Irena Budínová

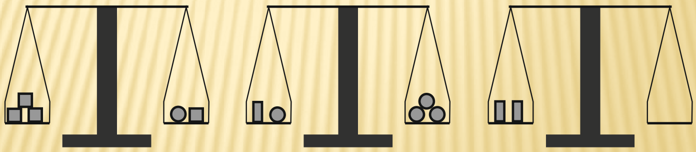
ROVNICE NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE

PROPEDEUTIKA ROVNIC

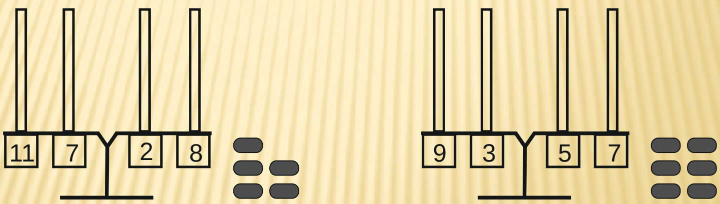
- Nežli začne samotné učivo Rovnice, je důležité, aby žáci řešili úlohy vedoucí na rovnice jinými prostředky. Jedná se o typy úloh:
  - Úlohy s váhami,
  - Úlohy zadané příběhem,
  - Slovně zadaný matematický model situace.

ÚLOHY S VÁHAMI

- *Kolik kroužků musíme umístit na pravou stranu poslední váhy, aby nastala rovnováha? Jaká je hodnota jednotlivých útvarů?* (1. stupeň – 6. ročník)



- *Doplňte na váhy závaží tak, aby nastala rovnováha.*



SLOVNÍ ÚLOHY A STRATEGIE JEJICH ŘEŠENÍ

- Na následující úloze budeme diskutovat různé možnosti řešení:
- *Tatínek kupoval tři autíčka, červené, modré a zelené. Modré stálo dvakrát více než červené, zelené stálo tolik co červené a modré dohromady. Všechna autíčka stála dohromady 120 Kč. Vypočítej cenu každého autíčka.*
  - Řešení úvahou,
  - Aritmetické řešení s grafickým znázorněním.
  - Označením jednotlivých aut písmeny a hledání vztahu mezi nimi

- Hledejte různé možnosti řešení následujících úloh:
  - *Myslím si číslo. Když k němu přičtu 7 a výsledek vynásobím 8, dostanu 160. Které číslo si myslím?*
  - *Jana uspořila dvakrát více než Jitka, Alena o 27 Kč méně než Jana. Celkem uspořily 453 Kč. Kolik Kč uspořila každá dívka?*
  - *Kapr váží kilo a půl kapra. Kolik váží kapr?* (Problémová úloha)

VÝZKUMY

- Mnoho výzkumů nedávné minulosti indikovalo, že pro žáky je přijatelnější než zadávání rovnice obvyklým způsobem spíše navození slovního problému, nebo alespoň nahrazení neznámé jinými způsoby, např. __+3=5. (Carraher et al., 2006)
- Kalchman a Koedinger (2005) popsali jednu úlohu zadanou třemi různými způsoby: příběhem, pomocí matematického modelu, rovnicí (viz následující příklad):

- **Úloha zadaná příběhem:** Když se Tod vrátil ze svého zaměstnání číšníka, vynásobil si svoji hodinovou mzdu počtem 6 hodin, které ten den odpracoval. Když k tomu přidal 66 dolarů, které si vydělal na spropitném, zjistil, že celkem to dělá 81,90 dolarů. Kolik Tod dostává za hodinu?
- **Slovně zadaný matematický model situace:** Myslím si číslo. Když ho vynásobím 6 a pak přičtu 66, dostanu 81,9. Jaké číslo jsem si myslel?
- **Rovnice:** Najdi x, jestliže $x.6+66=81,90$.

- Z výzkumu vyplynulo, že žáci byli nejúspěšnější při úloze zadané příběhem. Žáci k řešení slovních úloh nevyužívali rovnic, ale zcela jiných strategií - **pokusu a omylu**, strategií **řešení „od konce“** (začali konečnou hodnotou 81,9, odečetli 66 a výsledek vydělili 6) apod. V průměru žáci dosáhli 66 % úspěšnosti v úloze zadané příběhem, 62 % ve slovně zadané úloze a 43 % u rovnice.

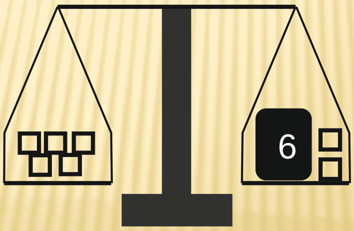
POSTUPNÉ ZAVÁDĚNÍ SYMBOLIKY POMOCÍ SLOVNÍCH ÚLOH

1. Intuitivní zápis slovní úlohy.
2. Postupné zavádění písmena jakožto neznámé. Ukažme možnou učitelovu intervenci na následující úloze:

Davidova maminka váží třikrát tolik a ještě o 5 kg více než David. Kolik kg váží David, když maminka váží 59 kg?

