P2

Mnohočleny, lomené algebraické výrazy

Růžena Blažková

Základní pojmy

Nejobecnější pojem:

TERM – je výraz složený z proměnných, konstant, logických funkcí a závorek. Termy označují zkoumané objekty.

Pravidla pro vytváření termů: 1. Každá proměnná nebo konstanta je term.

2. Je-li f n-četná funkce, pak přidáním n termů k f vzniká opět term.

Všechny termy vznikají postupným užitím pravidel 1. a 2.

Např. x, 5, $\sqrt{3x+8}$, $(X \cup Y)-(X \cap Y)$, atd.

Ve školské matematice používáme termínu **výraz**, což je pomocný termín, abychom se stručně vyjádřili. Pod pojmem výraz rozumíme:

a) Každé číslo, každou proměnnou – výraz číselný, výraz s proměnnou

b) Součet, rozdíl, součin, dvou výrazů

c) Podíl dvou výrazů, za předpokladu, že dělitel je různý od nuly

d) Mocninu, absolutní hodnotu výrazu.

Opačné výrazy – liší se pouze znaménkem před všemi svými členy.

Mnohočlen (polynom n-tého stupně o proměnné x) je algebraický výraz

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

v němž x je proměnná, a_k jsou konstanty, n je nezáporné celé číslo, $a_n \neq 0$.

Člen mnohočlenu je výraz $a_k x^k$, a_k je koeficient mnohočlenu, n je stupeň mnohočlenu.

Členy seřazujeme vzestupně nebo sestupně podle mocnin.

Podle počtu členů rozlišujeme: jednočlen – monom, např. 4a, -5xy, $\sqrt{3}$

dvojčlen – binom, např. 2x + 5y

trojčlen – trinom, atd.

Mnohočleny s více proměnnými, např. $ax^2 + bx + cy + dy^2 + e$

Proměnné … *x, y*

Koeficienty …. *a, b, c, d, e.*

Dosazování do výrazu – nahrazení písmen čísly

Sčítání a odčítání mnohočlenů

Sčítat a odčítat můžeme pouze ty členy, ve kterých jsou stejné proměnné ve stejných mocninách.

Př. $7x – (2y - 3z + 4x + 5) + (3y - 5z +5) = 3x + y -9z$

Násobení

a) **Jednočlenů**

$4x \cdot 5y = 40xy$

$5a^2 \cdot 3a \cdot 4b \cdot 2b^3 = 120a^3b^4$

b) **Mnohočlenu jednočlenem**

$a(b + c) = ab + ac$, $a(b – c) = ab – ac$

$2x(6x + 5y – 4z) = 12x^2 + 10xy – 8xz$

c) **Mnohočlenu mnohočlenem**

$(a + b) \cdot (c + d) = ac + bc + ad + bd$

$(3a – 4b) \cdot (5a + 2b) = 10a^2 – 20ab + 6ab -8b^2 = 10a^2 – 14ab – 8b^2$

d) **Druhá mocnina dvojčlenu**

$(a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a – b)^2$

Rozdíl čtverců

$(a + b) \cdot (a – b) = a^2 – b^2$

$(a + b)^3$

$(a – b)^3$

(geometrická interpretace, algebraická krychle)

Dělení mnohočlenu jednočlenem

$(a + b) : c = a:c + b:c$

$(60a^2 + 48a) : 12a = 5a + 4$

Vytýkání před závorku

$27xy – 45xyz + 63yz = 9y (3x – 5xz + 7z)$

27xy 3 . 3 . 3 . x . y

45xyz 3 . 3 . 5 . x . y . z

63yz 3 . 3 . 7 . y . z

(společné členy 3 . 3 . y lze vybarvit ve sloupci)

Rozklady mnohočlenů

a) Vytýkáním před závorku

b) Pomocí vzorců

$a^2 – b^2 = (a + b) . (a – b)$

$a^2 + b^2$ nelze rozložit

$a^3 – b^3 = (a – b) . (a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b) . (a^2 - ab + b^2)$

Lomené algebraické výrazy

Nutno opakovat: počítání se zlomky, mocninami, mnohočleny

Lomený algebraický výraz má tvar zlomku, v jeho čitateli nebo jmenovateli (nebo v obou) je výraz s proměnnou. Aby měl lomený výraz smysl, musí být jeho jmenovatel různý od nuly. Proto před úpravou stanovíme podmínky, za kterých je možné výraz upravovat, tj. za kterých má zlomek smysl.

Krácení a rozšiřování lomených výrazů

Lomený výraz zkrátíme, jestliže čitatele i jmenovatele vydělíme stejným výrazem různým od nuly.

$$\frac{4a+4b}{a^2-b^2}=\frac{4(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{4}{a-b} \qquad a\neq b,\ a\neq -b$$

Lomený výraz rozšíříme, jestliže čitatele i jmenovatele vynásobíme stejným výrazem různým od nuly.

$$\frac{x+y}{x-y}.\frac{x-x}{x-y}=\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2} \quad x\neq y$$

Sčítání a odčítání lomených výrazů

Pojmy: nejmenší společný násobek, společný jmenovatel

Lomené výrazy převedeme vhodným rozšířením na lomené výrazy se stejnými jmenovateli.

$$\frac{y-1}{x+1}+\frac{y+1}{x-1}=\frac{(y-1)(x-1)+(y+1)(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{xy+2}{x^2-1} \quad x\neq 1,\ x\neq -1,$$

Násobení lomených výrazů

Lomené výrazy násobíme tak, že násobíme čitatele čitatelem a jmenovatele jmenovatelem. Pokud je lze výrazy krátit, pak je před vynásobením krátíme.

$$\left[a+\frac{a(d-c)}{c}\right]\left[b-\frac{b(d-c)}{d}\right]=ab \qquad c\neq 0,\ d\neq 0$$

Dělení lomených výrazů

Převrácený výraz k danému lomenému výrazu různému od nuly získáme tak, že zaměníme čitatele a jmenovatele.

Lomený výraz dělíme lomeným výrazem různým od nuly tak, že jej násobíme výrazem převráceným.

$$\left(\frac{x}{x-y}-1\right):\left(\frac{y^2}{x-y}-y\right)=$$

Pozor: násobení a dělení má přednost před sčítáním a odčítáním

$$\frac{2}{2-b}+\frac{b+4}{b-1}:\left[\frac{4(b-1)}{3b+4}-\frac{(2b-7)^2}{3b^2+b-4}\right]$$

Složený lomený výraz

V čitateli i ve jmenovateli je lomený výraz různý od nuly

$$\frac{2-\frac{p^2+q^2}{pq}}{\frac{p}{q^2}-\frac{2}{q}+\frac{1}{p}}$$