

Didaktika matematiky 2

Růžena Blažková

P 1

1. Motivace
2. Historická poznámka
3. Používání písmen ve významu čísla
4. Tři stupně práce s algebraickými výrazy: Modelování

Standardní manipulace se symboly

Strategická manipulace se symboly

5. Předpokládané chyby
6. Sofismata
7. Aplikace

Ad 1. Motivace

Proč potřebujeme počítat s obecným vyjádřením a kde se s ním setkáme

- a) Ve školské matematice – zobecňování vztahů, např.
 - Vyjádření vlastností operací, např. komutativnost sčítání $a + b = b + a$
 - Vztahy pro výpočty obvodů, obsahů, povrchů, objemů geometrických útvarů, např. $o = 2(a + b)$, $S = a \cdot b$, $V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$
- b) Technická praxe – výpočet řezné rychlosti, dráhy potřebné k zastavení vozidla aj.
- c) Ostatní vědní disciplíny, např. biologie – vztahy pro výpočet množení generací
fyzika, chemie – poločas rozpadu
výpočet indexu BMI $\frac{m}{v^2}$
kódování, komprese dat v počítačích
- d) Běžný život – v každé profesi je třeba brát v úvahu vstupní parametry, které jsou zpravidla proměnné a v závislosti na nich sledovat výstupní hodnoty.

Algebra, která se vyvinula z aritmetiky, je velmi důležitou a rozsáhlou částí matematiky. Původně zahrnovala nauku o řešení rovnic, později se rozšířila o algebru množin, teorii grup,

teorii okruhů a těles, teorii svazů, lineární algebru aj. Ve školské matematice se žáci seznamují s elementy algebry, zpravidla počítání s písmeny ve významu čísel. Zvládnutí základů algebry umožňuje studium dalších témat v matematice (rovnice, funkce, matematická analýza, analytická geometrie, kombinatorika, pravděpodobnost aj.), a využití a aplikací v dalších disciplínách (fyzika, chemie aj.)

Ad 2. Historická poznámka

Počátky prvních náznaků algebry spadají do doby kolem roku 2 000 let před naším letopočtem, kdy byly řešeny úlohy, které dnes řešíme pomocí rovnic.

Zpočátku nebyly známy znaky pro početní výkony, zapsání rovnosti či nerovnosti mezi čísly a všechny vztahy mezi matematickými veličinami byly vyjadřovány slovy a větami. Toto období nazýváme obdobím **verbalistickým** (úlohy na hliněných destičkách psaných klínovým písmem v Babylónii, sbírky úloh z Číny, Ahmesův papyrus z Egypta).

Kolem roku 500 před naším letopočtem řešili Řekové úlohy, které dnes řadíme do algebry, geometrickými prostředky. K rozvoji algebraické symboliky sice nepřispěli, ale rozvinuli užívání geometrických úvah k řešení úloh algebraického charakteru. Hovoříme o **geometrické algebře Řeků**. Až teprve *Diofantos z Alexandrie* kolem roku 250 před naším letopočtem napsal spis o rovnicích (nazvaný Aritmetika) a užívá v něm některé symboly, které dnes nazýváme algebraickými (např. pro neznámou používal symbolu ρ , pro odčítání použil symbol \cap který měl být obráceným písmenem ψ , pro umocňování δ^v - dynamos – čtverec. Různý stupeň mocniny vyjadřoval různým základem, např. κ^v byla třetí mocnina – kubos – krychle.). *Diofantem* bylo zahájeno druhé období vývoje algebry, kdy některé vztahy mezi matematickými veličinami byly popisovány slovy a větami, jiné byly již zapisovány zvláštními symboly. Toto období nazýváme obdobím **synkopickým**. Trvalo až do konce 15. století n. l., tj. až do doby, kdy vývoj v matematice dospěl k zavedení znaků pro operace a používání písmen ve významu čísel.

Nejvýznamnějším matematikem druhého období byl tádžický matematik *Abu Abdalch Muhamed ben musa al Chorezmi*(780? – 850) zvaný *Al Chovarizmi*, který žil v IX. století n.l. Napsal dva spisy, které měly rozhodující vliv na rozvoj matematiky v arabském světě a v Evropě. Spis Aritmetika obsahuje předpisy pro provádění početních výkonů, druhý spis *Aldžebra v'almukabala* obsahuje nauku o rovnicích. Ze slova „aldžebra“ se odvodil název celé disciplíny – algebra, část jména *Al Chovarizmiho* pak dala název algoritmu.

V první polovině XIII. století používal někdy také *Leonardo Pisánský* (1170? – 1250) (písmen k označení pro čísla (spis *Liber abaci*). Písmen používá i *Jordanus Nemorarius* (zemřel asi r. 1237).

Největší zásluhu o důsledné zavedení písmen ve významu čísel má francouzský matematik *Francois Viète* (1540 – 1603), který ve spise *Logistica speciosa* tato písmena používá. Navrhoval označovat známé veličiny souhláskami, neznámé veličiny samohláskami.

Algebraická symbolika byla dále zdokonalována v XVII. století *René Descartem* (1596 – 1650), který mimo jiné navrhl označovat známé veličiny písmeny z počátku abecedy a neznámé veličiny z konce abecedy.

Třetí období vývoje algebraické symboliky se vyznačuje používáním symbolů a znaků pro matematické operace, exponenty, využíváním písmen ve významu čísel a trvá od XV. století až do dneška. Nazývá se obdobím **symbolickým**.

