

Maticový zápis soustavy rovnic

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Cramerovo pravidlo

Nechť \mathbf{A} je **regulární matice** řádu n a \mathbf{A}_i je čtvercová matice řádu n vzniklá z matice \mathbf{A} nahrazením i -tého sloupce matice \mathbf{A} vektorem \mathbf{b} . Potom jediné řešení $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ je dáno vztahem:

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}$$

Příklad: Řešte soustavu rovnic pomocí **Cramerova pravidla**:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 - 6x_3 &= -3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = -36$$

Matice \mathbf{A} je regulární. Můžeme tedy pokračovat dále.

$$\det A_1 = \det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} = 36$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{36}{-36} = -1$$

$$\det A_2 = \det \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -6 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -18$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-18}{-36} = \frac{1}{2}$$

$$\det A_3 = \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = -12$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-12}{-36} = \frac{1}{3}$$

Řešení dané soustavy je tedy:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)^T$$

- Pokud je matice **A** singulární, je lepší dále počítat pomocí Gaussovy eliminační metody.
- Pokud je matice **A** singulární matice a ostatní matice **A_i** jsou také singulární, má soustava nekonečně mnoho řešení.
- Pokud je matice **A** singulární matice a alespoň je jedna z matic **A_i** je regulární, pak daná soustava nemá řešení.

Úkolem je řešit soustavu rovnic Craemerovým pravidlem a Gaus. elim. metodou

1.

$$\begin{aligned}x + y &= 3 \\x - 2y &= 1\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}x + 2y &= 5 \\4x + 3y &= 15\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}-x + 2y + 3z &= 3 \\x - 6z &= -3 \\2x + 4y &= 0\end{aligned}$$

Definice

Algebraickým doplňkem prvku a_{lk} matice \mathbf{A} nazýváme číslo $A_{lk} = (-1)^{l+k} M_{lk}$, kde M_{lk} je subdeterminant vzniklý z matice \mathbf{A} vynecháním l -tého řádku a k -tého sloupce.

Výpočet inverzní matice

Věta

Inverzní matice k regulární matici \mathbf{A} řádu n má tvar

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \mathbf{A},$$

kde A_{lk} jsou algebraické doplňky prvků a_{lk} .

Definice

Matice \mathbf{A}^T , tj. transponovaná matice algebraických doplňků je **matice adjungovaná**.

Počítání pomocí této metody je obvykle zdlouhavé, hodí se především pro strojové zpracování, protože je velmi přímočaré.

Řešený příklad najdete na <http://www.matematika-lucerna.cz/lingeбра/inverzni-matice-algeb-d.pdf>

Vypočtete inverzní matici, do třetího řádu oběma metodami, čtvrtého řádu pouze Gaussovou metodou

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
 f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení úloh

1a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 1b) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 1c) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 1d) **nexistuje**,

<http://homel.vsb.cz/~ber95/LAIT/Cviceni/lacv13.pdf>