POSTUPNÉ ZAVÁDĚNÍ SYMBOLIKY POMOCÍ ÚLOH S VAHAMI

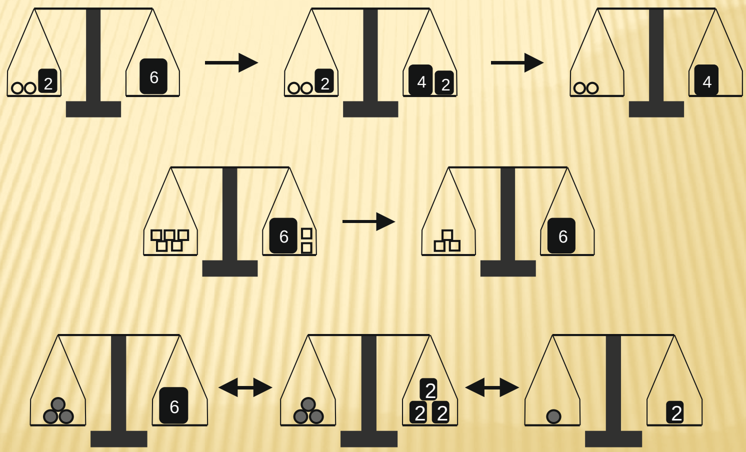
- U váhy můžeme domluvit následující symboliku: neznámé závaží … **neznámá** … označíme *x*, známé závaží má udanou číselnou hodnotu … **číslo.**



EKVIVALENTNÍ ÚPRAVY ROVNIC

- Jedná se o takové úpravy, při jejichž použití mají rovnice před úpravou a po úpravě stejné kořeny (rovnice původní a rovnice upravená mají stejnou množinu všech řešení).
  - záměna obou stran rovnice
  - přičtení (odečtení) stejného čísla nebo stejného výrazu k oběma stranám rovnice
  - vynásobení obou stran rovnice stejným číslem různým od nuly nebo stejným mnohočlenem, který má pro každou proměnnou hodnotu různou od nuly
  - vydělení obou stran rovnice stejným číslem různým od nuly nebo stejným mnohočlenem, který má pro každou proměnnou hodnotu různou od nuly.

VYVOZENÍ EKVIVALENTNÍCH ÚPRAV POMOCÍ ÚLOH S VAHAMI



ROVNOST A ROVNICE

- Pojem **rovnosti** je jedním z nejdůležitějších pojmů školské matematiky. Jedná se o relaci, která je:
  - reflexivní, tj. pro každé *a* z dané množiny *a* = *a*
  - symetrická, tj. pro každé *a, b* z dané množiny platí: jestliže *a* = *b,* pak *b* = *a*
  - tranzitivní, tj. pro každé *a, b, c,* z dané množiny platí: jestliže *a* = *b* a zároveň *b* = *c,* pak *a* = *c.*
- tedy je to **relace ekvivalence.**

- Rovnice je
  a) zápis rovnosti dvou výrazů, z nichž alespoň jeden obsahuje neznámou,
  b) výroková forma, jejíž obor pravdivosti hledáme.
- Na ZŠ se žáci seznamují s **lineární rovnicí s jednou neznámou** a s některými rovnicemi, které na ni vedou.

LINEÁRNÍ ROVNICE O JEDNÉ NEZNÁMÉ

- Rovnice typu $ax+b=0$.
- Tato rovnice může mít vzhledem ke koeficientům *a, b*
  - nekonečně mnoho řešení,
  - žádné řešení,
  - právě jedno řešení.
- Při výuce postupujeme od nejjednodušších tvarů rovnice, postupně zavádíme nové jevy.

- Při řešení rovnice hledáme její **kořen** – číslo, které po dosazení za neznámou změní rovnici v rovnost.
- Postupujeme podle **algoritmu** – přesné posloupnosti kroků, jejímž cílem je nalezení neznámé.
- **Úloha:** *Řešte rovnici, proveďte zkoušku:*

$$x(4+x)=(x-2)(x+5)$$

ROVNICE S NEZNÁMOU VE JMENOVATELI

- **Důsledkové úpravy:** úpravy, které mohou změnit množinu řešení dané rovnice. Na ZŠ se jedná o:
  - vynásobení rovnice výrazem s neznámou, který je roven nule,
  - vydělení rovnice výrazem s neznámou, který je roven nule,
  - umocnění obou stran rovnice na druhou,
  - odmocnění obou stran rovnice

- Některé důsledkové úpravy ubírají řešení zadané rovnici, jiné naopak přidávají. Při použití důsledkové úpravy je nutné provést **zkoušku** z toho důvodu, abychom odstranili přidaná řešení.
- **Úloha:** *Řešte rovnici a) pouze ekvivalentními úpravami, b) i důsledkovými úpravami.*

$$\frac{z}{z+1} = 1 - \frac{4}{z-2}$$

LINEÁRNÍ NEROVNICE

- Na 1. stupni – pojem **nerovnosti.**
- Zápis nerovnosti dvou výrazů, ve kterém musíme určit neznámé číslo tak, aby daná nerovnost platila, nazýváme **nerovnice.**
- Řešit nerovnici znamená najít taková čísla, aby po dosazení těchto čísel za neznámou se nerovnice změnila ve správnou nerovnost. Nalezená čísla se nazývají řešení dané nerovnice.

