.4:

- Volné **rovnoběžné** promítání je určeno obrazy O', X', Y', Z' . Pomocné body na osách sestrojíme tak, aby byly zachovány **dělicí poměry**; k sestrojení průmětu bodu stačí několik **rovnoběžek** se souřadnými osami.



Obrázek 13.2: Nárýs a půdorys tělesa.



Obrázek 13.3: Volný rovnoběžný průmět tělesa z obr. 13.2.

- Volné **středové** promítání je určeno obrazy O', X', Y', Z' a úběžníky souřadných os U', V', W' . Pomocné body na osách sestrojíme tak, aby byly zachovány **dvojpoměry**; k sestrojení průmětu bodu stačí několik přímek procházejících **úběžníky**.

Naopak, je-li dán volný průmět bodu, můžeme pomocí rovnoběžek (resp. spojnic s úběžníky) sestrojít pomocné body na osách a přenesením dělicích poměrů (resp. dvojpoměrů) určit sdružené průměty, tzn. souřadnice tohoto bodu.¹

Když umíme zacházet s průměty jednoho bodu, lze opakováním uvedených konstrukcí sestrojít prakticky cokoli, akorát to asi nebude příliš efektivní. V dalších odstavcích se zejména naučíme, jak si práci zpříjemnit a zjednodušit.

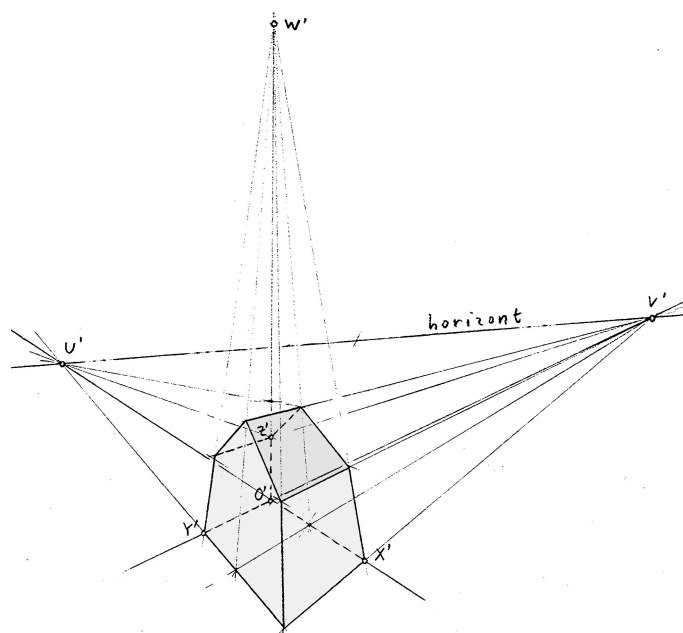
13.3 Průnik přímky a roviny

V tomto odstavci představíme obecné řešení základní polohové úlohy — pro danou přímku p a rovinu ρ máme sestrojít jejich průnik, příp. zjistit, že se neprotínají.

Každý bod musí být sestrojen jako průnik dvou přímek (příp. průnik přímky a kružnice nebo průnik dvou kružnic). Abychom mohli tvrdit, že se dvě zobrazené přímky v prostoru skutečně protínají, musíme mít jistotu, že leží v **jedné rovině**! Odtud je odvozen následující obecný návod řešení:

- (1) nejdřív zvolíme pomocnou (v podstatě libovolnou) rovinu obsahující danou přímku;
- (2) sestrojíme průsečnici r této roviny s rovinou ρ ;
- (3) hledaný bod je průsečíkem přímek p a r (pokud je $p = r$, potom celá přímka p leží v rovině ρ ; pokud je $p \parallel r$, potom taky $p \parallel \rho$, a tudíž se p a ρ neprotínají).

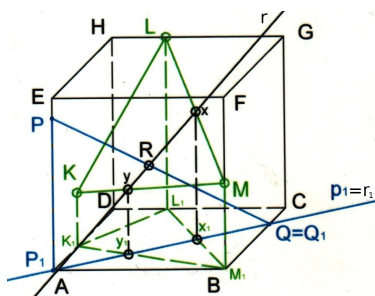
¹Přenášení dělicího poměru, resp. dvojpoměru bodů z jedné přímky na druhou je naznačeno na obr. 11.28.



Obrázek 13.4: Volný středový průmět tělesa z obr. 13.2.

Řešení konkrétních úloh se samozřejmě odvíjí od toho, jak jsou zadány. Obecně však platí, že pomocná rovina v prvním kroku nemůže být volena úplně libovolně, ale naopak hodně specificky, abychom se neocitli v bludném kruhu!

Na obr. 13.5 je dán volný rovnoběžný průmět krychle, vzhledem k níž je vymezena poloha přímky a roviny. Pomocná rovina je volena ve směru hrany AE a všechny naznačené svislé přímky jsou s touto hranou rovnoběžné.



Obrázek 13.5: [M. Ingrštová, 2010] Průnik přímky $p = PQ$ a roviny $\rho = KLM$ (bod K patří do stěny $ADHE$): (1) pomocnou rovinu obsahující p volíme ve směru hrany AE ; (2) průsečnice rovin r je určena pomocnými body x a y , které odvozujeme z jejich „půdorysů“ x_1 a y_1 ; (3) bod $R = p \cap r$ je právě hledaným průnikem $p \cap \rho$.

Typickými úlohami, které se v této souvislosti řeší, jsou řezy (hranatých) těles. Jedná se totiž o několikrát opakování této základní konstrukce, viz odstavce 11.4 a 19.2.

13.4 Cvičení

(1) V úloze na obrázku obr. 13.5:

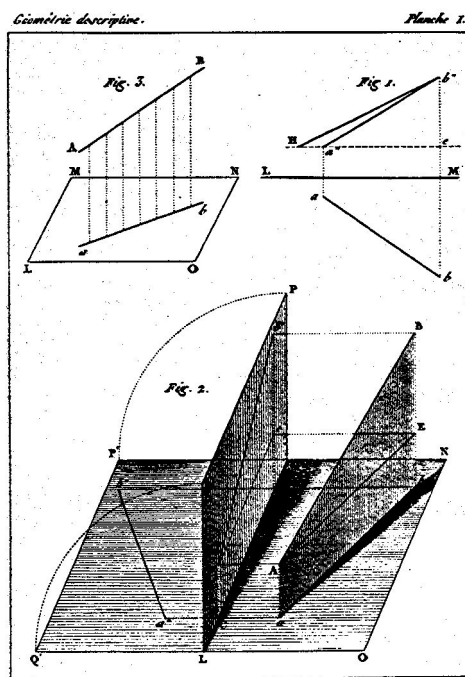
- sestrojte průniky přímek KL , LM a KM s rovinou podstavy $ABCD$,
- sestrojte řez roviny KLM s krychlí.



(2) V pravidelném pětibokém hranolu s podstavami $ABCDE$ a $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$ jsou dány body K , L a M tak, že $K \in A\bar{A}$, $L \in B\bar{C}$ a $M \in \bar{D}\bar{E}$. Sestrojte volný středový průmět tohoto hranolu a jeho řez rovinou $\rho = KLM$.

14 Mongeovo promítání

Mongeovo promítání je kolmé (a tedy rovnoběžné) promítání na dvě navzájem kolmé průmětny. Průmětům říkáme půdorys a nárys, proto se odpovídající průmětny jmenují půdorysná a nárysná. Na rozdíl od volné manipulace s nárysem a půdorysem jako výše jsou tyto v Mongeově promítání jaksi **sduženy** — sr. 13.3 a 14.8. Tento zdánlivý detail dělá z této zobrazovací metody skutečně účinný nástroj, který doceníme zejména při řešení metrických úloh. V následujících odstavcích postupně představíme všechny základní úlohy zmiňované v odst. 12.1.

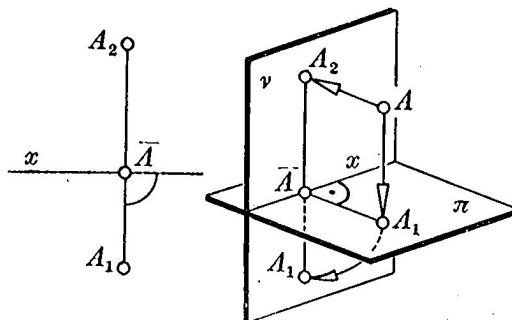


Obrázek 14.6: [Ka] Ukázka z prvního vydání Mongeovy Deskriptivní geometrie (1798).

14.1 Zobrazení bodu, přímky a roviny

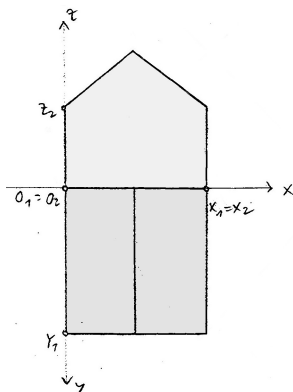
Bod

Na obr. 14.7 je ukázáno, jak jsou bodu v prostoru přiřazeny jeho *sdužené průměty* vzhledem ke dvěma navzájem kolmým průmětnám (s průsečnicí označenou x): Bod A se kolmo promítne do



Obrázek 14.7: [Me] Mongeovy sdužené průměty bodu.

první roviny (půdorys A_1) a do druhé roviny (nárýs A_2). Poté se průměty sduží tak, že se jedna průmětna otočí do druhé kolem průsečnice x . Odtud plyne, že body A_1, A_2 v rovině představují sdužené průměty nějakého bodu v prostoru, právě když přímka A_1A_2 je kolmá na x . Každý bod je svými sduženými průměty určen naprosto jednoznačně.



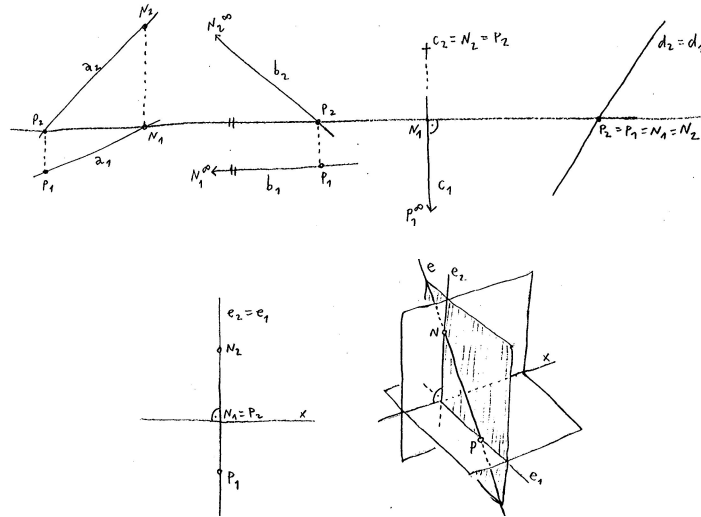
Obrázek 14.8: Mongeovy sdužené průměty tělesa z obr. 13.2.

Přímka

Sdužené průměty přímky jsou zpravidla přímky, ale nemusí tomu tak být pokaždé — je-li přímka kolmá k některé průmětně, pak odpovídajícím průmětem je bod. Přímka je svými sduženými průměty určena jednoznačně právě tehdy, když není kolmá k ose x , tzn. neleží v rovině, která je kolmá k oběma průmětnám současně. V každém případě je přímka určena jednoznačně sduženými průměty dvou různých bodů, které na ní leží...

Pro lepší představu často používáme tzv. *stopníky*, což jsou průsečíky přímky s průmětnami. Pokud je přímka s některou průmětnou rovnoběžná, pak odpovídající stopník je nevlastní. . .

Různé polohy přímek s jejich stopníky jsou na obr. 14.9. Uvědomte si, že konstrukce stopníků je velmi speciálním případem základní polohové úlohy — průnik přímky s rovinou.

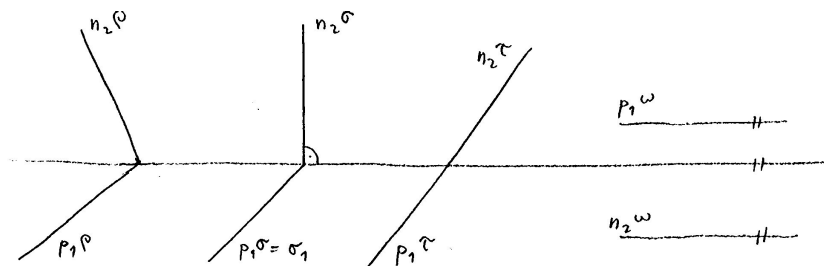


Obrázek 14.9: Sdružené průměty přímek a jejich stopníky; přímka e je jednoznačně určena teprve svými stopníky (nebo nějakým jiným dodatkem).

Rovina

Je-li rovina kolmá k některé průmětně, pak odpovídajícím průmětem této roviny je přímka; v opačném případě je jejím průmětem celá průmětna. Rovina je jednoznačně určena sdruženými průměty tří různých (a nekolineárních) bodů, které v ní leží.

Jiný a zpravidla názornější způsob určení roviny je pomocí tzv. *stop*, což jsou průsečnice s průmětnami. Nárys půdorysné stopy a půdorys nárysné stopy splývají s osou x , proto je na obrázcích nepopisujeme. Pokud rovina neobsahuje osu x , pak je svými stopami jednoznačně určena. V případě, že je rovina s některou průmětnou rovnoběžná, je odpovídající stopa nevlastní. . .

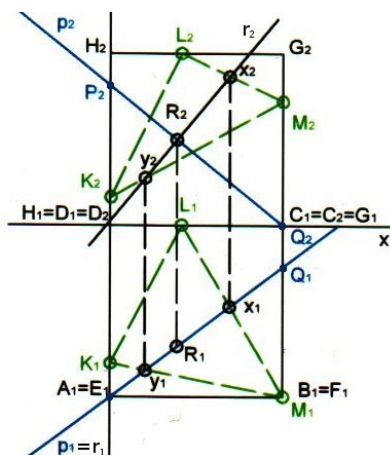


Obrázek 14.10: Rovina je (skoro vždy) určena svými stopami.

14.2 Polohové úlohy

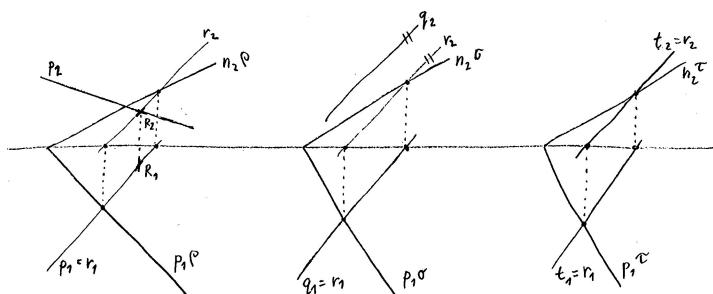
Průnik a vzájemná poloha přímky a roviny

Doslovné překreslení konstrukce průniku přímky a roviny z obr. 13.5 v Mongeově promítání je na obr. 14.11. Motivace a zdůvodnění jsou v odst. 13.3. Přímka r , jež leží v dané rovině a jejíž půdorys se kryje s půdorysem p , je tzv. *krycí přímka*.



Obrázek 14.11: [M. Ingrštová, 2010] Průnik přímky $p = PQ$ a roviny $\rho = KLM$: (1) r je krycí přímka pro směr kolmý k půdorysně ($r_1 = p_1$); (2) její nárys je určen body x, y ; (3) bod $R = p \cap r$ je právě hledaným průnikem $p \cap \rho$.

Pokud by se náhoda stalo, že výše sestrojená přímka r se s p neprotíná, pak to znamená, že přímka p a rovina ρ jsou rovnoběžné. Pokud by se stalo, že r a p splývají, pak to znamená, že p leží celá v ρ . Takto jsme vyčerpali všechny možné vzájemné polohy přímky a roviny v prostoru. Všechny tyto možnosti v případě, že rovina je dána svými stopami, najdete na obr. 14.12.

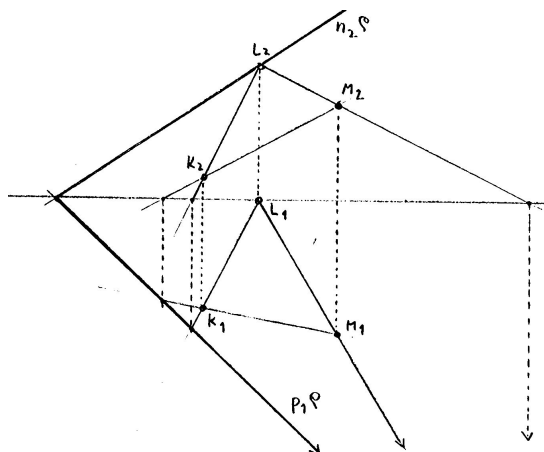


Obrázek 14.12: Vzájemné polohy přímky a roviny: různoběžnost ($p \cap \rho = R$), rovnoběžnost ($q \parallel \sigma$), incidentnost ($t \subset \tau$).

Průnik a vzájemná poloha dvou rovin

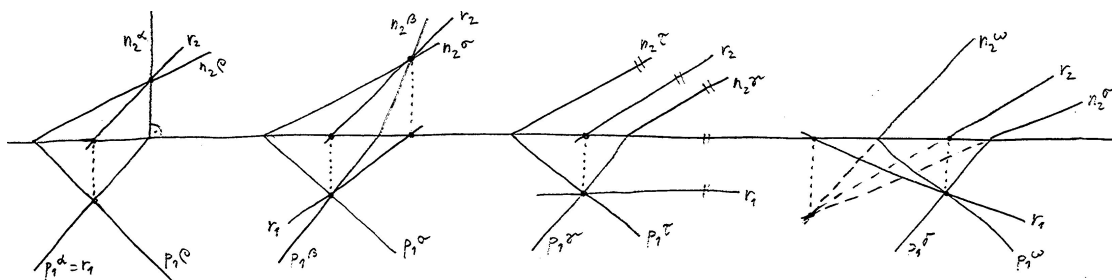
Speciálním případem průniku dvou rovin jsou stopy roviny, což jsou průsečnice s průmětnami. Konstrukce stop roviny dané třemi body je na obr. 14.13. Podobně by se postupovalo v případě,

že rovina je dána dvěma přímkami nebo bodem a přímkou apod.