Vývoj používání písmen lze ilustrovat příkladem:

Dnešní zápis rovnice $2x^3 + 5x = 7$ měl následující vývoj:

Ve druhé polovině 15. století: 2 cubus et 5 rebus aequales 7

V první polovině 16. století: 2 cubus p 5 rebus aequatur 7

Ve druhé polovině 16. Století: 2 C + 5 N aeru 7.

Vývoj znaků viz článek

Literatura

BALADA, F.: *Z dějin elementární matematiky*. Praha: SPN, 1959

HEJNÝ, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN 1990, ISBN: 80-08-01344-3.

ŠEDIVÝ, J. a kol.: *Antologie matematických didaktických textů*. Praha: SPN 1987.

ZNÁM, Š. a kol.: *Pohľad do dejín matematiky*. Praha: SNTL 1986.

Ad 3. Používání písmen ve významu čísla

Písmena mají v matematice několik významů:

- Význam proměnné – např. v rovnici $y = kx + q$ jsou proměnnými x, y .
- Význam konstanty – v rovnici $y = kx + q$ jsou konstantami k, q .
- Jediné, jednou pro vždy dané číslo, např. π, e, i .
- Označení neznámé v rovnici, proměnné v nerovnici.
- Nemusí mít žádný význam, např. v rovnici $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = 2$

Pro žáky základní školy je pochopení významu písmene v algebře velmi náročným a dlouhodobým procesem a nenastává u všech žáků ve stejném časovém období. Proces postupného zobecňování vyžaduje promyšlený didaktický a psychologický přístup a musí být fundovaně řízen. Obtížnost

zvládnutí učiva spočívá na nárocích na abstraktní myšlení a zobecňování. Mnoho problémů je způsobeno formálním způsobem výuky a neochotou žáků přemýšlet. Zvládnutí učiva a schopnost žáků pracovat s algebraickými výrazy je projevem učitelova pedagogického mistrovství a profesionality.

Metodické postupy mají své zákonitosti a zvládnutí této látky předpokládá znalost témat dříve probíraných (operace s čísly přirozenými, celými, zlomky, respektování priorit při provádění operací, používání závorek, základní věty z dělitelnosti, pravidla o počítání s mocninami aj.)

Dále je třeba zvládnout:

a) Zápis slovního vyjádření pomocí symbolického jazyka (rozvoj kompetencí komunikativních):

- Např. - zapište číslo, které je: O 5 větší než x .
Dvakrát menší než b .
Pětkrát větší než součet čísel a, b .
- Zapište pomocí výrazů: Součet čísel x, y vynásobte jejich rozdílem.
Polovinu čísla a vynásobte pěti.
Trojnásobek součtu čísel a, b vynásobte jejich podílem.
Dvojnásobek čísla x zvětšený o 5
Dvojnásobek čísla x zvětšeného o 5

b) Úlohy vedoucí k postupnému zobecňování

- Koupím 4 sešity po 12 Kč a 5 tužek po 7 Kč. Kolik Kč zaplatím?
- Koupím a sešitů po 12 Kč a b tužek po 7 Kč. Kolik Kč zaplatím?
- Koupím a sešitů po x Kč a b tužek po y Kč. Kolik Kč zaplatím?

Vyjádření ve slovní úloze:

Pes a osel šli s nákladem pytlů, pes naříkal, že nese mnoho (označíme počet pytlů psa x , počet pytlů osla y). Osel mu říká:

Jestli vezmu jeden tvůj pytel $x - 1$

Budu mít $y + 1$

Dvakrát tolik co ty $y + 1 = 2(x - 1)$

Jestli ti dám jeden pytel $y - 1$

Budeš mít $x + 1$

Tolik co já

$$y - l = x + l$$

(řešení: pes nesl 5 pytlů, osel 7 pytlů).

c) Doplnění tabulek – dosazování do výrazu za proměnnou

x	3	7	-5	0,8	25	-30	100
$2x - l$							
$6 - 3x$							
$12 + 4x$							

d) Řešení algebrogramů

MNOHO

J Í D E L

MNOHO

N E M O C Í

e) Geometrická interpretace algebraických výrazů

A4. Tři stupně práce s algebraickými výrazy

(1) **modelování** – jde o pochopení smyslu a významu symbolických zápisů:

- vyjádření slovního textu matematickým zápisem

- používání běžných vztahů, např. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$

- geometrická interpretace algebraických výrazů.

(2) **standardní manipulace se symboly** – jde o úpravy algebraických výrazů podle známých vztahů, získání aparátu k automatickému uplatňování při dalších výpočtech. Jistota při používání vztahů a dobrá znalost standardních úprav je nezbytným předpokladem k dalšímu matematickému vzdělávání. (Metodické řady – např. druhá mocnina dvojjednu)

(3) **strategická manipulace se symboly** – k práci s algebraickými výrazy je nutná určitá strategie, myšlenka, nestačí rutinní úpravy. Souvisí s objevem postupů i krásných vztahů.

Ad 5. Předpokládané chyby

a) Chyby numerické – vyplývající z nesprávných operací s koeficienty

- b) Chyby podstatné
- c) Chyby způsobené zápisem
- d) Chyby vyplývající z psychiky žáka

Ad 6 Sofismata

Ad 7 Aplikace

Úkol pro studenty – najděte vhodné aplikace pro algebraické výrazy, které byste mohli využít pro motivaci k danému tématu.