- Rozlišujeme **ostré nerovnice** a **neostré nerovnice.**
- Žáci se musí seznámit s pojmem **intervalu,** úlohy řeší v množině reálných čísel nebo přirozených čísel. Velmi vhodné je řešení úloh pomocí číselné osy.
- **Zkoušku správnosti** provádíme náhodným dosazením čísla z nalezeného intervalu.

- Nejčastěji užívané úpravy lineární nerovnice jsou:
  1. Přičítání nebo odčítání stejného výrazu k oběma stranám nerovnice.
  2. Násobení nebo dělení obou stran nerovnice stejným číslem různým od nuly.

- **Úloha:** *Řešte nerovnici s neznámou v množině přirozených čísel:*

$$\frac{2+27x}{6} < \frac{5}{2} + \frac{12x+1}{3}$$

- **Úloha:** *Řešte soustavu nerovnic s neznámou x:*

$$5(x+1)+6(x+2) > 9(x+3)$$
$$\underline{7x-3(2x+3) \geq 2(x-18)}$$

- **Úloha:** *Řešte nerovnici s neznámou x:*

$$\frac{2x+1}{x+2} \geq 1$$

- **Aplikační úloha:** *Dokažte, že nerovnost $a^2+1 \geq 2a$ platí pro každé reálné číslo a.*

KVADRATICKÁ ROVNICE NA SŠ

- Rovnice typu $ax^2+bx+c=0$.
- Kořeny kvadratické rovnice hledáme nejčastěji následujícími způsoby:
  - pomocí vzorce,
  - pomocí Viétových vzorců,
  - pomocí doplnění na úplný čtverec,
  - ve speciálních případech, kdy $b=0$ (ryze kvadratická rovnice) nebo $c=0$ používáme **rozklad mnohočlenů.**

- **Úloha:** *Určete kořeny následujících kvadratických rovnic:*

$$2x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2$$

$$(x+1)^2 = 5x + 1$$

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC SE DVĚMA NEZNÁMÝMI

- Jedná se o soustavu rovnic typu

$$ax+by=c$$
$$dx+ey=f$$

- Soustavu rovnic řešíme následujícími metodami:
  - dosazovací metoda
  - sčítací metoda
  - velice často se volí kombinace dvou předchozích metod
  - komparační metoda
  - grafické řešení – až po probrání lineární funkce

- Zásady:
  - Rovnice píšeme stále pod sebe, jednotlivé kroky oddělujeme vodorovnou čárou.
  - Výsledek zapisujeme jako uspořádanou dvojici.
  - Zkoušku provádíme dosazením obou kořenů do zadané soustavy. Je-li nekonečně mnoho řešení, nebo není-li žádné řešení, prověřujeme správnost řešení např. pomocí komparační metody – z obou rovnic vyjádříme stejnou neznámou a porovnáme.

- *Řešte soustavu rovnic s neznámými x, y:*

$$\frac{5}{x+y}+\frac{12}{x-y}=7$$
$$\frac{1}{x+y}+\frac{6}{x-y}=2$$

DIOFANTICKÉ ROVNICE

- Na ZŠ nejsou předmětem běžného učiva, mohou se ale objevit v Matematické olympiádě:
- *Adam a Eva dostali košík, ve kterém bylo 31 jablek. První den snědla Eva tři čtvrtiny toho, co snědl Adam. Druhý den snědla Eva dvě třetiny toho, co snědl týž den Adam. Druhého dne večer byl košík prázdný. Kolik jablek snědla z košíku Eva? (Adam i Eva jablka jedí celá a nedělí se o ně.) [Z9-I-4, 59 ročník, 1. kolo]*

LITERATURA

- Bečvář, J., Bečvářová, M., Vymazalová, H.: *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie.* Edice Dějiny matematiky, 23. svazek. Praha: Prometheus, 2003
- Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B., & Earnest, D.: Arithmetic and algebra in early mathematics education. In *Journal for Research in Mathematics Education 37* (2), 87 – 115. 2006
- Czudek, P. a kol.: *Slovní úlohy řešené rovnicemi. 555 úloh pro žáky a učitele ZŠ, studenty a profesory SŠ.* Praha: sdružení podnikatelů HAV, 1998
- Hejný, M.: *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně.* PdF UK, Praha 2014. ISBN 978-80-7290-776-2
- Kalchman, M., Koedinger, K. R.: Teaching and Learning Functions. In: *How Students Learn: Mathematics in the Classroom*. Editors: Donovan, M. S., Bransford, J. D. Washington, DC, USA: National Academic Press, 2005
- Tipps, S., Johnson, A., Kennedy, L. M.: *Guiding Children's Learning of Mathematics.* Wadsworth, Cangage Learning, 2011