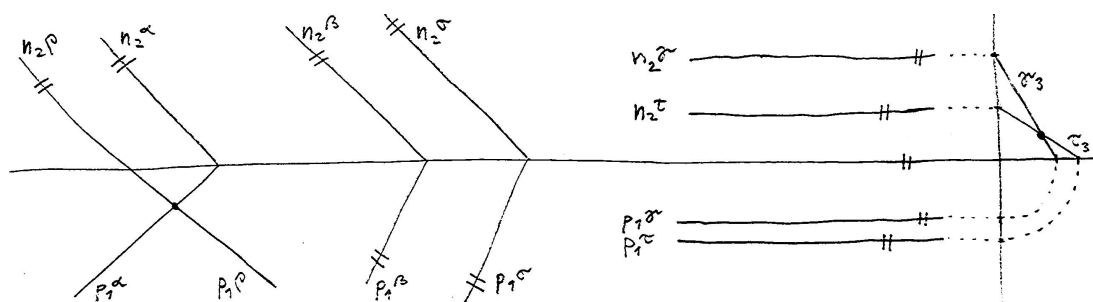
Obrázek 14.13: Stopy roviny $\rho = KLM$ jsou určeny stopníky několika přímek ležících v ρ .

Jsou-li dvě roviny dány stopami, je konstrukce jejich průniku obzvlášť názorná, viz obr. 14.14. V jakémkoli jiném případě stačí sestavit průnik nějaké přímky z jedné roviny s rovinou druhou a tuto konstrukci zopakovat aspoň dvakrát...



Obrázek 14.14: Průsečnice rovin zadaných stopami.

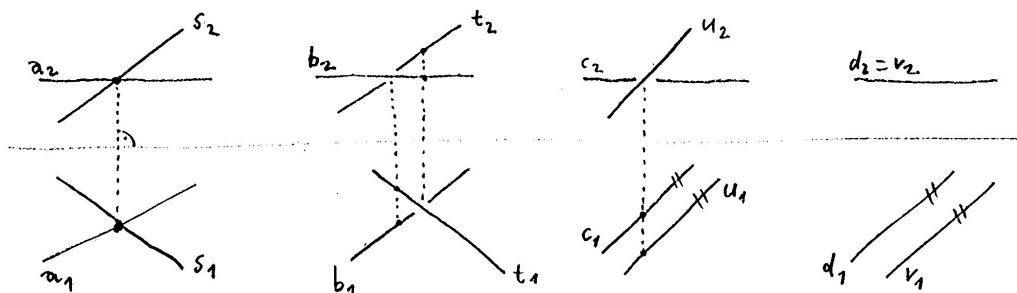
Generickou polohou dvou rovin je různoběžnost. Pokud jsou roviny náhodou rovnoběžné, pak obě dvojice jejich stop musí být taky rovnoběžné. Pozor, opačné tvrzení obecně neplatí, viz obr. 14.15. Pro úplnost: roviny splývají, právě když obě dvojice jejich stop splývají.



Obrázek 14.15: Vzájemné polohy dvou rovin: různoběžnost, rovnoběžnost a ještě jedna různoběžnost.

Vzájemná poloha dvou přímek

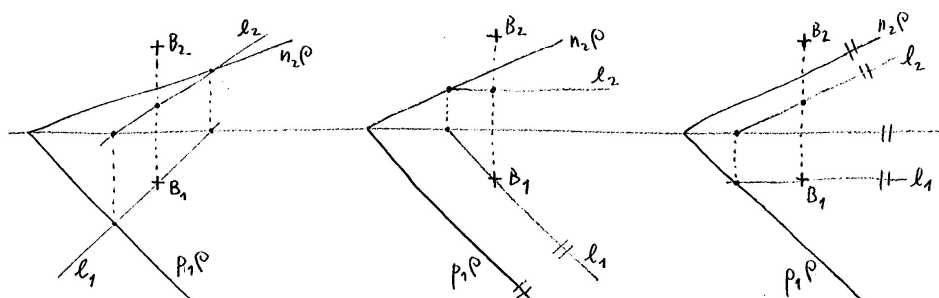
Všechny možné vzájemné polohy představujeme na obr. 14.16; v mimoběžném případě naznačujeme viditelnost křížení v každém průmětu. Pro úplnost: přímky splývají, právě když obě dvojice jejich sdružených průmětů splývají.



Obrázek 14.16: Vzájemné polohy dvou přímek: různoběžnost, dvakrát mimoběžnost a rovnoběžnost.

Další postřehy

Předchozí diskuzi ještě doplníme poznámkou o vzájemné poloze bodu a přímky, resp. bodu a roviny. V obou případech rozlišujeme pouze dvě možnosti: bod na daném objektu buď leží nebo nikoli. Rozpoznat vzájemnou polohu bodu a přímky je samozřejmě triviální; v případě bodu a roviny si musíme pomoci právě nějakou (krycí) přímkou, viz obr. 14.17.



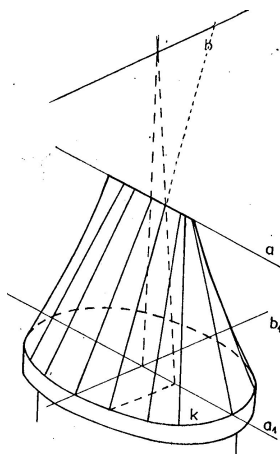
Obrázek 14.17: Vzájemná poloha bodu B a roviny ρ : l je libovolná přímka v ρ taková, že $l_1 \ni B_1$; sestrojíme nárys l_2 a uděláme závěr: $B \in \rho \iff B_2 \in l_2$.

Z uvedeného by mělo být zřejmé, jak by se řešila např. úloha sestrojiti nárys bodu ležícího v dané rovině, je-li dán jeho půdorys apod.

Specifické přímky l na obr. 14.17 jsou tzv. *hlavní přímky* roviny ρ , což jsou přímky ležící v této rovině rovnoběžné s některou z průmětů. To v důsledku znamená, že hlavní přímky jsou rovnoběžné s některou ze stop roviny ρ . Přímky ležící v ρ , které jsou kolmé k některé ze stop, jsou tzv. *spádové přímky* roviny ρ .

Příčky

Jiné typické polohové úlohy jsou konstrukce *příček* mimoběžných přímek (příčka je přímka, která protíná dané mimoběžky). Každé dvě mimoběžky mají nekonečně hodně příček, takže příčka je jednoznačně vymezena až nějakou dodatečnou podmínkou jako např. aby procházela daným bodem, aby měla daný směr, aby byla nejkratší apod. Pomocí příček lze vytvářet zajímavé přímkové plochy, které se hojně objevují v technické praxi. Např. společné příčky tří navzájem mimoběžných přímek tvoří plochu tzv. eliptického hyperboloidu (chladičí věže). Jiný příklad je na obr. 14.18.





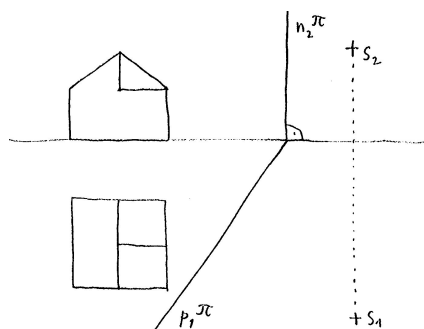
Obrázek 14.18: [Mach] Krov hradní věže ve Štamberku: krokve jsou příčky k mimoběžkám a a b z několika bodů na kruhové podezdívce k .

Ačkoli toto téma podrobněji nediskutujeme, mělo by být jasné, že aspoň z teoretického hlediska je všechno jasné. Pro představu rozebereme případ konstrukce příčky k mimoběžkám a, b z nějakého bodu K : všechny přímky jdoucí bodem K a protínající přímku b tvoří rovinu, kterou si označíme třeba β ; hledaná příčka je právě taková přímka, která leží v této rovině a současně protíná přímku a . Proto stačí:

- (1) uvážit rovinu $\beta = K + b$;
- (2) sestrojít průnik $A = a \cap \beta$;
- (3) spojit body K a A ;
- (4) vyznačit průsečík s přímkou b .

14.3 Cvičení

- (1) U všech výše uvedených Mongeových obrázků si utvořte prostorovou představu o skutečné poloze zobrazených objektů vzhledem k průmětnám. Tuto představu pak volně načrtněte podobně jako na obr. 14.6 nebo 14.9.
- (2) Pro zadání jako na obr. 14.11 sestrojte stopníky přímky p a stopy roviny ρ a znovu určete průsečík $R = p \cap \rho$.
- (3) Rovina σ je dána stopami a přímka q je dána sdruženými průměty svých stopníků. Dokažte, že umíte určit průnik $R = q \cap \sigma$ ve všemožných speciálních případech jako např. $q \perp x$ nebo $\sigma \perp x$.
- (4) Určete průsečnici dvou rovin určených stopami v případě, že průsečík některé dvojice stop není vůbec dostupný.
- (5) Pro zadání ve cvičení 13.4(2) si vhodně zvolte Mongeovy pomocné průmětny (a jednotky) a sestrojte sdružené průměty hranolu včetně řezu rovinou ρ . 
- (6) Na obr. 14.19 jsou sdružené průměty nějakého tělesa, stopy roviny π a sdružené průměty bodu S . Sestrojte středový průmět tohoto tělesa z bodu S do roviny π . (Při konstrukci nepřehlédněte užitečnost pomocných úběžníků.) 



Obrázek 14.19: Sestrojte středový průmět daného objektu z daného středu do dané roviny.

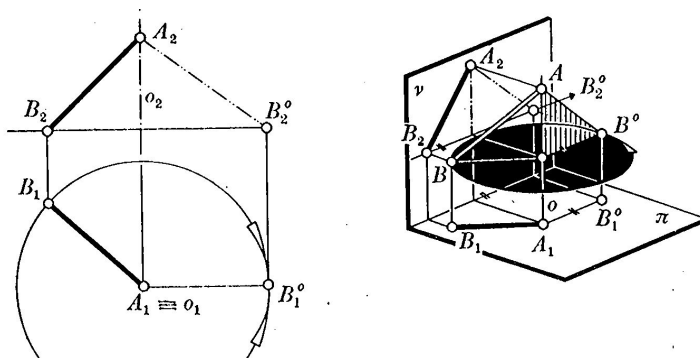
- (7) U předchozí úlohy sestrojte průmět z bodu S do půdorysny a nárýsny. Nahrďte střed S nějakým směrem a řešte podobné úlohy...

14.4 Metrické úlohy

Vzdálenost dvou bodů

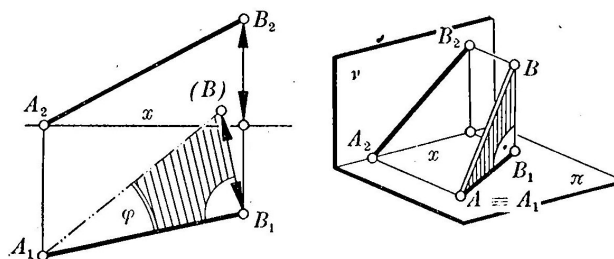
Pokud je přímka určená danými body rovnoběžná s některou průmětnou, pak v odpovídajícím průmětu vidíme vzdálenost bodů ve skutečné velikosti. Ve všech ostatních případech jsou vzdálenosti zkreslené (a protože promítáme kolmo, tak zkrácené).

Jedna z možných konstrukcí skutečné vzdálenosti dvou bodů je motivována právě zmíněným postřehem: pootočíme úsečku určenou těmito body do polohy rovnoběžné s některou průmětnou, viz obr. 14.20.²



Obrázek 14.20: [Me] Nárysný průmět úsečky je ve skutečné velikosti právě tehdy, když je tato úsečka s nárysnou rovnoběžná — proto $|AB| = |A_2B_2^0|$.

V předchozím otáčíme rovinu určenou body A, B a jejich půdorysy A_1, B_1 kolem přímky AA_1 . Jiná konstrukce skutečné velikosti úsečky AB je na obr. 14.21; v tomto případě otáčíme/sklápíme stejnou rovinu kolem přímky A_1B_1 do půdorysny (příp. do roviny rovnoběžné z půdorysnou).



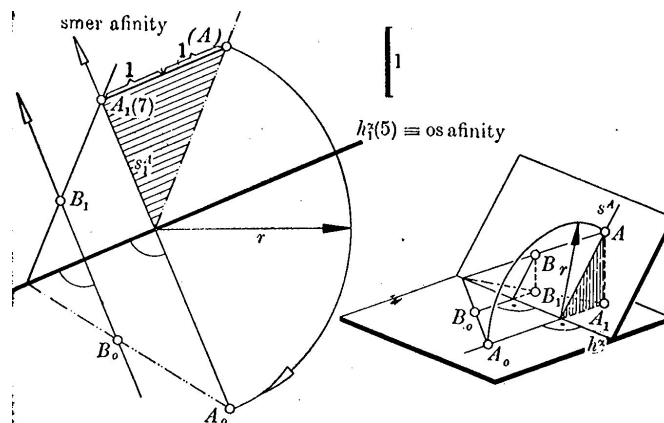
Obrázek 14.21: [Me] Úsečka AB je přeponou v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami AB_1 , resp. B_1B , jejichž velikosti vidíme nezkráceně v půdoryse, resp. náryse.

Otočení roviny

Rovina, kterou jsme otáčeli v předchozích dvou konstrukcích, byla kolmá k půdorysně, tedy poněkud specifická. Nyní se naučíme otáčet obecnou rovinu do průmětny (příp. do polohy rovnoběžné s průmětnou). Náznorné zpracování je na obr. 14.22, kde je naznačeno otáčení roviny

²Stejný nápad jsme použili již na obr. 6.47 k určení velikosti $|XH|$.

kolem hlavní přímky do roviny rovnoběžné s půdorysnou (nenechte se plést značením — místo sdruženého průmětu jsou použity kóty). Podstatné je, že korespondence mezi průměty bodů do této roviny a jejich otočenými obrazy, je stará známá a oblíbená **osová afinita**.



Obrázek 14.22: [Me] Otočení roviny kolem hlavní přímky do polohy rovnoběžné s půdorysnou: vzdálenost bodu A_0 od osy je rovna velikosti přepony v naznačeném pravoúhlém trojúhelníku.

Osovou afinitu mezi průměty bodů a jejich otočenými obrazy doceníme zejména u úloh, kde vystupuje více bodů, nebo když potřebujeme otočit rovinu zpátky do původní polohy. Konkrétní realizace jedné takové úlohy je na obr. 19.46. Další typické úlohy, kde je vhodné si na tyto postřehy vzpomenout, jsou konstrukce průmětu tělesa do obecné roviny, určení skutečné velikosti řezu nějakého hranolu apod.

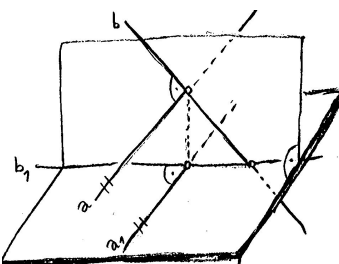
Kolmost

Odchylku dvou různoběžek vidíme v průmětu nezkresleně, pokud je rovina těmito přímkami určena rovnoběžná s odpovídající průmětnou. V případě, že přímky jsou kolmé, platí o něco obecnější a celkem užitečné tvrzení:

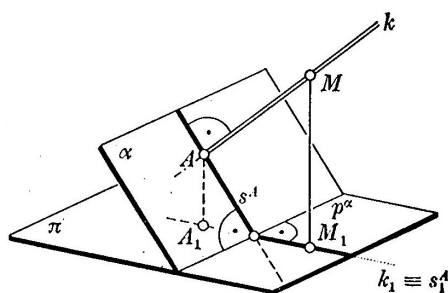
Věta. *Kolmým průmětem dvou kolmých přímek jsou kolmé přímky, pokud aspoň jedna z těchto přímek je rovnoběžná s průmětnou.*

Zdůvodnění plyne přímo z definicí kolmosti přímek a rovin (viz odst. 4.20). Abychom se mohli svobodněji vyjadřovat, označíme kolmice a, b a jejich kolmé průměty a_1, b_1 . Budeme předpokládat, že třeba a je rovnoběžná s průmětnou, což mj. znamená, že $a \parallel a_1$. Protože $a \perp b$ a promítáme kolmo, je přímka a kolmá k rovině určené b, b_1 . Protože $a \parallel a_1$, je také přímka a_1 kolmá k této rovině. To znamená, že a_1 je kolmá ke všem přímkám, které v této rovině leží, zejména tedy k b_1 . \square

Tento postřeh má velice užitečný důsledek pro konstrukci kolmice k rovině, resp. kolmé roviny k přímce: kolmý průmět kolmice k rovině je kolmý ke stopě (obecněji, k průmětu libovolné hlavní přímky)! Jiné zdůvodnění téhož závěru (pomocí spádové přímky) je čitelné z obr. 14.24.



Obrázek 14.23: Kolmým průmětem kolmých přímek jsou kolmé přímky, pokud je aspoň jedna z nich rovnoběžná s průmětnou.



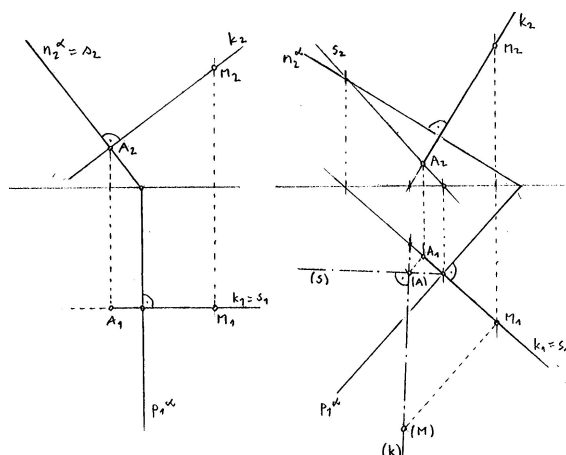
Obrázek 14.24: [Me] Kolmým průmětem kolmice k rovině je přímka kolmá k její stopě.

