Irena Budínová, Růžena Blažková

ROZVOJ KOMBINAČNÍHO MYŠLENÍ NA ZŠ

KOMBINATORIKA

- Kombinatorika je matematická disciplína, která se zabývá rozdělováním, uspořádáváním, výběrem prvků z nějaké množiny.
- První kombinatorické poznatky můžeme najít již v nejstarších dochovaných textech ze staré Číny a Indie.
- Skutečná kombinatorika vzniká v 16. – 17. století v souvislosti s určením pravděpodobnosti výhry hazardních her a je spojena se jmény např. N. Tartaglii, B. Pascala, P. Fermata.

- K dalšímu vývoji kombinatoriky v 18. století přispěli zejména J. Bernoulli, G. W. Leibniz, L. Euler.
- V současné době se kombinatorika prudce rozvíjí, aplikace tzv. kombinatorické analýzy zahrnují, mimo jiné, ekonomické problémy. Výrazné je její využití v teorii pravděpodobnosti, statistice, teorii informací, lineárním programování apod. Kombinatorické metody hrají významnou roli v teoretické matematice, např. v teorii grup.

- Klasická kombinatorika se zabývá otázkou výběru a rozmístění prvků do tzv. konfigurací daných prvků do skupin s určitými vlastnostmi.
- Nejjednodušší typy konfigurací mají své specifické názvy – variace, permutace, kombinace.

KOMBINAČNÍ MYŠLENÍ

- Kombinatorika není součástí Rámcového vzdělávacího programu na ZŠ. Přesto by se žáci na ZŠ měli setkávat s úlohami, které rozvíjí **kombinační myšlení.**
- Cílem přitom není předkládat žákům kombinatorické vzorce, které si mají pamětně osvojit, ale prostřednictvím úloh rozvíjet schopnost třídění a uspořádání množin objektů a schopnost postupného zobecňování.

- Pod pojmem „**kombinační myšlení**“ na ZŠ tedy rozumíme:
  - schopnost uvědomovat si vztahy mezi zkoumanými objekty,
  - posoudit, zda vybrané skupiny jsou uspořádané či neuspořádané,
  - umět rozlišit, zda se ve skupinách prvky mohou nebo nemohou opakovat,
  - umět zobecňovat a najít pravidlo pro určení počtu skupin dané úlohy.

- **Metodami práce** na základní škole jsou především experiment s následným zobecněním a užití grafického znázornění.
- Učitel sám musí znát teoretickou podstatu, avšak žákům ji nesděluje, spíše žákovi pomáhá sledovat a vyslovovat obecné zákonitosti.

ÚLOHY

- **Úloha 1:** Čtverec o straně 4 jednotky je rozdělen rovnoběžkami se stranami na 16 jednotkových čtverců. Určete, kolik je v daném obrazci čtverců.
- K řešení jsme využili **komb. pravidlo součtu.**
- **Pravidlo součtu:** Jestliže A_1, A_2, ..., A_n jsou konečné množiny, které mají po řadě p_1, p_2, ... p_n prvků a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků sjednocení těchto množin $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ je roven $p_1+p_2+\ldots+p_n$.

- **Úloha 2:** Určete počet všech dvojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.
- K řešení úlohy jsme využili **kombinatorické pravidlo součinu.**
- **Pravidlo součinu:** Jestliže vybíráme uspořádané k-tice čísel, přičemž první člen můžeme vybrat n_1 způsoby, druhý n_2 způsoby, ... k-tý člen n_k způsoby, pak počet všech uspořádaných k-tic je roven $n_1.n_2...n_k$.

- Kamarádi hrají tenis systémem každý s každým. Zvolte si postupně počet hráčů a sledujte, jak se mění počet zápasů v závislosti na počtu hráčů.
- V rovině je dáno 5 různých bodů, žádné tři z nich neleží na jedné přímce. Kolik různých přímek a kolik různých úseček je těmito body určeno?

- Kolik stran a úhlopříček má konvexní pětiúhelník?
- Kolik úhlopříček má pravidelný šestiúhelník (*n*-úhelník)?
- Ve společnosti je 12 osob. Podají si ruce každý každému. Kolik podání ruky to bude?

- Kolik způsoby si můžete vybrat z osmi různých zákusků dva různé zákusky?
- Jsou dány úsečky *a* = 6,4 cm, *b* = 4,7 cm, *c* = 50 mm, *d* = 32 mm. Vypočítejte obvody a obsahy všech obdélníků, jejichž stranami mohou být úsečky *a, b, c, d.*
- Zahradník vypěstoval 8 druhů růží. Kolik má možností výběru kytice ze tří druhů růží?

- V turnaji bylo sehráno 28 zápasů. Kolik družstev se turnaje zúčastnilo, jestliže hrál každý s každým právě jednou?
- Pět kamarádů A, B, C, D, E jelo stanovat. Měli jeden stan pro dvě osoby a jeden stan pro tři osoby. Kolika způsoby se mohli rozdělit?
- Kuželky jsou sestaveny do čtverce tak, že v každé řadě jsou tři kuželky. Při házení koulí můžeme shodit 0 až 9 kuželek. Kolik je všech možností shození kuželek?