Vzdálenosti a odchylky obecně

Každý obecnější případ určování vzdálenosti, resp. odchylky lze vždy nějak konstrukčně redukovat na určení vzdálenosti dvou bodů, resp. odchylky dvou přímek. Tato redukce je navíc vždycky přirozená a odvíjí se od definice/charakterizace pojmu vzdálenosti, resp. odchylky.

Vzdálenost bodu od přímky nebo od roviny je určena vzdáleností tohoto bodu od paty kolmice. Vzdálenost dvou přímek je nenulová, pouze když se přímky neprotínají, tedy když jsou rovnoběžné nebo mimoběžné. V prvním případě stačí spustit kolmici z libovolného bodu, druhý případ je poněkud subtilnější — hledáme nejkratší příčku, což je právě příčka kolmá. Vzdálenost přímky od roviny, resp. vzdálenost dvou rovin je nenulová, pouze když jsou tyto rovnoběžné. . .

Z uvedených příkladů bychom si zejména měli všimnout, že dvojice bodů, jejichž vzdálenost nakonec měříme, je vždy nějak charakterizována pomocí pojmu **kolmosti**. Jak kolmost, tak vzdálenost dvou bodů jsme se naučili konstrukčně zrealizovat, takže teoreticky umíme určovat vzdálenosti kdečeho od ledasčeho. Praktické uplatnění uvedených postřehů si lze vyzkoušet ve cvičení 14.5.

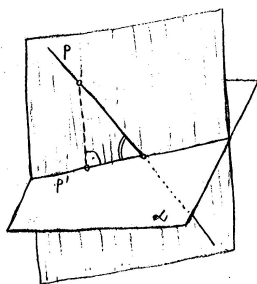


Obrázek 14.25: Vzdálenost bodu M od roviny α je rovna vzdálenosti tohoto bodu od paty kolmice A : vlevo je rovina α kolmá k nárýsně, proto $v(M, \alpha) = |M_2A_2|$; vpravo je obecný případ — vzdálenost měříme po sklopení: $v(M, \alpha) = |(M)(A)|$.

Podobné to je s odchylkami; nejdřív však trochu rozšíříme pojem odchylky dvou přímek. Běžně totiž myslíme (a výše jsme se naučili měřit) odchylku dvou různoběžných přímek, nicméně i v ostatních případech má pojem odchylky dobrý význam:

- odchylka splývajících nebo rovnoběžných přímek je nulová;
- odchylku mimoběžných přímek definujeme jako odchylku libovolných dvou různoběžek, z nichž jedna je rovnoběžná s první mimoběžkou a druhá s druhou.

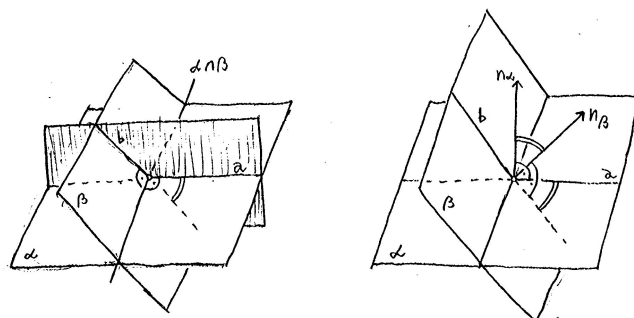
Odchylka přímky od roviny je rovna odchylce dané přímky od jejího kolmého průmětu do dané roviny (viz obr. 14.26). Pokud je přímka s rovinou rovnoběžná nebo je v ní obsažená, pak podle předchozí rozšířené definice dostaneme 0. Pokud je přímka k rovině kolmá, takže se promítá do bodu, pak samozřejmě nemůžeme nic měřit a jednoduše řekneme, že odchylka je 90° .



Obrázek 14.26: Odchylka přímky p od roviny α je rovna odchylce přímek p a p' (= průsečnice α s rovinou k ní kolmou a obsahující p).

Odchylka dvou rovin je rovna odchylce průsečnic těchto rovin s libovolnou rovinou, která je k oběma kolmá (viz obr. 14.27). V případě, že jsou roviny rovnoběžné nebo splývající, dostaneme

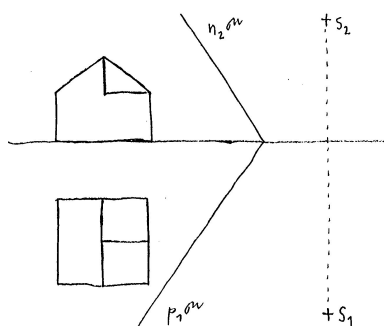
0; v případě různoběžných rovin je pomocná rovina právě rovina kolmá k jejich společné přímce. Uvědomte si, že také tento nápad umíme konstrukčně zrealizovat, ačkoli to představuje celkem hodně práce. Technicky jednodušší je rovnou určit odchylku normál: odchylka dvou přímek v rovině je totiž stejná jako odchylka jakýchkoli k nim kolmých přímek (v téže rovině). Odchylku dvou rovin tedy můžeme určit tak, že (1) nejdříve sestrojíme libovolně k nim kolmé přímky a (2) určíme odchylku těchto kolmic.



Obrázek 14.27: Odchylka rovin α, β je rovna odchylce přímek a, b (= průsečnice α, β s rovinou kolmou ke společné přímce $\alpha \cap \beta$), což je totéž jako odchylka normálových přímek n_α, n_β .

14.5 Cvičení

- (1) Sestrojte stopy roviny, která je kolmá k dané přímce a prochází daným bodem.
- (2) Určete vzdálenost daného bodu od dané přímky, resp. roviny.
- (3) Určete odchylku dvou rovin daných stopami.
- ➡ (4) Pro zadání ze cvičení 14.3(5) sestrojte mnohoúhelník řezu ve skutečné velikosti.
- ➡ (5) Na obr. 14.28 jsou sdružené průměty nějakého tělesa, stopy roviny μ a sdružené průměty bodu S . Sestrojte středový průmět tohoto tělesa z bodu S do roviny μ . (Při konstrukci nepřehlédněte užitečnost pomocných úběžníků.)



Obrázek 14.28: Sestrojte středový průmět daného objektu z daného středu do dané roviny.

- (6) U předchozí úlohy nahraďte střed S nějakým směrem a sestrojte rovnoběžný průmět do roviny μ .

15 Kótované promítání

Kótované promítání je kolmé promítání na jednu průmětnu s tím, že vzdálenost (některých) bodů od průmětny je naznačena jako jejich kóta. Kóty tedy nahrazují sdružený průmět u Mongeova promítání. S tímto typem zobrazení se můžeme setkat např. na turistických (a jiných) mapách.

Bod v prostoru je určen svým průmětem a kótou. Přímka je určena kótovanými průměty dvou bodů, příp. stopníkem a jedním dalším kótovaným bodem. Rovina je určena kótovanými průměty tří bodů, příp. stopou a jedním dalším kótovaným bodem. . .

Obrázek 15.29: Zobrazení bodu, přímky a roviny, konstrukce stopníků a stop. . .

Metody řešení základních úloh v kótovaném promítání a v Mongeově promítání si jsou v mnohém podobné, takže zmíníme jenom několik příkladů na ukázkou. V každém případě si vždy můžeme zvolit pomocnou (kolmou) průmětnu, podle kót sestrojíme druhé průměty vybraných bodů a řešit úlohu tak, jak jsme zvyklí. Ne vždy je však takový postup nutný a často lze postupovat přímo, viz např. obr. 15.29. Typická konstrukce, která vypadá stejně v kótovaném i Mongeově promítání, je na obr. 14.22. Dvojitě řešení jedné polohové úlohy je na obr. 15.30.

Obrázek 15.30: Průnik rovin $r = \alpha \cap \rho$ sestrojený pomocí (a) hlavních přímek, (b) pomocného průmětu.

16 Axonometrie a kosoúhlé promítání

Uvažme nějakou kartézskou souřadnou soustavu v prostoru s počátkem O a osami x, y, z . Bod v prostoru je jednoznačně určen souřadnicemi vzhledem ke zvolené souřadné soustavě a naopak. Bod a jeho souřadnice geometricky (tj. bez číselného vyjadřování) zadáváme pomocí kolmých průmětů do rovin x, y (půdorys) a x, z (nárys). Pokud zvolíme nějakou další rovinu, která je v obecné poloze vzhledem k souřadným osám, pak rovnoběžné promítání do takové roviny je tzv. *axonometrie*, a tu podle směru promítání rozlišujeme na kolmou a šikmou.

Axonometrie je tedy obyčejné rovnoběžné promítání na jednu průmětnu, nicméně z úvodu (a názvu) se dá odtušit, že při této zobrazovací metodě se budeme soustředit na otázku měření (*-metrie*), zejména podél os (*axono-*). Vzpomeňte, že problém měření ve volném rovnoběžném promítání, jak jsme je představili v podkapitole 13, je teoreticky celkem jasný, ale prakticky poněkud otravný (opakované přenášení dělicích poměrů). Základním axonometrickým úkolem je najít nějakou rychlou a technicky **pohodlnou korespondenci** mezi Mongeovy sdruženými průměty bodu a jeho axonometrickým průmětem. Tato korespondence, pojmenovaná jako zářezová metoda, je odvozena v odst. 16.1 a posléze zobecněna v odst. 16.2.

Mezním případem (šikmé) axonometrie je tzv. *kosoúhlé promítání*, kdy promítáme šikmo do roviny x, z (Mongeova nárysna). O tomto promítání se letmo zmíníme v odst. 16.3.

16.1 Kolmá axonometrie

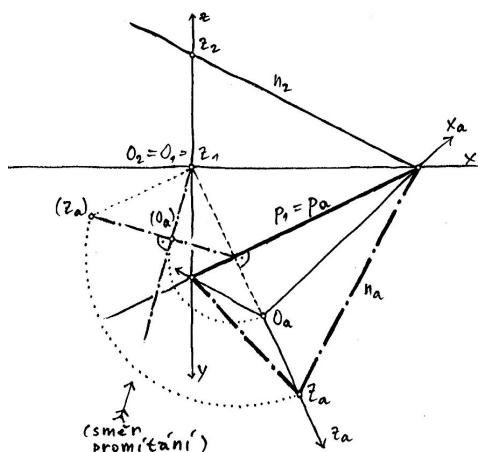
Kolmá axonometrie je úplně určena rovinou axonometrické průmětny. Vzhledem k pomocným Mongeovým průmětnám tuto průmětnu zadáváme stopami nebo pomocí průsečíků se souřadnými osami. Trojúhelník určený těmito průsečíky je tzv. *axonometrický trojúhelník*. Kolmá axonometrie bývá zpravidla zadána právě axonometrickým trojúhelníkem.

Axonometrický trojúhelník a důležité postřehy

Na obr. 16.31 je představeno, jak lze sestrojiti axonometrický trojúhelník a průměty souřadných os, a to výhradně s dovednostmi, které jsme se naučili v podkapitole 14:

- (1) axonometrický průmět počátku je sestrojen jako průnik promítacího paprsku jdoucího tímto bodem s danou rovinou,
- (2) poté se rovina otočí kolem půdorysné stopy do půdorysny.

Přitom si uvědomujeme, že Mongeovy průměty promítacího paprsku jsou kolmé ke stopám roviny. Podobně by se dal sestrojiti průmět jakéhokoli bodu v prostoru, viz cvičení 14.5(6).



Obrázek 16.31: Kolmá axonometrie je dána stopami axonometrické průmětny; sestrojiti axonometrický trojúhelník a průměty osového kříže...

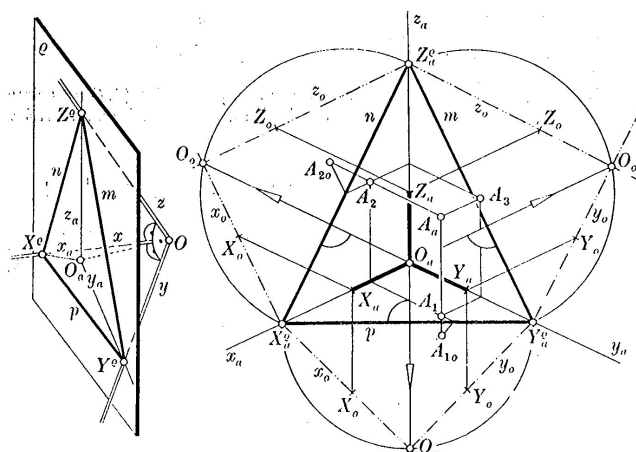
Zúžíme-li se pouze na body v Mongeově půdorysně, dostáváme korespondenci, která je zřejmě afinním zobrazením (složení dvou afinních zobrazení) a má stopu p jako přímku samodružných bodů. To je samozřejmě naše oblíbená **osová afinita**, jejíž osou je stopa p , směr je kolmý na p a obraz libovolného bodu je dán obrazem počátku O .

Podobný vztah samozřejmě platí také mezi Mongeovým a axonometrickým nárysem, příp. bokorysem. Odtud plyne, že průmět počátku je právě **průsečíkem výšek** axonometrického trojúhelníku.³

³Umíme zdůvodnit i přímo s odkazem na větu na str. 115: promítáme kolmo a osa z je kolmá k rovině x, y , tedy i k přímce p , ...

Zářezová metoda

Typicky je kolmá axonometrie zadána axonometrickým trojúhelníkem a nikoli stopami jako na obr. 16.31. Z předchozího víme, že průmět počátku je průsečíkem výšek tohoto trojúhelníku a vztah mezi Mongeovým a axonometrickým půdorysem (resp. nárysem) je osová afinita. K jednoznačnému určení této osové afinity stačí sestrojít bod odpovídající počátku. Ten leží na kolmici ke stopě a současně na pomocné Thaletově kružnici (aby Mongeovy průměty os byly kolmé), viz obr. 16.32.



Obrázek 16.32: [Me] Kolmá axonometrie je dána axonometrickým trojúhelníkem; sestroyen osový kříž, jednotky na osách a průmět bodu A . .

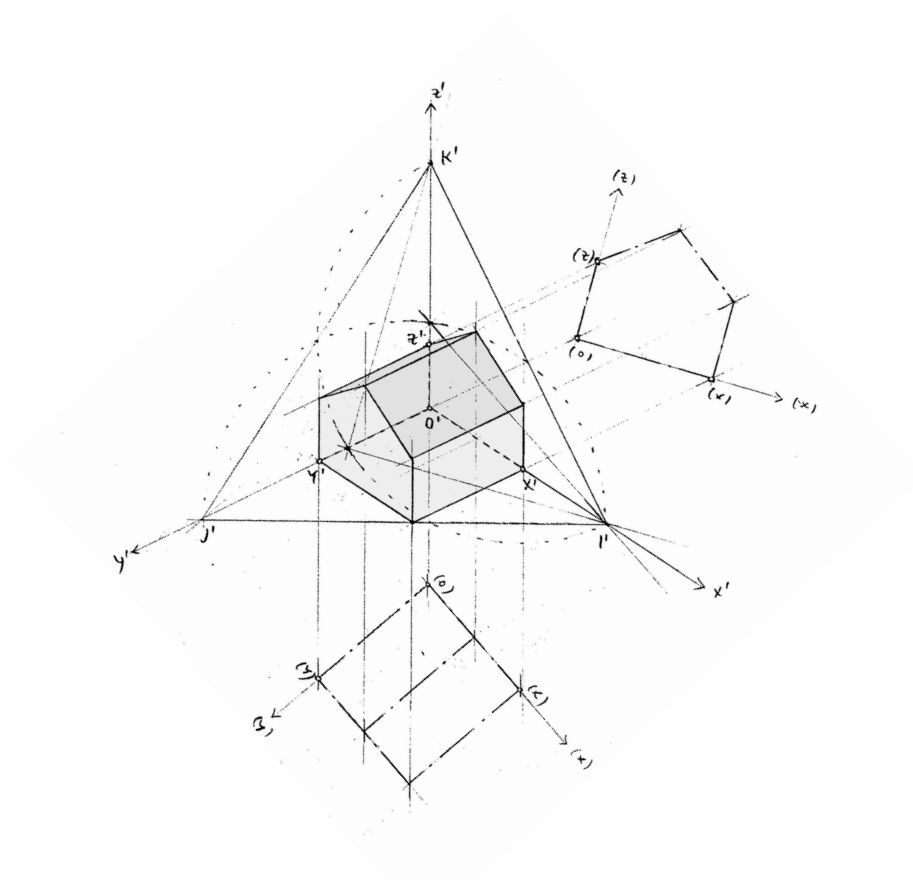
Na tomto obrázku si můžeme všimnout, že body A_{1o}, A_1, A_a leží na jedné přímce, která je kolmá na p (tj. ve směru z_a); bod A_{1o} je Mongeův půdorys, A_1 je axonometrický půdorys a A_a je axonometrický průmět bodu A . Podobně je to s trojicí A_{2o}, A_2, A_a . . . Odtud plyne slibovaná bleskurychlá konstrukce axonometrického průmětu libovolného bodu A :

- (1) umístíme Mongeův půdorys, resp. nárys bodu A vzhledem k otočeným osám x_o, y_o , resp. x_o, z_o ,
- (2) vedeme kolmice z těchto bodů k odpovídajícím stopám axonometrického trojúhelníku (tj. ve směru axonometrických průmětů příslušných os),
- (3) axonometrický průmět bodu A je průsečíkem těchto kolmic.

Uvědomte si, že při této konstrukci je celkem jedno, na kterou stranu otáčíme pomocné průmětny. Stejně tak si můžeme pomocné Mongeovy průměty posunout v uvedeném směru libovolně daleko, aby se nám nepřekrývaly pomocné čáry s těmi podstatnými. Tomuto způsobu konstrukce axonometrického průmětu se říká *zářezová metoda*. Typickou aplikaci této metody najdete na obr. 16.33, příp. v příloze na str. 167.

Poznámky

Dosud jsme diskutovali několik možností konstrukce axonometrického průmětu bodu daného Mongeovými sdruženými průměty, resp. souřadnicemi. Uvědomte si, že tento proces je vždy



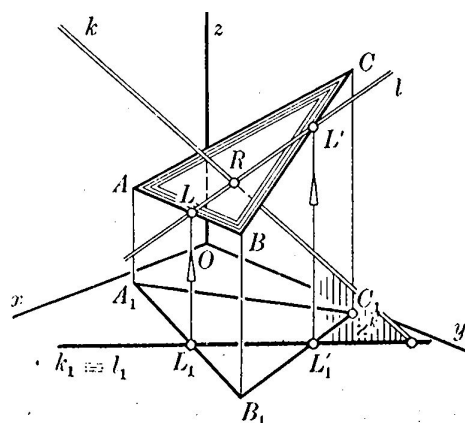
Obrázek 16.33: Kolmý axonometrický průmět tělesa z obr. 13.2 pomocí zářezové metody.

čitelný **v obou směrech**: poloha každého bodu v prostoru je dána jeho axonometrickým průmětem spolu s jeho axonometrickým půdorysem; odtud lze vždy doplnit axonometrický nárys, příp. bokorys bodu; pomocí výše popsané korespondence (osová afinita, viz obr. 16.32) umíme sestavit Mongeův půdorys, nárys, příp. bokorys tohoto bodu, tj. jeho souřadnice.

Hlavní výhodou řešení úloh v kolmé axonometrii je, že pracujeme s hodně názornými obrázky (aspoň pro malá měřítka) a současně jsme schopni velice hospodárně realizovat celkem jakékoli měření. Všechny základní úlohy, které jsme zmiňovali v podkapitole 14, je nyní možné převyprávět v této zobrazovací metodě. My jsme slibovali, že to dělat nebudeme, avšak na ukázkou uvádíme aspoň jednu základní úlohu, viz obr. 16.34 (až na značení a vzájemnou polohu zadávajících objektů se jedná právě o úlohu řešenou na obr. 14.11, resp. obr. 13.5).

16.2 Šikmá axonometrie

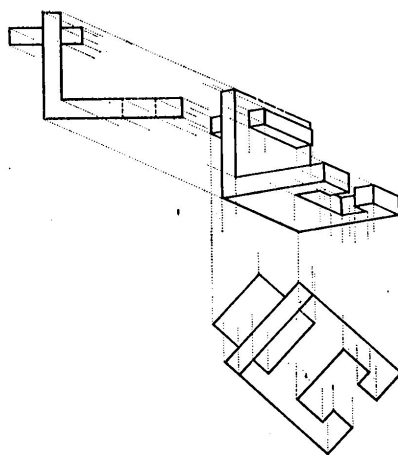
Rozdíl mezi kolmou a šikmou axonometrií je jenom ve směru promítání vzhledem k axonometrické průmětně. Nebudeme tedy opakovat všechno, co jsme říkali v předchozích odstavcích, pouze zformulujeme několik poznámek.



Obrázek 16.34: [Me] Průnik přímky k a roviny $\rho = ABC$: (1) l je krycí přímka pro směr kolmý k půdorysně ($l_1 = k_1$); (2) její axonometrický průmět je určen body L, L' ; (3) bod $R = k \cap l$ je právě hledaným průnikem $k \cap \rho$.

Šikmá axonometrie je zcela určena axonometrickým trojúhelníkem a obrazem počátku. Korespondence mezi axonometrickým půdorysem a otočeným (Mongeovým) půdorysem je opět osová afinita, jejíž osou je půdorysná stopa p , akorát směr této afinity **nemusí být kolmý ke stopě p** . Podobně je to s nárysy a bokorysy. Odtud lze rovněž odvodit *zářezovou metodu* konstrukce axonometrického průmětu z Mongeových (vhodně umístěných) sdružených průmětů. . .

Pro rychlé a názorné zobrazení nějakého objektu daného svými sdruženými průměty se užívá právě tohoto postupu s tím, že Mongeovy průměty umísťujeme do nákresny úplně libovolně podle vlastního uvážení. V tomto případě nejsou průmětna ani směr promítání předem specifikovány, jedná se tedy o jakési volné rovnoběžné promítání, ovšem zadané poněkud neobvyklým způsobem. Příklad takové konstrukce je na obr. 16.35.



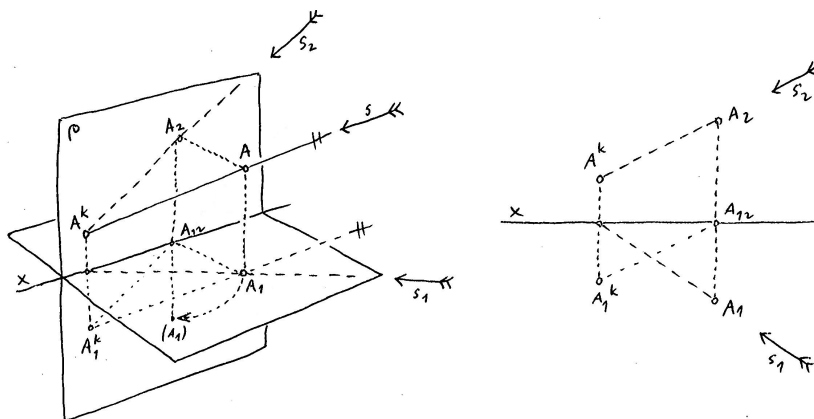
Obrázek 16.35: [Me] Volný rovnoběžný průmět nějaké součástky pomocí zářezové metody.

Z uvedeného je patrné, že tato metoda je vhodná zejména pro zobrazování hranatých těles; o zobrazování oblých těles se zmíníme záhy, viz odst. 19.4.

16.3 Kosoúhlé promítání

Speciálním, resp. mezním případem šikmé axonometrie je tzv. *kosoúhlé promítání*, kdy hlavní průmětna splývá s Mongeovou nárysnou. To znamená, že osy x a z v průmětu osového kříže svírají pravý úhel. Kosoúhlé promítání je zcela určeno směrem promítání, který však tentokrát — na rozdíl od obecné axonometrie — není zadán obrazem počátku, protože ten leží přímo v průmětně.

Na obr. 16.36 je naznačena konstrukce kosoúhlého průmětu obecného bodu v prostoru pro zadaný směr promítání. Průmětem je právě **nárysný stopník** přímky určené tímto bodem a směrem promítání! Stejně jako v případě obecné axonometrie si všimneme několika užitečností: Zúžíme-li naše promítání pouze na body v půdorysně, pozorujeme opět afinitu, jež má osu x jako přímku samodružných bodů. Korespondence mezi Mongeovým a kosoúhlým půdorysem je tedy **osová afinita**, jež je zcela určena osou x a libovolnou dvojicí odpovídajících si bodů (A_1 a A_1^k). Podobný vztah platí také mezi Mongeovým a kosoúhlým bokorysem; vztah mezi Mongeovým a kosoúhlým nárysem je samozřejmě identita.



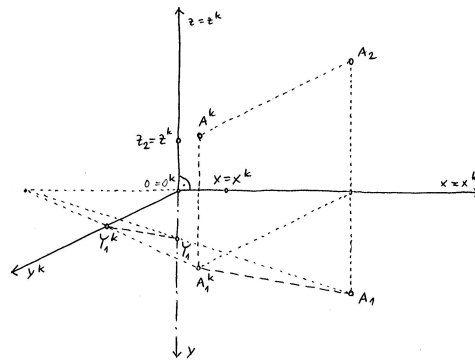
Obrázek 16.36: Kosoúhlé promítání je dáno směrem s ; sestojen kosoúhlý průmět bodu A jakožto stopník promítacího paprsku.

Na obr. 16.37 je zobrazen průmět osového kříže s jednotkami na osách, což jednoznačně určuje nějaké rovnoběžné promítání. Protože průměty os x a z jsou kolmé a jednotky na těchto osách jsou stejné, je tímto způsobem zadáno právě kosoúhlé promítání. Kosoúhlý půdorys bodu A je sestojen pomocí výše popsané osové afinity, kosoúhlý průmět je doplněn z nárysu. . .

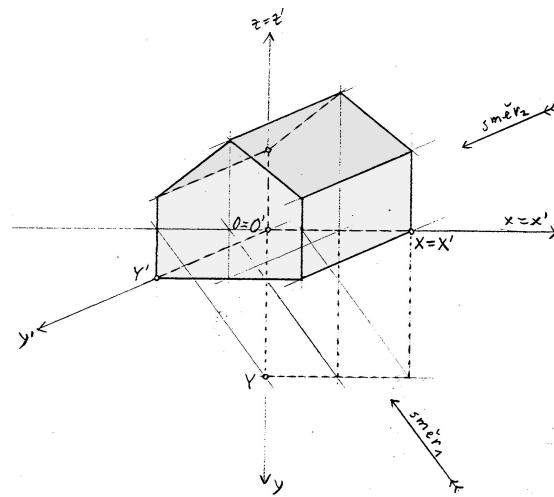
Komplexnější úlohy řešené v kosoúhlém promítání hledejte ve cvičeních nebo v podkapitole 19. Jeden názorný příklad je na obr. 16.38.

16.4 Cvičení

- (1) Pro zadání jako na obrázku obr. 14.11 sestojte axonometrický a kosoúhlý průmět (a) stop roviny $\rho = KLM$, (b) přímky $p = PQ$ a krycí přímky r , (c) průsečíku $R = p \cap \rho$.
- ➡ (2) Pro zadání ze cvičení 14.5(6) určete axonometrický trojúhelník a sestojte průmět daného



Obrázek 16.37: Kosoúhlé promítání je dáno obrazem bodu Y na ose y ; sestrojen kosoúhlý průmět bodu A pomocí osové afinity mezi Mongeovým a kosoúhlým půdorysem.



Obrázek 16.38: Kosoúhlý průmět tělesa z obr. 13.2.

tělesa pomocí zářezové metody.

- (3) Sestrojte kosoúhlý průmět tělesa z předchozího cvičení.

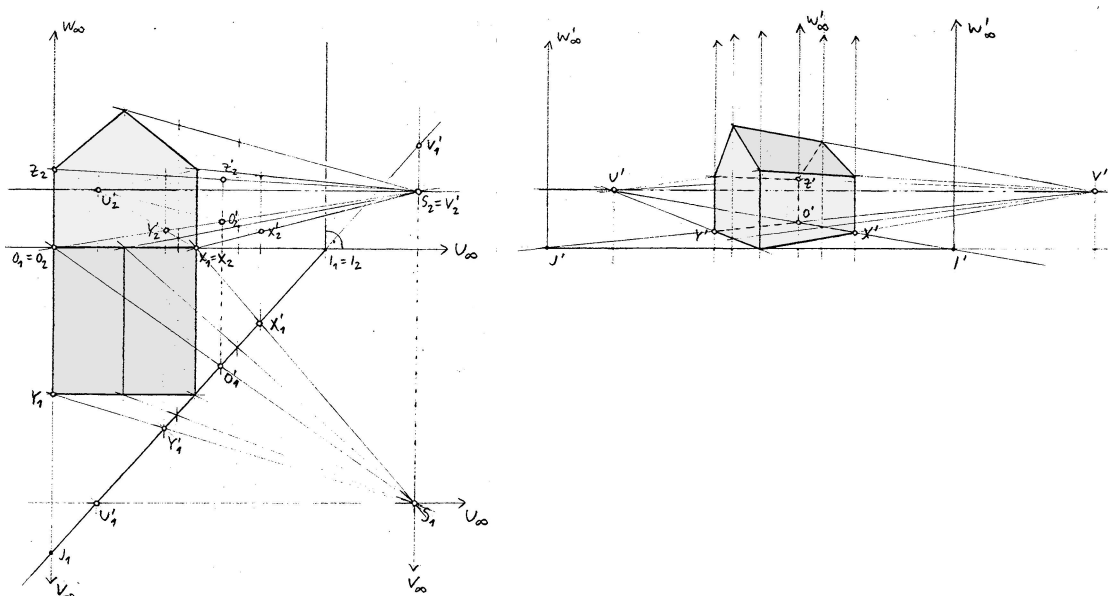
17 Perspektiva

Perspektivou (bez přívlastků) myslíme obyčejné středové promítání na jednu průmětnu. Z předchozího víme, že při obecném středovém promítání se vlastní body mohou zobrazovat do nevlastních a naopak, což má za následek, že některé objekty se docela krutě deformují; např. středovým průmětem kružnice může být klidně hyperbola (což při rovnoběžném promítání samozřejmě není možné). Pokud chceme zobrazovat realitu co nejlépe našemu vnímání, uvažují se jistá omezení: předpokládá se dostatečná vzdálenost středu promítání od průmětny a zobrazují se jenom objekty uvnitř zorného kužele, jehož vrcholový úhel je zhruba $40\text{--}50^\circ$. V takovém případě se mluví o *perspektivě lineární*...

Přívlastkem lineární se často jenom zdůrazňuje, že se promítá do roviny a ne třeba na válcovou plochu. Lineární perspektiva je tedy specifické **projektivní** zobrazení prostoru do roviny; něco málo si dořečneme v dalším odstavci. Nelineárním perspektivám věnujeme pár poznámek v odst. 17.3.

17.1 Lineární perspektiva

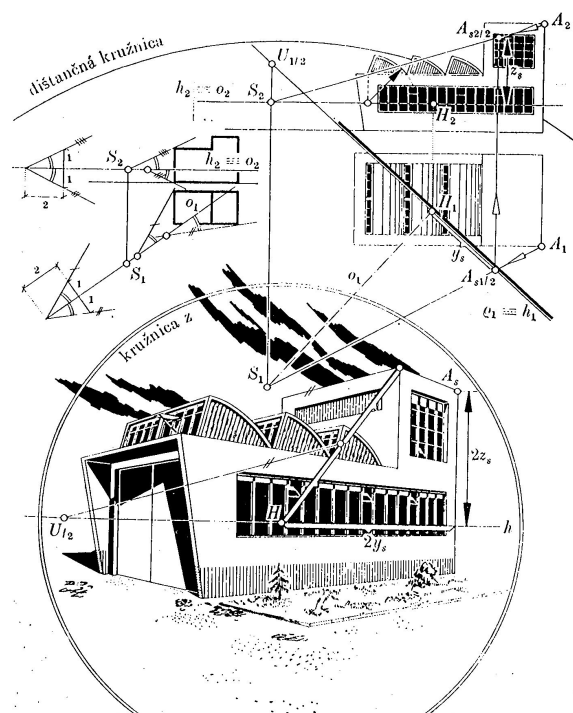
Lineární perspektiva může být zadána *volně*, tj. průmětem dostatečným počtem bodů/úběžníků. V odst. 13.2 jsme diskutovali, jak v takovém případě sestavit obraz libovolného dalšího bodu v prostoru. Konstruktivně to znamená hlavně opakované (a nezajímavé) přenášení dvojpoměrů. Perspektiva může být taky dána *vázaně*, tj. explicitní polohou průmětny a středu promítání vzhledem k souřadným osám, resp. Mongeovým pomocným průmětnám. V takovém případě víme, jak postupovat ze cvičení 14.3(6) a 14.5(5). Konstruktivně to znamená opakované sestavování průniků promítacích paprsků s rovinou průmětny a dodatečné otočení průmětny. Dva konkrétní příklady, kdy je perspektivní průmětna zvolena kolmo k Mongeově půdorysně, jsou na obrázcích 17.39 a 17.40.



Obrázek 17.39: Perspektivní průmět tělesa z obr. 13.2.

Na obr. 17.40 je patrné několik technických detailů, které rychle okomentujeme: V levé horní části obrázku se nejdříve hledá vhodná poloha středu promítání tak, aby se celý objekt vlezl do zorného kužele. Průmětna je zvolena kolmo k půdorysně, vzdálenost od středu je celkem libovolná. Na obrázku je dále patrná konstrukce průmětu bodu A — horizontální vzdálenosti měříme v půdoryse od referenčního bodu H , vertikální měříme v náryse od horizontu h . Výsledný průmět je vzhledem k Mongeovým pomocným průmětům dvakrát zvětšen — úběžník pro směry kolmé k nárysně by se nevezl do náčrtny, proto je užito stejnolehlosti (se středem v bodě H a koeficientem 2).

Stejně jako pro jakoukoli jinou zobrazovací metodu je i v případě lineární perspektivy vyvinuto několik postupů, které mohou práci zjednodušit. Při těchto postupech se velice často užívá **osové**



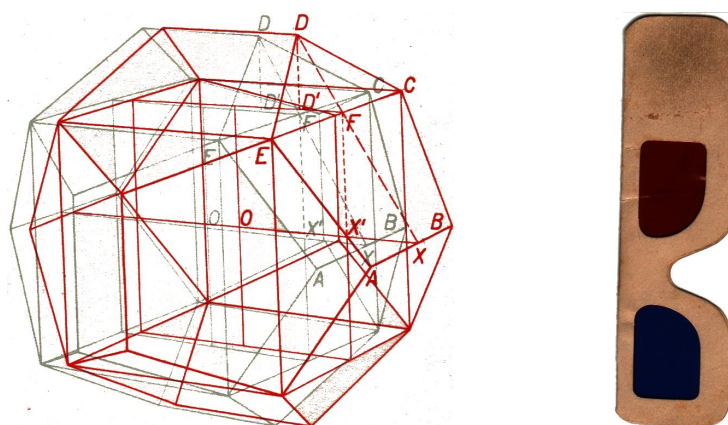
Obrázek 17.40: [Me] Perspektivní průmět budovy.

kolineace. To by nemělo nikoho překvapovat, protože speciálním případem osově kolineace je osová afinita, a tu jsme několikrát zaznamenali v předchozím povídání o axonometrii a kosoúhlém promítání. Zájemce o podrobnosti odkazujeme na [KKK, Me, U] a další klasickou literaturu.

17.2 Stereoskopie a anaglyfy

Stereoskopie je zobrazovací metoda, kterou se snažíme vzbudit iluzi trojrozměrnosti nad dvojrozměrnou předlohou tím, že každému oku dodáváme jiný průmět téhož objektu. Toho lze dosáhnout tak, že se zobrazovaný objekt perspektivně promítne, a to ze dvou středů, které jsou od sebe vzdáleny stejně jako zorničky lidských očí. . .

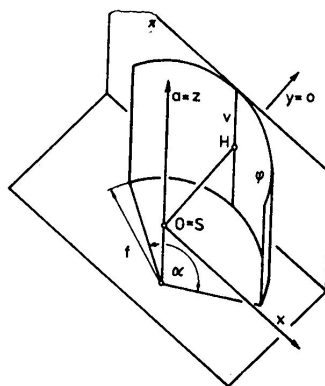
Jednou ze stereoskopických technik jsou tzv. *anaglyfy*: dva perspektivní průměty jsou zobrazeny v téže průmětně různými barvami, které jsou pak odstíněny dvojbarevnými brýlemi, viz obr. 17.41.



Obrázek 17.41: [Pr] Dvanáctistěn (s vepsanou krychlí) jako anaglyf: červený průmět je určen levému oku, azurový pravému, tzn. brýle nasazujeme červeným sklem na pravé oko a azurovým na levé.

17.3 Nelineární perspektiva

Typickým příkladem nelineární perspektivy je *válcová* neb *cylindrická perspektiva*, kdy se prostor promítá z daného středu na válcovou plochu (jejíž osa zpravidla prochází středem promítání). Takové zobrazení se užívá při panoramatickém fotografování, viz obr. na str. 169. Protože promítáme na jinou plochu než rovinu má za následek, že přímky se obecně nemusí zobrazovat na přímky. To znamená, že takové zobrazení rozhodně **není projektivní**.



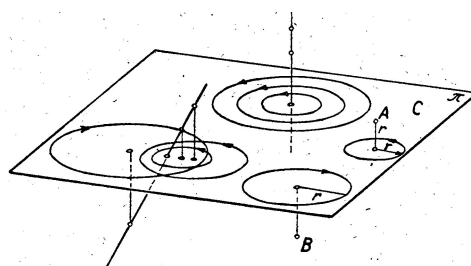
Obrázek 17.42: [DV] Určující prvky válcové perspektivy...

Na obr. 17.42 jsou naznačeny určující prvky válcové perspektivy — průmět libovolného bodu v prostoru je pak určen středovým průmětem ze středu S na válcovou plochu φ a následným rozvinutím této plochy do roviny π . Uvědomte si, že sestrojiti obraz obecného bodu nelze realizovat eukleidovským pravítkem a kružítkem, viz problém rektifikace kružnice v odst. 20.1. . .

Jiným příkladem nelineární perspektivy je geometrie objektivu zvaného *rybí oko*, již je možno interpretovat jako složení středového promítání na kulovou plochu a ještě jednoho promítání z této plochy do roviny (kulovou plochu není možné rozvinout, proto se musí promítat) . . .

18 Cyklografie

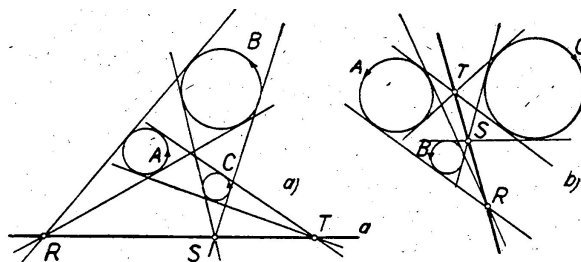
Cyklografie je trochu exotická zobrazovací metoda, která však má zajímavé aplikace. Cyklografie má nejbliž ke kótovanému promítání — bod A v prostoru je zastoupen svým kolmým průmětem A_1 , akorát místo kóty (z_A) kreslíme cyklus se středem v A_1 , s poloměrem $|z_A|$ a s orientací odpovídající znaménku z_A . Naopak, každý cyklus v průmětně určuje jednoznačně bod v prostoru.



Obrázek 18.43: [Kut] Cyklografický průmět bodu a přímky.

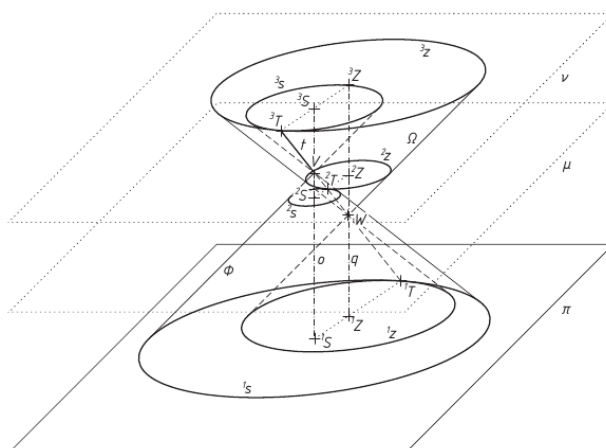
Z uvedeného se dá tušit, že zmiňované aplikace se budou týkat právě úloh s cykly/kružnicemi:

Např. cyklografická interpretace konstrukce stopy roviny dané třemi body na obr. 18.44 nám musí připomínat Mongeovu větu (viz obr. 9.6 na str. 71).



Obrázek 18.44: Cyklografická konstrukce stopy roviny ABC .

Pomocí cyklografie se taky celkem hezky interpretují některá geometrická zobrazení, jako např. trochu problematická dilatace, viz obr. 18.45.



Obrázek 18.45: [Br] Cyklografická interpretace dilatace dotýkajících se cyklů. . .

Dalšími typickými aplikacemi mohou být výše diskutované Apollóniové úlohy — jejich cyklografická interpretace vede sice k prostorovým, ale celkem jednoduchým konstrukcím jako např. určení průniku přímky s rovinou nebo kuželem!

Podrobnosti a další zajímavosti je možné najít např. v [Sei] nebo [Br].

19 Typické úlohy

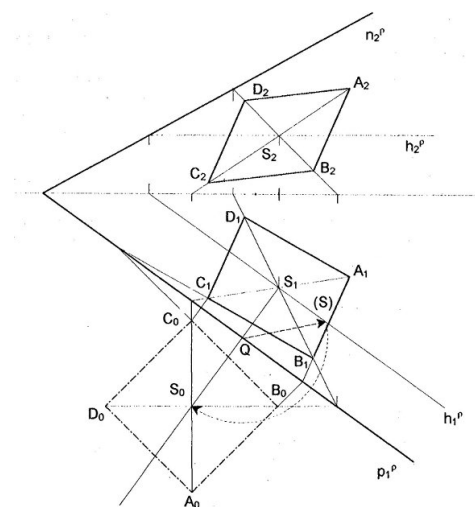
Chceme-li sestavit názorný obrázek nějakého tělesa, můžeme sestavovat volný nebo vázaný průmět, středový nebo rovnoběžný (v tomto případě navíc rozlišujeme šikmý nebo kolmý). Volné průměty jsme uměli sestavovat hned na začátku této kapitoly, u vázaného zobrazování jsme se naučili několika technicky výhodným zkratkám. Některé typické konstrukce si tady chceme připomenout. Začneme typickou metrickou úlohou o otáčení roviny.

19.1 Otáčení roviny

O otáčení roviny a zobrazení nějakého rovinného obrazce ve skutečné velikosti jsme mluvili v odst. 14.4.

Uvedenou konstrukci lze však použít i v opačném směru: Na obr. 19.46 je dána rovina ρ svými stopami a dále půdorysy bodů S a A . Máme za úkol sestavit sdružené průměty čtverce, který leží v rovině ρ , má střed S a vrchol A . Možné řešení je následující:

- (1) sestojíme nárys bodu S a otočíme S kolem půdorysné stopy do půdorysny (S_0);
- (2) pomocí osové afinity doplníme otočený bod A_0 ;
- (3) sestojíme skutečný čtverec ($A_0B_0C_0D_0$);
- (4) pomocí osové afinity otočíme zpátky ($A_1B_1C_1D_1$);
- (5) oplníme nárysný průmět.

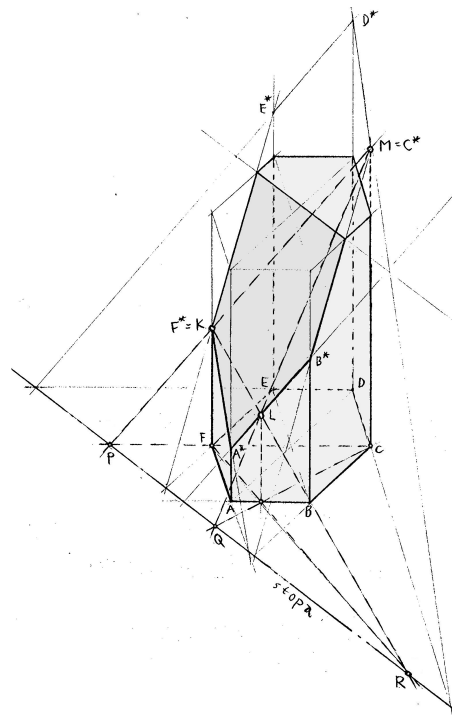


Obrázek 19.46: [Ř] Konstrukce průmětů čtverce $ABCD$ ležícího v rovině ρ , se středem v bodě S a vrcholem A .

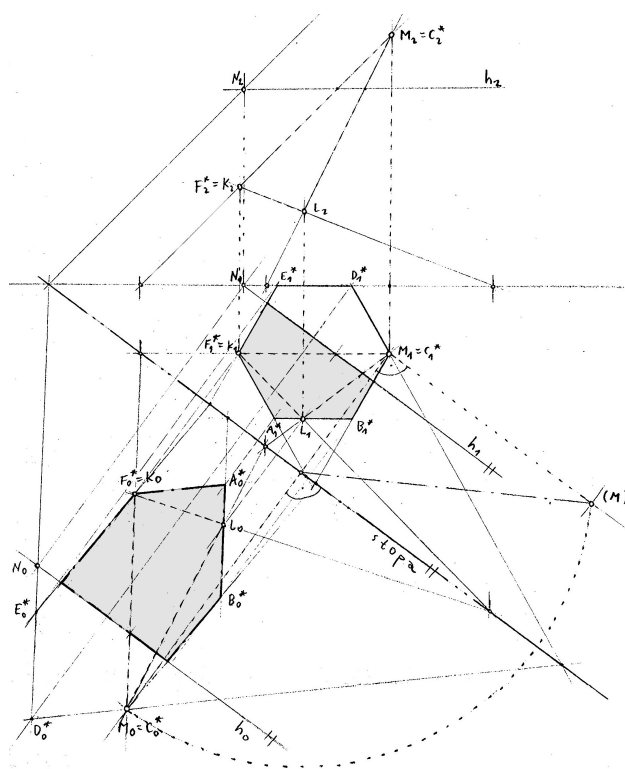
19.2 Řezy hranatých těles

O řezech jsme poprvé mluvili v odst. 11.4 (specifické zadání), podruhé ve cvičení 13.4 (obecné zadání ve volném promítání), potřetí ve cvičení 14.3 (obecné zadání v Mongeově promítání) a počtvrté ve cvičení 14.5 (velikost řezu ve skutečné velikosti).

V řešení obecných úloh tohoto typu odkazujeme na základní konstrukce průniku přímky a roviny a otáčení roviny; v obou případech s výhodou používáme osovou kolineaci, příp. afinitu.



Obrázek 19.47: Volný rovnoběžný průmět pravidelného šestibokého hranolu a jeho řezu rovinou KLM .

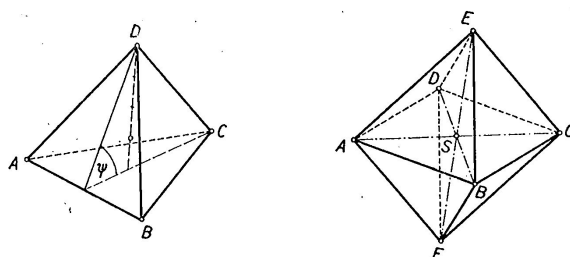


Obrázek 19.49: Velikost řezu ve skutečné velikosti.

19.3 Zobrazení Platónských těles

Volně

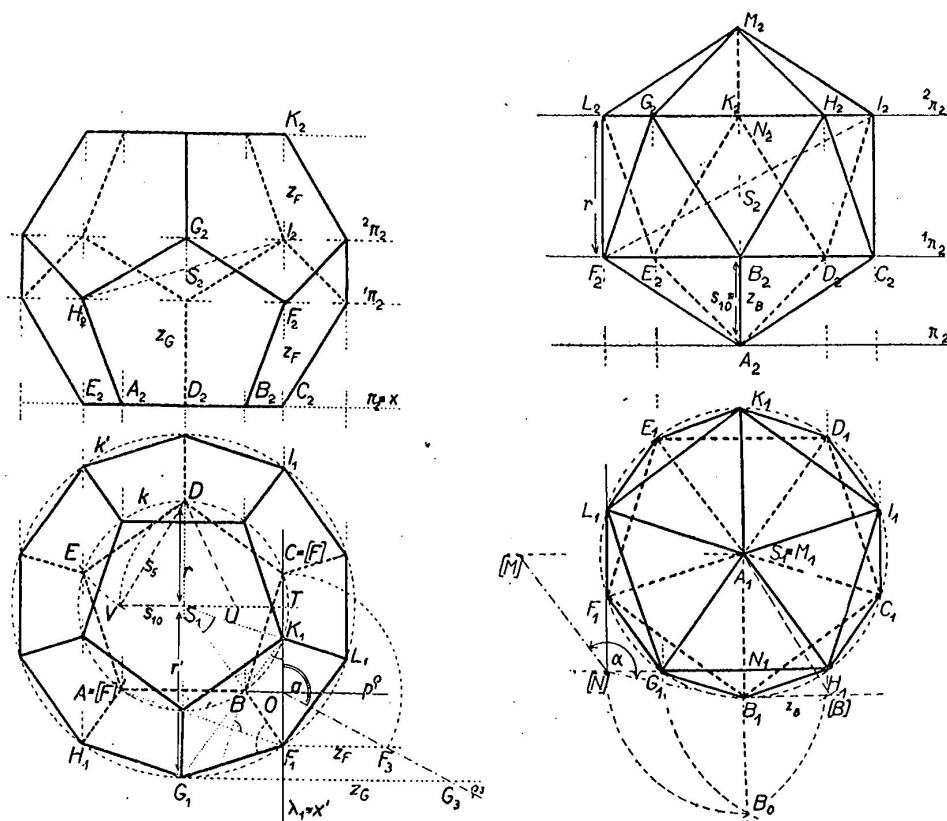
Na obr. 19.50 je volný rovnoběžný průmět pravidelného čtyřstěnu a osmistěnu. V prvním případě není co řešit, protože rovnoběžný průmět je určen obrazy čtyř vrcholů a čtyřstěn jich ani víc nemá. Tyto průměty vrcholů mohou být zvoleny celkem libovolně (věta 13.1 na str. 103 nám akorát říká, že splývat mohou nejvýše dva z nich). Pravidelný osmistěn má šest vrcholů — jsou-li dány průměty čtyř vrcholů v obecné poloze, zbylé dva se snadno doplní pomocí rovnoběžníků. O průmětech pravidelného šestistěnu (krychle) jsme se bavili tolikrát, že jej tady klidně přeskočíme. Volný průmět dvacetistěnu, resp. dvanáctistěnu spolu s kompletním rozбором a odtud plynoucím možným návodem ke konstrukci jsme představili v odst. 4.21.



Obrázek 19.50: [U] Volný rovnoběžný průmět pravidelného čtyř- a osmistěnu.

Vázaně

Při konstrukcích vázaných průmětů začínáme s Mongeovými sruženými průměty tělesa, které je ve speciální poloze vůči průmětnám. To znamená, že konstrukce průmětů je jednodušší. Jediná dvě konstrukčně netriviální Platónská tělesa zobrazená ve velmi speciálních polohách vůči průmětnám jsou na obr. 19.51.



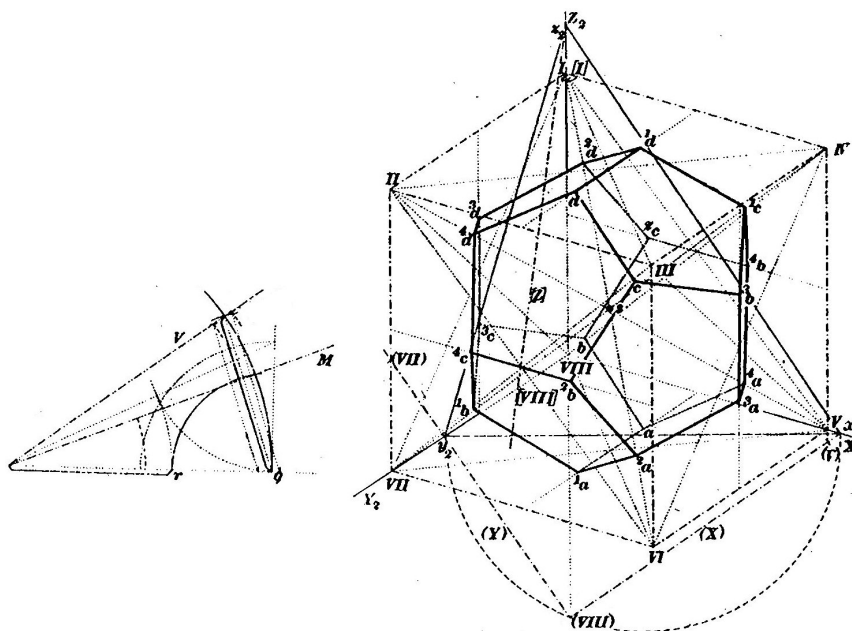
Obrázek 19.51: [KV] Mongeovy sružené průměty pravidelného dvanácti- a dvacetistěnu.

Odtud lze rychle sestrojít (a) axonometrický průmět pomocí zářezové metody, kterou jsme

vysvětlovali v odst. 16.1, nebo (b) kosoúhlý průmět podle návodu z odst. 16.3. Můžeme také sestrojít (c) perspektivní průmět podle návodu v odst. 17.1 (který je odvozen ze cvičení 14.3(6).

Alternativně

Komu předchozí možnosti pořád nestačí, může výše zmiňované metody různě kombinovat jako např. na obr. 19.52: Zde je zobrazen kolmý axonometrický průmět krychle, do níž je vepsován dvanáctistěn. Při této konstrukci se nejdřív zdůvodní, že když rozdělíme stranu opsané krychle zlatým řezem, tak delší díl odpovídá straně vepsané krychle (tj. úhlopříčce pětiúhelníku) a kratší díl odpovídá straně dvanáctistěny (tj. straně pětiúhelníku). Takto se celkem volně (přenášením dělicích poměrů) sestrojí 12 vrcholů ve stěnách opsané krychle. Zbýlých 8 vrcholů tvoří právě vrcholy vepsané krychle a tady se využije stejnolehlosti obou krychlí. . .

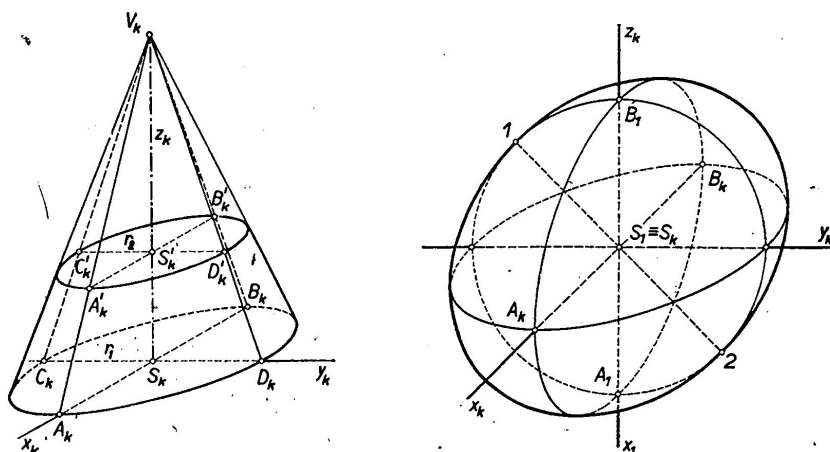


Obrázek 19.52: [KKK] Kolmý axonometrický průmět pravidelného dvanáctistěny.

19.4 Zobrazení oblých těles

Oblými tělesy tady myslíme jenom kužele, válce a koule. Při sestrojování jejich průmětů potřebujeme umět z daných podmínek sestrojít vždy průmět nějaké obrysové kružnice, u kuželů a válců ještě obrysové přímky. Při každém rovnoběžném a vhodně zvoleném středovém promítání je průmětem kružnice elipsa a tato je pro nás dokonale určena svými hlavními průměry. Obrysové přímky kuželů a válců jsou pak tečnami k elipsám, které jsou průměty podstav. Obě tyto úlohy jsou řešitelné eukleidovským pravítkem a kružítkem, a to hned několikerým způsobem. V našich úlohách přichází elipsa vždycky jako obraz kružnice vzhledem k nějaké osově afinitě (kolineaci), kterou s oblibou rádi užíváme a preferujeme, viz odst. 11.5.

Na obr. 19.53 je průmět kužele a koule v kosoúhlém promítání, avšak bez zmiňovaných pomocných konstrukcí. Naopak všechny pomocné čáry (plus dodatečné osvětlení) lze najít na obr. 19.54.



Obrázek 19.53: [U] Kosoúhlý průmět rotačního kužele a koule...

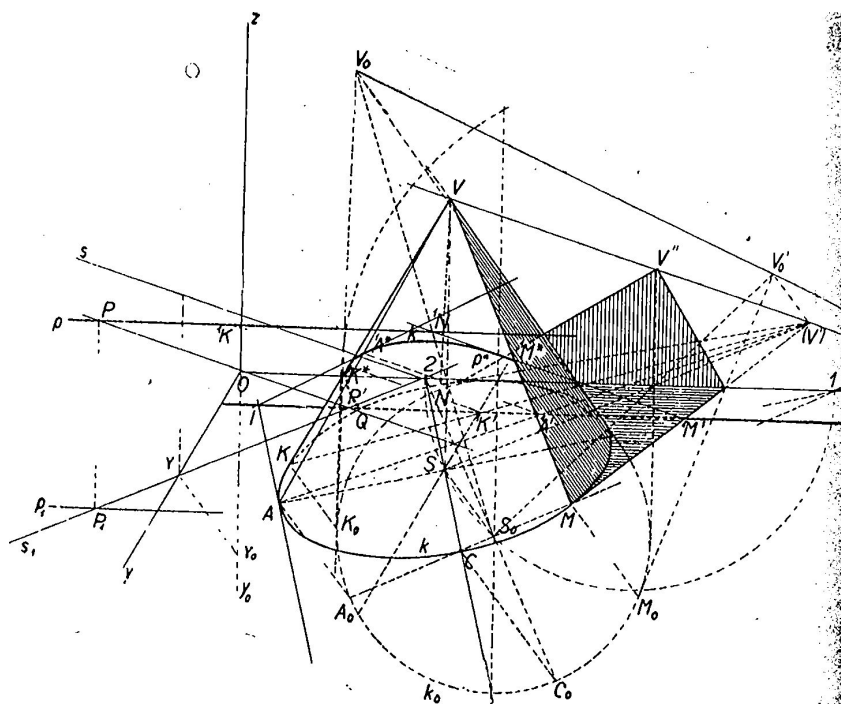
Uvědomte si, že sestavit kolmý axonometrický průmět kužele, resp. válce s podstavou v půdorysně je mnohem jednodušší, protože nemusíme sestavovat směry hlavních průměrů — hlavní osa le rovnoběžná s půdorysnou stopou axonometrického trojúhelníku a je zobrazena ve skutečné velikosti, stačí pouze určit zkrácení na vedlejší ose. S koulí je to samozřejmě ještě lepší.

19.5 Další


Osvětlení

Často se kvůli zdůraznění prostorové představy zobrazují tělesa spolu s jejich stíny vzhledem ke zvolenému zdroji osvětlení. Úlohy tohoto typu neskýtají z teoretického hlediska žádné nové myšlenky, tudíž se s nimi nemusíme moc zaobírat. Jediné, co potřebujeme dostatečně mnohokrát opakovat, je opět základní úloha o průniku přímky s rovinou.


Na obr. 19.54 je dán rotační kužel s podstavou v půdorysně a směr osvětlení. Sestrojen je kosoúhlý průmět kužele spolu s vlastním stínem na kuželi a stíny vrženými do první i druhé průmětny...

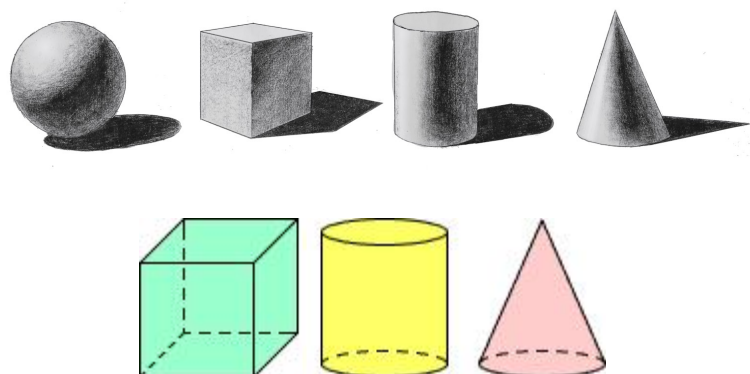


Obrázek 19.54: [KV] Osvětlení kužele.

Na obrázku je samozřejmě víc čar než by se jednomu mohlo zamlouvat, proto je vždy vhodné  přemýšlet na nějakým vlastním řešením. . .

Co je špatně?

Úplně na závěr uvádíme jedno užitečné cvičení. Na obr. 19.55 jsou zobrazeny dvě skupiny těles, u nichž se předpokládá, že všechna tělesa ze stejné skupiny stojí na téže rovině a jsou zobrazena týmž způsobem. Pokud jsme se v tomto kurzu něčemu naučili, mělo by nám být hned jasné, co je na obrázku špatně a proč. Navíc bychom měli umět případné chyby napravit, a to s pravítkem a kružítkem! 



Obrázek 19.55: [I] Jsou dány průměty dvou skupin těles. Najděte a opravte všechny pohoršující skutečnosti.

20 K eukleidovským konstrukcím

Všechny odstavce v této podkapitole odkazují na problém sestrojitelosti reálných veličin. Tomuto tématu jsme se věnovali v odst. 4.18, kde jsme zformulovali charakterizaci eukleidovsky sestrojitelných veličin.

20.1 Slavné problémy starověku

Existuje několik skutečně slavných a dlouhou dobu otevřených problémů, jež byly formulovány již ve starověku. Několik úloh, které se týkají eukleidovské sestrojitelosti, zmíníme níže. Zdůvodnění jejich řešitelnosti/neřešitelnosti je založeno na algebraickém popisu naznačeném v odst. 4.18. Detaily samozřejmě ignorujeme, viz dříve doporučené zdroje.

Zdvojení krychle

Úkolem je sestrojit krychli, jejíž objem je dvojnásobkem objemu dané krychle. Je-li velikost hrany dané krychle a , pak hledaná krychle má mít hranu délky $x = \sqrt[3]{2}a$. Třetí odmocnina ze 2 je sice algebraické číslo, ale nikoli výše uvedeného tvaru. Tato úloha není eukleidovsky řešitelná.

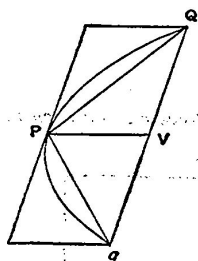
Rektifikace kružnice

Úkolem je sestrojit úsečku, jejíž délka je rovna velikosti obvodu dané kružnice. Je-li poloměr dané kružnice r , pak hledaná úsečka má mít velikost $x = 2\pi r$. Od roku 1767 se ví, že číslo π není racionální, a od roku 1882 se ví, že číslo π není algebraické, tudíž není sestrojitelné. Tato úloha není eukleidovsky řešitelná.

Kvadratura kruhu

Úkolem je sestrojit čtverec, jehož obsah je roven obsahu daného kruhu. Je-li poloměr daného kruhu r , pak hledaný čtverec má mít hranu dlouhou $x = \sqrt{\pi}r$. Ze stejného důvodu jako u rektifikace kružnice, není tato úloha eukleidovsky řešitelná.

Odedávna bylo dobře známo, že řešitelnost těchto dvou problémů je ekvivalentní (viz odst. 7.2) a odedávna se lidé domnívali, že se jedná o neřešitelnou úlohu. Nicméně odedávna bylo také známo několik příkladů kvadratury křivočarých útvarů, viz Hippokratovy půlměsíce (odst. 7.1) a Archimédovu kvadraturu paraboly (obr. 20.1).



Obrázek 20.1: [HTD] Obsah parabolické úseče je roven $\frac{4}{3}$ obsahu trojúhelníku PQq (což jsou $\frac{2}{3}$ obsahu opsaného rovnoběžníku).

Trisekce úhlu

Úkolem je roztřít daný úhel na tři shodné úhly. Na rozdíl od předchozích problémů je tato úloha záludná v tom, že některé úhly sestrojít lze a některé nikoli. Řešení je opět ryze algebraické a zajímavé a redukuje se na analýzu kořenů polynomů třetího stupně nad vhodnými algebraickými rozšířeními tělesa racionálních čísel.

Do seznamu sestrojitelných úhlů samozřejmě patří 90° , 60° , jejich poloviny, čtvrtiny, osminy, ale taky libovolné celé násobky. Kromě toho z odst. 4.14 umíme sestrojít úhel 72° apod. Na druhé straně, mezi úhly, které eukleidovskými nástroji sestrojít nelze, patří např. nevinně vyhlížející 20° a spousta (opět drtivá většina) dalších.

Konstrukce pravidelného n -úhelníku

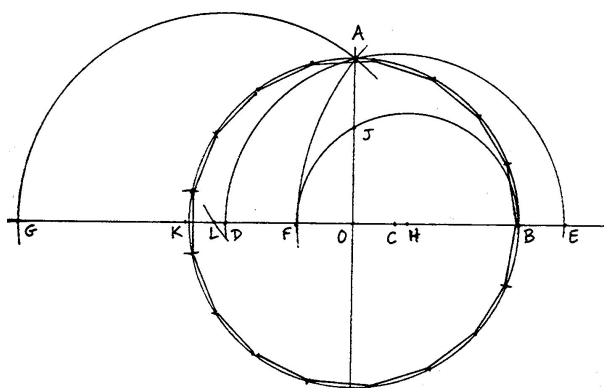
Úkolem je sestrojít pravidelný n -úhelník, což evidentně úzce souvisí s předchozím problémem, akorát jsme podstatně redukovali množinu úhlů do diskuze. V Základech najdeme konstrukce pro $n = 3, 4, 5$ a 15 . Pro každý sestrojitelný pravidelný k -úhelník, není problém sestrojít taky pravidelný $2k$ -úhelník. Tzn. úloha je řešitelná také pro $n = 6, 8, 10, 12, 16, 20$ a další.

30. března 1796 C.F. Gauss sestrojil pravidelný 17-úhelník (viz obr. 20.2) a posléze dokázal jednu implikaci v následující větě. Druhý směr o několik desítek let později dokázal P.L. Wantzel stejně jako pár dalších výše zmiňovaných výsledků.

Věta (Gaussova–Wantzelova). *Pravidelný n -úhelník lze sestrojít eukleidovským pravítkem a kružítkem právě tehdy, když n je součinem libovolné mocniny 2 a navzájem různých Fermatových prvočísel.*

Fermatovo prvočíslo je prvočíslo tvaru $F_k = 2^{2^k} + 1$. K dnešnímu dni¹ je známo pouze pět Fermatových prvočísel: $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257$ a $F_4 = 65537$. Tato úloha tedy není řešitelná pro $n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, \dots$ Pro další čtení doporučujeme např. velmi dobře srozumitelnou 13. kapitolu v [A].

¹19. května 2014

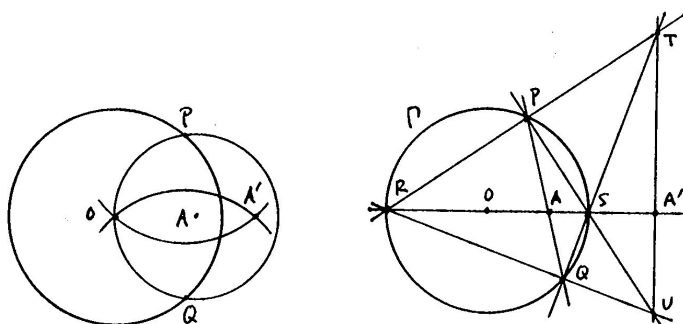


Obrázek 20.2: [Ha] Konstrukce pravidelného 17-tiúhelníku.

20.2 Mascheroniovské a steinerovské konstrukce

Mascheroniovské konstrukce jsou konstrukce, při kterých se používá pouze kružítko. *Steinerovské konstrukce* jsou konstrukce, při kterých se používá pouze pravítko a jedna pomocná předem narýsovaná kružnice. Platí, že veličina je sestrojitelná eukleidovsky, právě když je sestrojitelná mascheroniovsky, právě když je sestrojitelná steinerovsky. Toto tvrzení se zdůvodňuje v podobném duchu, jak jsme naznačili v odst. 4.18, viz [Mar₂].

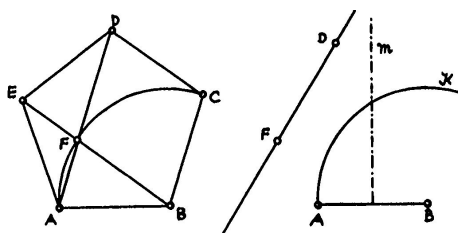
To v důsledku znamená, že jakoukoli eukleidovskou konstrukci musí jít realizovat mascheroniovsky, příp. steinerovsky. Nalezení takové konstrukce může být samozřejmě poněkud komplikovanější, než zdůvodnit, že to je možné. Dva příklady na ukázkou jsou na obr. 20.3.

Obrázek 20.3: [Ha] Mascheroniovská a steinerovská konstrukce inverzního bodu A' k bodu A při kruhové inverzi se středem v O ...

20.3 Konstrukce s označeným pravítkem

Konstrukce s označeným pravítkem jsou konstrukce, při kterých se používá jak kružítko, tak pravítko, a navíc je dovoleno dělat na pravítku značky, které se dále používají. Takovému nástroji se také říká *neusis*.

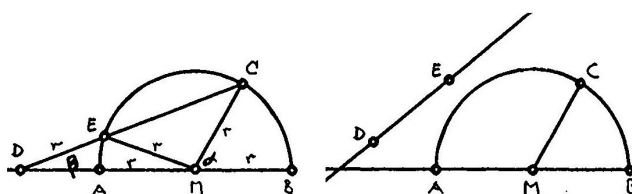
Tímto způsobem lze velmi rychle sestrojít pravidelný pětiúhelník, viz obr. 20.4 (srovnejte s konstrukcemi v 4.14). Neusis se také používá při tzv. proužkové konstrukci bodů elipsy (zadané hlavními průměry)...



Obrázek 20.4: [A] Konstrukce pravidelného pětiúhelníku s kružítkem a označeným pravítkem.

Zajímavější je, že s označeným pravítkem lze řešit mnohé eukleidovské neřešitelné problémy jako např. trisekci libovolného úhlu! Na obr. 20.5 najdete Archimédovo řešení tohoto problému, jehož zdůvodnění je velmi prosté. . .

Úplnou charakterizaci veličin, které lze s kružítkem a označeným pravítkem sestrojít, lze najít v [Ha] nebo [Mar₂]. . .



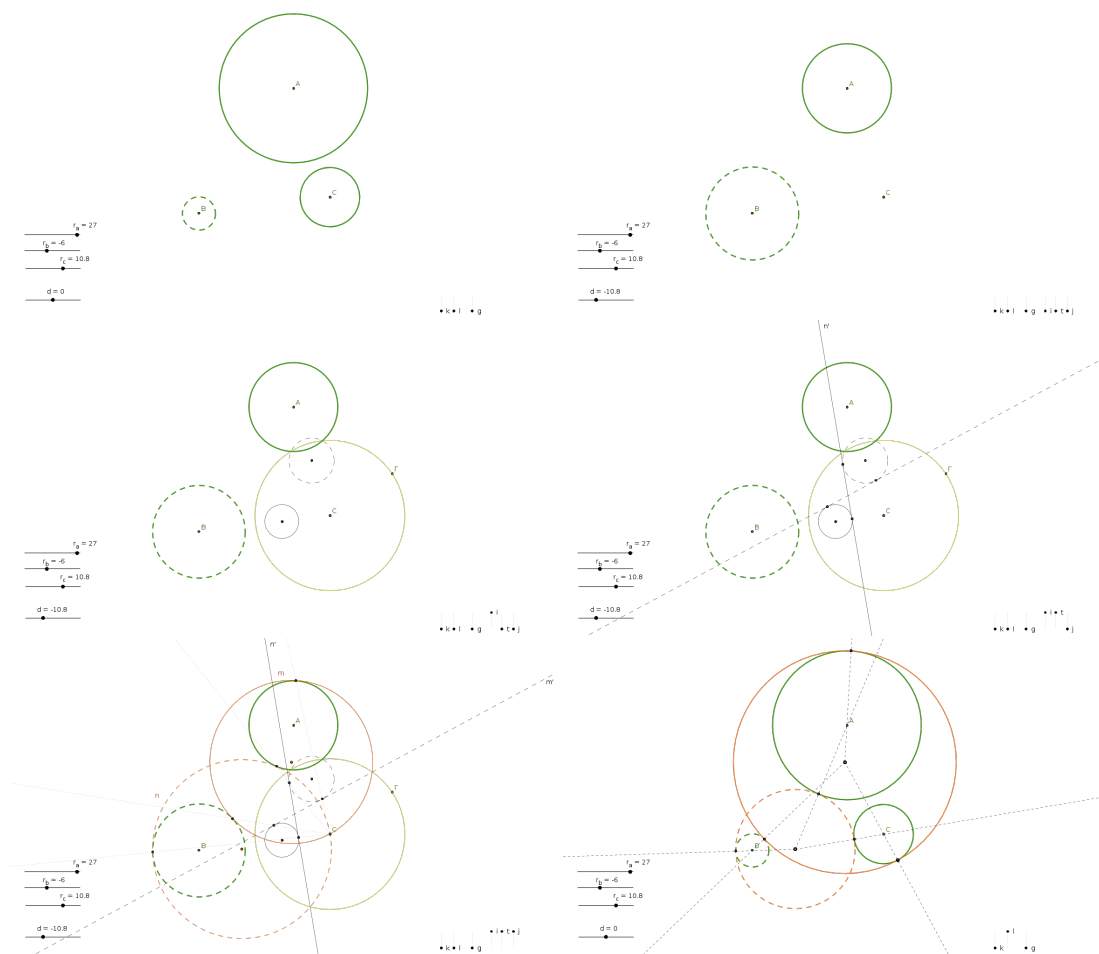
Obrázek 20.5: [A] Trisekce úhlu s označeným pravítkem: $\alpha = \angle BMC$ je libovolný úhel; sestrojíme lib. kružnici se středem v M ; přiložíme neusis s vyznačenými body D a E tak, že $DE = AM$. . . Potom platí, že $\beta = \frac{1}{3}\alpha$.

21 K úlohám Apollóniovým

První seznámení s Apollóniovými úlohami je v podkapitole 5. Od samého začátku jsme si všimli, že vhodné geometrické transformace pomáhají při řešení úlohy. Ve cvičení 9.8 jsme si uvědomili, že pomocí dilatace a kruhové inverze lze jakoukoli Apollóniovu úlohu redukovat na podstatně jednodušší problém z poměrně krátkého seznamu. Tady doplníme ještě několik postřehů a alternativ.

21.1 Řešení pomocí vhodných transformací

Toto je metoda, kterou jsme protěžovali především. Nebudeme se znovu opakovat, pouze pro porovnání přikládáme miniseriál demonstrující typickou redukci složitosti pomocí dilatace a kruhové inverze, viz obr. 21.6.



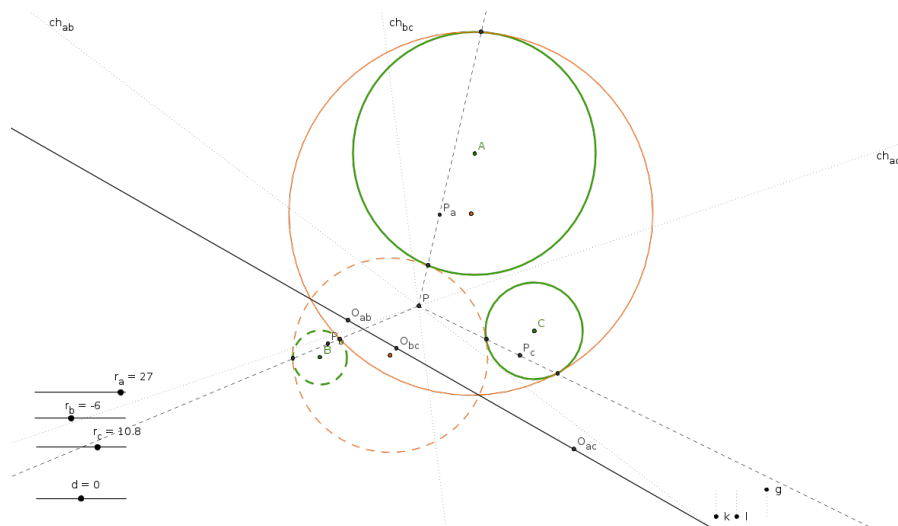
Obrázek 21.6: Řešení obecné Apollóniové úlohy pomocí dilatace a kruhové inverze: (1) zadání; (2) dilatace; (3) kruhová inverze; (4) společné tečny ke dvěma cyklům (!); (5) kruhová inverze; (6) dilatace.

21.2 Řešení Gergonnovo

Toto řešení je poměrně elementární, čímž myslíme, že při konstrukci se nepracuje s žádnou transformací, viz obr. 21.7. Zdůvodnění konstrukce plyne z následujícího rozboru:

- spojnice (l_i) dvojic dotykových bodů na každém cyklu prochází společným bodem (P), jež je potenčním středem daných tří kružnic,
- póly (L_i) těchto spojnic (= průsečíky tečen z dotykových bodů) leží na jedné přímce (ch), jež je právě chodralou dvou kružnic řešení,
- tato přímka je právě osou podobnosti tří daných cyklů (= spojnice tří středů stejnolehlosti),
- protože $L_i \in ch$ a L_i je pól l_i , musí pól ch ležet na l_i .

Zdůvodnění tvrzení, že nejsou jasná, lze najít např. v [Ho]. Princip zmiňovaný v (d) je znám jako tzv. *polární reciprocita*.



Obrázek 21.7: Gergonnovo řešení obecné Apollóniovovy úlohy: (1) $ch_{ab}, ch_{bc}, ch_{ac}$ jsou chordály tří dvojic daných kružnic, jež prochází jejich potenčním středem P ; (2) O_{ab}, O_{bc}, O_{ac} jsou středy stejnolehlosti tří dvojic daných cyklů, jež leží na jejich ose podobnosti; (3) P_a, P_b, P_c jsou póly této přímky vzhledem k daným kružnicím; (4) dotykové body jsou na spojnicích PP_a, PP_b, PP_c .

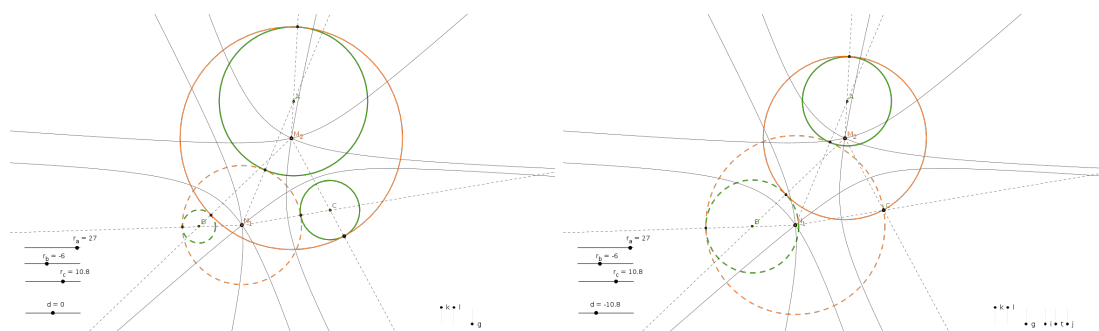
21.3 Řešení pomocí geometrických míst

Tato metoda je založena na jednoduchém pozorování, že středy cyklů, které se dotýkají dvou daných cyklů tvoří vždy nějakou kuželosečku (k) — pro cykly a, b se středy A, B a poloměry r_a, r_b platí:

- je-li $|r_a - r_b| > |AB|$, pak k je elipsa s ohnisky A, B a délkou hlavní osy $|r_a - r_b|$,
- je-li $|r_a - r_b| < |AB|$, pak k je hyperbola s ohnisky A, B a délkou hlavní osy $|r_a - r_b|$.

V uvedeném popisu uvažujeme r_a, r_b jako orientované poloměry, tzn. znaménko r_a odpovídá orientaci cyklu a . Ve speciálních, resp. mezních případech je kuželosečka k kružnice nebo přímka. . .

Pro tři dané cykly jsou středy hledaných dotýkajících se cyklů společnými body nějakých tří kuželoseček — sestojit takové body zpravidla neumíme eukleidovsky.



Obrázek 21.8: Středů cyklů, které se dotýkají dvou daných cyklů, tvoří kuželosečku (která se nemění při dilatacích).

21.4 Řešení pomocí cyklografie

(Překvapení...)

- [A] B. Artmann, *Euclid: The Creation of Mathematics*, Springer, 1999
- [Be] M. Berger, *Geometry I, II*, Springer, 1987
- [Br] M. Brauner, *Planimetrické úlohy řešené prostorově* (diplomová práce), Brno, 2009
- [DV] L. Drs, J. Všečeka, *Objektivem počítače: geometrie speciálních fotografických technik*, SNTL, 1981
- [D] T. Dvořáková, *Přínos Jánose Bolyaie k základům neeuclidovské geometrie* (bakalářská práce), Praha, 2012
- [E] Eukleidés, *Základy*, Alexandrie, –300
(pro konkrétní citovaná vydání viz [E_J, E_B, E_V, HTD] a [Š] níže)
- [Ha] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, 2000
- [Ha₂] R. Hartshorne, *Teaching geometry according to Euclid*, Notices of AMS, 2000,
www.ams.org/notices/200004/fea-hartshorne.pdf
- [Hi] D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, 1902,
www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf
- [Ho] J. Holubář, *O methodách rovinných konstrukcí: Úloha Apolloniova a úlohy příbuzné*, JČMF, 1949
- [KKK] F. Kadeřávek, J. Klíma, J. Kounovský, *Dekriptivní geometrie I*, JČMF, 1950
- [Ka] F. Kadeřávek, *Geometrie a umění v dobách minulých*, Praha, 1935
- [Ko] A. Kolman, *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, 1968
- [KV] J. Kounovský, F. Vyčichlo, *Deskriptivní geometrie pro samouky*, ČSAV, 1953
- [Ku] F. Kuřina, *Deset geometrických transformací*, Prometheus, 2002
- [Ku₂] F. Kuřina, *Deset pohledů na geometrii*, ČSAV, 1996

- [Ku₃] F. Kuřina, *Umění vidět v matematice*, SPN, 1990
- [Kut] B.V. Kutuzov, *Lobačevského geometrie . . .*, ČSAV, 1953
- [L] M. Lávička, *Syntetická geometrie*, Plzeň, 2007,
http://home.zcu.cz/~lavicka/subjects/SG/texty/sg_text.pdf
- [Mach] F. Machala, *Plochy technické praxe*, Olomouc, 1986
- [Mar] G.E. Martin, *Transformation geometry*, Springer, 1982
- [Mar₂] G.E. Martin, *Geometric constructions*, Springer, 1998
- [Me] V. Medek, *Deskriptivna geometria*, SNTL, 1962
- [Pe] J.I. Perelman, *Zajímavá geometrie*, Mladá Fronta, 1954
- [Pr] R. Pruner, *Prostorově viděné modely (anaglyfy) pro vyučování geometrie na hlavních a nižších středních školách*, Praha, 1943
- [Ř] O. Říha, *Konstrukční geometrie I, II*, Brno, 2002
- [Ř₂] O. Říha, *Kruhová inverze*, Brno, 2010
- [Sei] L. Seifert, *Cyklografie*, JČMF, 1949
- [Sek] M. Sekanina a kol., *Geometrie I, II*, SPN, 1986
- [SMS] E. Simeonov, D. Mairinger, Ch. Schmid, *Mathematische Früherziehung, Lagen & Winkel*, von Oemis, 2010
- [G9] J. Šimek, J. Schejbal, F. Procházka, *Geometrie pro devátý ročník*, SPN, 1975
- [St] J. Stillwell, *The four pillars of Geometry*, Springer, 2005
- [U] A. Urban, *Deskriptivní geometrie I, II*, SNTL, 1965
- * * *
- [E_B] *The Elements of Euclid*, atraktivní vydání prvních 6 knih od O. Byrneho (1847),
www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/byrne.html
- [E_J] *Euclid's Elements*, interaktivní edice D. Joyce podle překladu T.L. Heath (1908–28),
aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html
- [E_V] *Eukleidés, Základy, Knihy I–XII*, české vydání prvních 12 knih, jež zpracoval a komentářem opatřil P. Vopěnka podle překladu F. Servita (1907), O.P.S., 2008–12
- [HTD] *The thirteen books of Euclid's Elements, The works of Archimedes including The method, Conics by Apollonius of Perga, Introduction to Arithmetics by Nicomachus of Gerasa*, překlady klasických prací od T.L. Heath, R. Catesby Taliaferra a M.L. D'Ooge, Encyclopaedia Britannica, 1952
- [Š] *Řecké matematické texty*, české překlady R. Maška a A. Šmída vybraných textů s bohatými poznámkami a komentáři od Z. Šíra, OIKOYMENH, 2011

* * *

- [I] Internet:
<http://www.mathatube.com/geometry-geometry-solids.html>,
<http://missmcdonaldart.blogspot.cz/2013/02/2713day-1-through-21413-day-5-belowyou.html>,

- řez
 dvacetistěnem, 44
 zlatý, 23
- Apollónios, 46, 52, 53, 58, 62, 70, 75, 77, 93, 144
Archimédés, 57, 63, 142, 144, 161
- Bolyai, F., 21
Bolyai, J., 10
- chordála, 29
- Dandelin, G.P., 54
Dedekind, J.W.R., 14, 34
Dehn, M., 39
Desargues, G., 92
Descartes, R., 10
dilatace, 47, 75
doplnění do čtverce, 23
- elace
 projektivní, 87
- elipsa, 53
- Eudoxos, 39, 41
Eukleidés, 9, 13, 18, 20
Euler, L., 59
- Fermat, P., 142
- Gauss, C.F., 10, 142
geometrie
 eukleidovská, 13
- Gergonne, J.D., 145
Gerwien, P., 21
- Hilbert, D., 9, 14
- Hippokratés z Chiu, 57
- incidence, 14
- Klein, F., 11
Komenský, J.A., 3
konstrukce
 eukleidovská, 14
 mascheroniovská, 143
 neusis, 143
 steinerovská, 143
- Kosinová věta, 25
kruhová inverze, 72
kvadratura
 kruhu, 141
 mnohoúhelníku, 19
 paraboly, 142
- Lambert, 141
Lindemann, F., 141
Lobačevský, N.I., 10
- Mascheroni, L., 143
Menelaos, 59
mocnost, 29
Monge, G., 70, 106
- příčka, 112
přímka
 hlavní, 112
 krycí, 109
 projektivní, 85
 spádová, 112
- Pappos, 46, 84
Petersen, J., 46
Platón, 41

- podobnost, 34, 68
Pohlke, K., 103
poměr
 dělicí, 77
 dvoj-, 83
 harmonický, 83
 veličin, 34
postulát
 pátý, dodatečný, o rovnoběžkách, 14, 16
pravidelný
 n-úhelník, 142
 desetiúhelník, 32
 dvacetistěn, 42
 dvanáctistěn, 136
 pětiúhelník, 31–34, 144
 sedmnáctiúhelník, 143
projektivní
 rozšíření, 85
Ptolemaios, 58
Pythagoras, 18, 60

Quetelet, A., 54

Riemann, B., 11

Schwarz, H.A., 103
shodnost, 14, 65
souměrnost
 šikmá, 80, 92
 harmonická, 87, 92
 osová, 67, 92
 posunutá, 67
 středová, 66
spojitost, 14
střed
 potenční, 30
Steiner, J., 143
stejnolehlost, 36, 68

trúba
 štramberská, 112

uspořádání, 14

Viète, F., 46

Wallace, W., 21
Wantzel, P.L., 142

Základy, 13

Přikládáme několik příloh:

- (1) nejprve část časové osy z helénistického období podle B. Artmanna [A];
- (2) od str. 157 přehled nejcitovanějších tvrzení ze všech geometrických knih [E]; výběr a zpracování je zásluhou R. Hartshorna [Ha, str. 481–486];
- (3) na str. 163 stručný přehled Hilbertovy axiomatiky [Hi]; převzato z učebního materiálu od neznámého autora;
- (4) na str. 164 věta I.29 v Byrnově vydání Základů [E_B];
- (5) na str. 165 přehled Archimédových polopravidelných mnohostěnů [Ko];
- (6) na str. 166 přehled Keplerových pravidelných nekonvexních mnohostěnů [Be];
- (7) na str. 167 kolmý axonometrický průmět strojní součástky sestrojený zářezovou metodou [U];
- (8) na str. 168 průmět nějakého portálu ve dvojúběžníkové perspektivě;
- (9) na str. 169 příklad cylindrické perspektivy — panoramatický snímek Lorety na Hradčanech [DV];

Appendix: Brief Euclid

For reference we include abbreviated statements of the most frequently quoted results from Euclid's *Elements*.

Book I. Definitions

1. A *point* is that which has no part.
2. A *line* is length without breadth.
4. A *straight line* lies evenly with its points.
8. A *plane angle* is the inclination of two lines.
10. When the two adjacent angles are equal it is a *right angle*.
15. A *circle* is a line all of whose points are equidistant from one point.
20. A triangle with two equal sides is *isosceles*.
23. *Parallel* straight lines are lines in the same plane that do not meet, no matter how far extended in either direction.

Postulates

1. To draw a line through two points.
2. To extend a given line.
3. To draw a circle with given center through a given point.
4. All right angles are equal.
5. If a line crossing two other lines makes the interior angles on the same side less than two right angles, then these two lines will meet on that side when extended far enough.

Common Notions

1. Things equal to the same thing are equal.
2. Equals added to equals are equal.

3. Equals subtracted from equals are equal.
4. Things which coincide are equal.
5. The whole is greater than the part.

Propositions

1. To construct an equilateral triangle on a given segment.
2. To draw a segment equal to a given segment at a given point.
3. To cut off a smaller segment from a larger segment.
4. Side–angle–side (SAS) congruence for triangles.
5. The base angles of an isosceles triangle are equal.
6. If the base angles are equal, the triangle is isosceles.
7. It is not possible to put two triangles with equal sides on the same side of a segment.
8. Side–side–side (SSS) congruence for triangles.
9. To bisect an angle.
10. To bisect a segment.
11. To construct a perpendicular to a line at a given point on the line.
12. To drop a perpendicular from a point to a line not containing the point.
13. A line standing on another line makes angles equal to two right angles.
15. Vertical angles are equal.
16. The exterior angle of a triangle is greater than either opposite interior angle.
17. Any two angles of a triangle are less than two right angles.
18. If one side of a triangle is greater than another, then the angle opposite it is greater than the other.
19. If one angle of a triangle is greater than another, then the side opposite it is greater than the other.
20. Any two sides of any triangle are greater than the third.
22. To construct a triangle, given three sides, provided any two are greater than the third.
23. To reproduce a given angle at a given point and side.
24. Two sides equal but included angle greater of two triangles implies base greater.
25. Two sides equal and greater base implies greater angle.
26. Angle–side–angle (ASA) and angle–angle–side (AAS) congruence for triangles.
27. Alternate interior angles equal implies parallel lines.
28. Exterior angle equal to opposite interior, or two interior angles equal to two right angles, implies parallel lines.
29. A line crossing two parallel lines makes alternate interior angles equal.
30. Lines parallel to the same line are parallel.
31. To draw a line parallel to a given line through a given point.
32. Sum of angles of a triangle is two right angles, and exterior angle equals the sum of opposite interior angles.

33. Lines joining endpoints of equal parallel lines are equal and parallel.
34. The opposite sides and angles of a parallelogram are equal.
35. Parallelograms on the same base and in the same parallels are equal.
36. Parallelograms on equal bases in the same parallels are equal.
37. Triangles on the same base in the same parallels are equal.
38. Triangles on equal bases in the same parallels are equal.
39. Equal triangles on the same base on the same side are in the same parallels.
40. Equal triangles on equal bases on the same side are in the same parallels.
41. A parallelogram is twice the triangle on the same base in the same parallels.
42. To construct a parallelogram with a given angle equal to a given triangle.
43. Parallelograms on opposite sides of the diagonal of a parallelogram are equal.
44. To construct a parallelogram with given side and angle equal to a given triangle.
45. To construct a parallelogram with a given angle equal to a given figure.
46. To construct a square on a given segment.
47. (Theorem of Pythagoras) The square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the sides of a right triangle.
48. If the sum of the squares on two sides equals the square on the third side, the triangle is right.

Book II. Propositions

1. The rectangle contained by two lines is the sum of the rectangles contained by one and the segments of the other.
4. The square on the whole line is equal to the squares on its two segments plus twice the rectangle on the two segments.
5. The square on half a line is equal to the rectangle on the unequal segments plus the square of the difference.
6. The rectangle on a line plus an added piece with the added piece, plus the square of half the segment, is equal to the square of the half plus the added piece.
11. To cut a line so that the rectangle on the whole and one segment is equal to the square on the other segment (extreme and mean ratio).
14. To construct a square equal to a given figure.

Book III. Propositions

1. To find the center of a circle.
2. The segment joining two points of a circle lies inside the circle.
5. If two circles intersect, they do not have the same center.
6. If two circles are tangent, they do not have the same center.
10. Two circles can intersect in at most two points.
- 11, 12. If two circles are tangent, their centers lie in a line with the point of tangency.
16. The line perpendicular to a diameter at its end is tangent to the circle, and

the angle between the tangent line and the circle is less than any rectilinear angle.

17. To draw a tangent to a circle from a point outside the circle.
18. A tangent line to a circle is perpendicular to the radius at the point of tangency.
19. The perpendicular to a tangent line at the point of tangency will pass through the center of the circle.
20. The angle at the center is twice the angle at a point of the circumference subtending a given arc of a circle.
21. Two angles from points of a circle subtending the same arc are equal.
22. The opposite angles of a quadrilateral in a circle are equal to two right angles.
31. The angle in a semicircle is a right angle.
32. The angle between a tangent line and a chord of a circle is equal to the angle on the arc cut off.
35. If two chords cut each other, the rectangle on the segments of one chord is equal to the rectangle on the segments of the other chord.
36. From a point outside a circle, let a tangent and a secant line be drawn. Then the square of the tangent line is equal to the rectangle formed by the two segments from the point to the circle on the secant line.
37. From a point outside a circle, if two lines cut the circle, so that the square of one is equal to the rectangle formed by the segments of the other, then the first is a tangent line.

Book IV. Propositions

1. To inscribe a given segment in a circle.
2. To inscribe a triangle, equiangular to a given triangle, in a circle.
3. To circumscribe a triangle, equiangular to a given triangle, around a circle.
4. To inscribe a circle in a triangle.
5. To circumscribe a circle around a triangle.
10. To construct an isosceles triangle whose base angles are twice the vertex angle.
11. To inscribe a regular pentagon in a circle.
12. To circumscribe a regular pentagon around a circle.
15. To inscribe a regular hexagon in a circle.
16. To inscribe a regular 15-sided polygon in a circle.

Book V. Definitions

4. Magnitudes are said to *have a ratio* if either one, being multiplied, can exceed the other.
5. Four magnitudes $a, b; c, d$ are *in the same ratio* if for any whole numbers m, n , we have $ma > nb$ or $ma = nb$ or $ma < nb$ if and only if $mc > nd$ or $mc = nd$ or $mc < nd$ respectively.

Book VI. Propositions

1. Triangles of the same height are in the same ratio as their bases.
2. A line is parallel to the base of a triangle if and only if it cuts the sides proportionately.
3. A line from a vertex of a triangle to the opposite side bisects the angle if and only if it cuts the opposite side in proportion to the remaining sides of the triangle.
4. The sides of equiangular triangles are proportional.
5. If the sides of two triangles are proportional, their angles are equal.
6. If two triangles have one angle equal and the sides containing the angle proportional, the triangles will be similar.
8. The altitude from the right angle of a right triangle divides the triangle into two triangles similar to each other and to the whole.
12. To find a fourth proportional to three given lines.
13. To find a mean proportional between two given lines.
16. Four lines are proportional if and only if the rectangle on the extremes is equal to the rectangle on the means.
30. To cut a line in extreme and mean ratio.
31. Any figure on the hypotenuse of a right triangle is equal to the sum of similar figures on the sides of the triangle.

Book X. Propositions

1. Given two unequal quantities, if one subtracts from the greater a quantity greater than its half, and repeats this process enough times, there will remain a quantity lesser than the smaller of the two original quantities.
117. (not in Heath, but in Commandino). The diagonal of a square is incommensurable with its side.

Book XI. Definitions

25. A *cube* is a polyhedron made of six equal squares.
26. An *octahedron* is a polyhedron made of eight equal equilateral triangles.
27. An *icosahedron* is a polyhedron made by twenty equal equilateral triangles.
28. A *dodecahedron* is a polyhedron made by twelve equal regular pentagons.

Propositions

21. The plane angles in a solid angle make less than four right angles.
28. A parallelepiped is bisected by its diagonal plane.
- 29, 30. Parallelepipeds on the same base and of the same height are equal.
31. Parallelepipeds on equal bases, of the same height, are equal.

Book XII. Propositions

2. Circles are in the same ratio as the squares of their diameters.
3. A pyramid is divided into two pyramids and two prisms.

5. Pyramids of the same height on triangular bases are in the same ratio as their bases.
7. A prism with a triangular base is divided into three equal triangular pyramids.

Book XIII. Propositions

7. If at least three angles of an equilateral pentagon are equal, the pentagon will be regular.
10. In a circle, the square on the side of the inscribed pentagon is equal to the square on the side of the inscribed hexagon plus the square on the side of the inscribed decagon.
13. To inscribe a tetrahedron in a sphere.
14. To inscribe an octahedron in a sphere.
15. To inscribe a cube in a sphere.
16. To inscribe an icosahedron in a sphere.
17. To inscribe a dodecahedron in a sphere.
18. (Postscript). Besides these five figures there is no other contained by equal regular polygons.

Hilbert's Axioms for Plane Geometry

Undefined terms: Point, line, plane, between, congruence.

Connection (Incidence)

- I-1. Through any two distinct points A, B there is always a line m .
- I-2. Through any two distinct points A, B there is not more than one line m .
- I-3. On every line there exist at least two distinct points. There exist at least three points which are not on the same line.
- I-4. Through any three points, not on the same line, there is one and only one plane.

Order

- II-1. If point B is between points A and C , then A, B, C are distinct points on the same line, and B is between C and A .
- II-2. For any two distinct points A and C , there is at least one point B on the line AC such that C is between A and B .
- II-3. If A, B, C are three distinct points on the same line, then only one of the points is between the other two.

Definition By the *segment* AB is meant the set of all points which are between A and B . Points A and B are called the *endpoints* of the segment. The segment AB is the same as the segment BA .

II-4. (Pasch's Axiom) Let A, B, C be three points not all on the same line and let m be a line in the plane A, B, C which does not pass through any of the points A, B, C . Then if m passes through a point of the segment AB , it will also pass through a point of segment AC or a point of segment BC .

Note: II-4'. This postulate may be replaced by the *separation axiom*. A line m separates the points of the plane which are not on m , into two sets such that if two points X and Y are in the same set, the segment XY does not intersect m , and if X and Y are in different sets, the segment XY does intersect m . In the first case X and Y are said to be on the *same side* of m ; in the second case, X and Y are said to be on *opposite sides* of m .

Definition By the *ray* AB is meant the set of all points consisting of those which are between A and B , the point B itself, and all the points C such that B is between A and C . The ray AB is said to *emanate from* the point A .

A point on a given line m , divides m into two rays such that two points are on the same ray if and only if A is not between them.

Definition If A, B and C are three points not on the same line, then the system of three segments AB, BC, CA , and their endpoints is called the *triangle* ABC . The three segments are called the *sides* of the triangle, and the three points are called the *vertices*.

Congruence

III-1. If A and B are distinct points on line m and if A' is a point on line m' (not necessarily distinct from m), there is one and only one point B' on each ray of m' emanating from A' such that the segment $A'B'$ is congruent to the segment AB .

III-2. If two segments are each congruent to a third, then they are congruent to each other. (From this it can be shown that congruence of segments is an equivalence relation; i.e., $AB \equiv AB$; if $AB \equiv A'B'$, then $A'B' \equiv AB$; and if $AB \equiv CD$ and $CD \equiv EF$, then $AB \equiv EF$.)

III-3. If point C is between A and B , and C' is between A' and B' , and if the segment $AC \equiv A'C'$ and the segment $CB \equiv C'B'$, then segment $AB \equiv$ segment $A'B'$.

Definition By an *angle* is meant a point (called the *vertex* of the angle) and two rays (called the *sides* of the angle) emanating from a point.

If the vertex of the angle is point A and if B and C are any two points other than A on the two sides of the angle, we speak of the angle BAC or CAB or simply the angle A .

III-4. If BAC is an angle whose sides do not lie on the same line and if in a given plane, $A'B'$ is a ray emanating from A' , then there is one and only one ray $A'C'$ on a given side of line $A'B'$, such that $\angle B'A'C' \equiv \angle BAC$. In short, a given angle in a given plane can be laid off on a given side of a given ray in one and only one way. Every angle is congruent to itself.

Definition If ABC is a triangle then the three angles $BAC, CBA,$ and ACB are called the angles of the triangle. Angle BAC is said to be *included* by the sides AB and AC .

III-5. If two sides and the included angle of one triangle are congruent, respectively, to two sides and the included angle of another triangle, then each of the remaining angles of the first triangle is congruent to the corresponding angle of the second triangle.

Parallel axiom

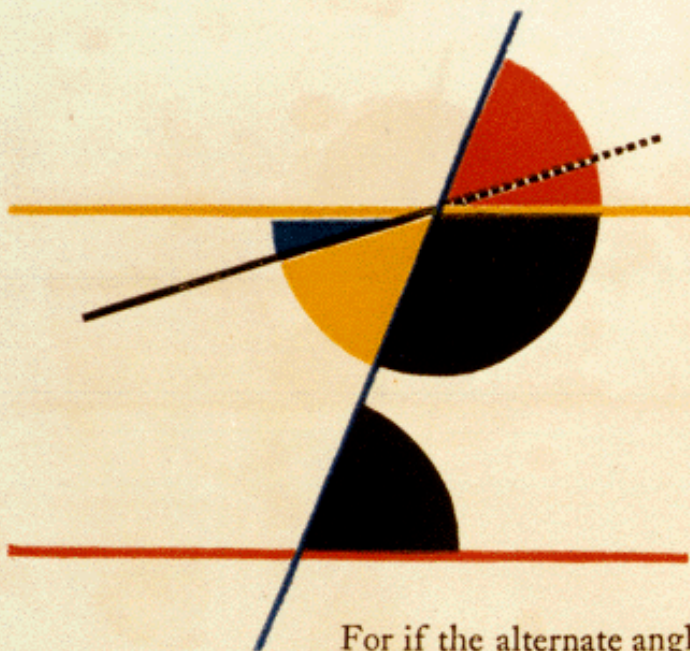
IV-1. (Playfair's postulate) Through a given point A not on a given line m there passes at most one line, which does not intersect m .

Continuity





V-1. (Axiom of Measure—Archimedes axiom) If AB and CD are arbitrary segments, then there exists a number n such that if segment CD is laid off n times on the ray AB starting from A , then a point E is reached, where $n \cdot CD = AE$, and where B is between A and E .

V-2. (Axiom of linear completeness) the system of points on a line with its order and congruence relations cannot be extended in such a way that the relations existing among its elements as well as the basic properties of linear order and congruence resulting from Axioms I-III and V-1 remain valid.





Note: V'. These axioms may be replaced by *Dedekind's axiom of continuity*. For every partition of the points on a line into two nonempty sets such that no point of either lies between two points of the other, there is a point of one set which lies between every other point of that set and every point of the other set.






STRAIGHT line (—) falling on two parallel straight lines (— and —), makes the alternate angles equal to one another; and also the external equal to the internal and opposite angle on the same side; and the two internal angles on the same side together equal to two right angles.

For if the alternate angles  and  be not equal, draw —, making  =  (pr. 23).

Therefore ——— || — (pr. 27.) and therefore two straight lines which intersect are parallel to the same straight line, which is impossible (ax. 12).


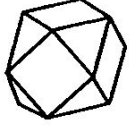
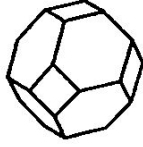
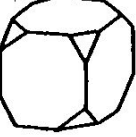
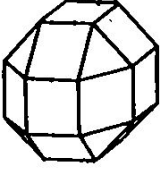

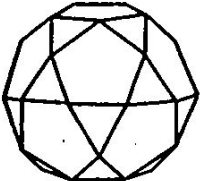
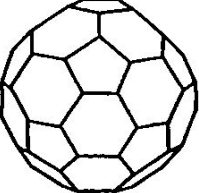
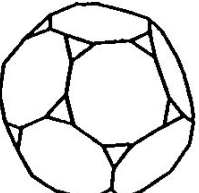
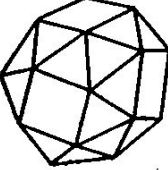
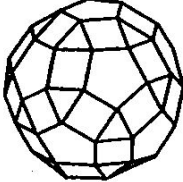
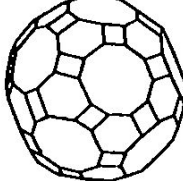
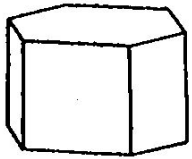
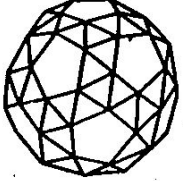
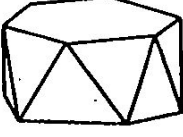
Hence the alternate angles  and  are not unequal, that is, they are equal:  =  (pr. 15);

∴  = , the external angle equal to the internal and opposite on the same side: if  be added to

both, then  +  =  =  (pr. 13).

That is to say, the two internal angles at the same side of the cutting line are equal to two right angles.

Q. E. D.

<p style="text-align: right;">4_3b</p>  <p>$v=12, h=18, s=8$ ($4_3, 4_6$)</p>	<p style="text-align: right;">$6_4a, 8_3a$</p>  <p>$v=12, h=24, s=14$ ($8_3, 6_4$)</p>	<p style="text-align: right;">8_3b</p>  <p>$v=24, h=36, s=14$ ($6_4, 8_6$)</p>
<p style="text-align: right;">6_4b</p>  <p>$v=24, h=36, s=14$ ($8_3, 6_6$)</p>	<p style="text-align: right;">6_4c</p>  <p>$v=32, h=56, s=26$ ($8_3, 18_4$)</p>	<p style="text-align: right;">6_4c</p>  <p>$v=48, h=72, s=26$ ($12_4, 8_6, 6_8$)</p>
<p style="text-align: right;">$12_5a, 20_3a$</p>  <p>$v=30, h=60, s=32$ ($20_3, 12_5$)</p>	<p style="text-align: right;">20_3b</p>  <p>$v=60, h=90, s=32$ ($12_5, 20_6$)</p>	<p style="text-align: right;">12_5b</p>  <p>$v=60, h=90, s=32$ ($20_3, 12_{10}$)</p>
<p style="text-align: right;">6_4d</p>  <p>$v=24, h=60, s=38$ ($32_3, 6_4$)</p>	<p style="text-align: right;">12_5c</p>  <p>$v=60, h=120, s=62$ ($20_3, 30_4, 12_5$)</p>	<p style="text-align: right;">12_3c</p>  <p>$v=120, h=180, s=62$ ($30_4, 20_6, 12_{10}$)</p>
 <p>$v=12, h=18, s=8$ ($6_4, 2_6$)</p>	<p style="text-align: right;">20_3d</p>  <p>$v=60, h=150, s=92$ ($80_3, 12_5$)</p>	 <p>$v=12, h=24, s=14$ ($12_3, 2_8$)</p>