- Šest kamarádek A, B, C, D, E, F se rozhodlo, že budou vytvářet všechny možné skupiny po jedné, po dvou, po třech, po čtyřech, po pěti. Jak se mohly rozdělit? Kolik různých skupin vždy mohly vytvořit?
- V rovině je dáno 7 různých bodů, z nichž žádné tři neleží v téže přímce. Kolik různých trojúhelníků je těmito body určeno?

- V rovině je dáno 9 různých bodů, z nichž žádnými třemi neprochází přímka a žádnými čtyřmi neprochází kružnice. Kolik různých kružnic je těmito body určeno?
- Jsou dány úsečky délek 6 cm, 4 cm, 3 cm, 8 cm, 2 cm, 5 cm. Kolik různých trojúhelníků můžeme pomocí těchto úseček sestrojit?

KOMBINACE BEZ OPAKOVÁNÍ

- V předcházejících příkladech nezáleželo na pořadí prvků a prvky se neopakovaly.
- K-členná **kombinace** z *n* prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou. K-členná kombinace z *n* prvků je k-prvková podmnožina *n*-prvkové množiny.

KOMBINAČNÍ ČÍSLO

- Symbol $\binom{n}{k}$ se nazývá kombinační číslo. Pro všechna celá nezáporná čísla *n,k, n<k* platí:
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
- Kombinační číslo se poprvé objevuje u L. Eulera v 18. století. Určuje počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny.
- Pro každé přirozené číslo *n* definujeme *n* faktoriál takto: *n*!=*n*(*n*-1) ... 2.1, 0!=1

- Kolik různých vlajek můžeme sestavit ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou-li k dispozici látky barev: červená, modrá, bílá, zelená, žlutá?
- Kolik různých dvoutónových signálů můžeme vytvořit ze čtyř tónů c, e, g, h?

- Kolik různých trojciferných čísel můžeme zapsat pomocí číslic 8, 7, 6, 5, 2, jestliže se každá číslice vyskytuje v zápisu čísla nejvýše jednou? Kolik z těchto čísel je sudých?
- Kolik různých čísel můžeme sestavit z číslic 3, 5, 4, 0, 9, jestliže se každá číslice vyskytuje v zápisu čísla nejvýše jednou? Kolik z nich je násobkem čísla 5?

- Osm spolužáků si slíbilo, že si o prázdninách pošlou pohlednice. Kolik pohlednic tak bylo rozesláno?
- Ve škole máme 10 vyučovacích předmětů, každý den máme 6 vyučovacích hodin. Každému předmětu se má vyučovat nejvýše jednu hodinu denně. Kolika způsoby lze sestavit rozvrh na jeden den?

- Kolik přirozených šesticiferných čísel, v jejichž zápisu jsou všechny číslice navzájem různé, lze zapsat pomocí všech deseti cifer desítkové soustavy?

VARIACE BEZ OPAKOVÁNÍ

- V předcházejících příkladech záleželo na pořadí prvků, prvky se neopakovaly.
- K-členná **variace** z *n* prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.
- Počet všech k-členných variací z *n* prvků je:

$$V(k,n) = n.(n-1).(n-2). \ldots .(n-k+1)$$

- Platí: V(k,n) = n. V(k-1, n-1). Ověřte.
- Existuje vztah mezi vzorcem pro kombinace a variace. Odvoďte ho na následující úloze:
- Úloha 3: Ze čtyř závodníků vybíráme trojici, která a) obdrží medaile, b) dostane zlatou, stříbrnou a bronzovou medaili.

PERMUTACE BEZ OPAKOVÁNÍ

- Permutace bez opakování jsou speciálním případem variací bez opakování.
- Žáci mohou tedy tyto úlohy řešit souběžně.
- Ovládají-li výpočty pro variace bez opakování, umí tím i permutace bez opakování.

- Zapište všechna trojciferná čísla, v jejichž zápisu se vyskytují číslice 5, 3, 8, každá právě jednou.
- Kolik lichých čtyřciferných čísel lze sestavit z číslic 3, 4, 6, 7, jestliže se v zápisu čísla vyskytuje každá číslice právě jednou?
- Kolika způsoby můžeme rozesadit 8 dětí na jedné dlouhé lavici?
- Kolika způsoby můžeme rozesadit 8 dětí kolem kulatého stolu?

- Šest dětí se přesazuje ve školních lavicích každý den. Bude jim stačit na všechna možná rozesazení školní rok?
- Kolik způsoby můžeme posadit 10 hostů na 10 židlí?
- Kolik různých vět o sedmi slovech můžeme získat, máme-li k dispozici právě 7 různých slov? Pokuste se takovou větu sestavit.

- **Permutace** z n prvků je uspořádaná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní vyskytuje každý prvek právě jednou.
- Permutace z n prvků je každá n-členná variace z těchto prvků.
- Počet permutací:

  $P(n) = V(n,n) = n.(n-1).(n-2). \dots .3.2.1 = n!$
- *Hodnoty faktoriálu rostou velmi rychle.*

- Král posílá 6 spěšných zpráv. Každý ze 3 poslů může doručit libovolnou z nich. Kolik je možností, jak může rozdělit dopisy mezi kurýry?
- Kolik značek Morzeovy abecedy je možno vytvořit, sestavíme-li tečky a čárky do skupiny o 1-4 prvcích?
- Kolik čtyřciferných čísel můžeme sestavit z číslic 3 a 6?

- Kolik pěticiferných čísel můžeme poskládat z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, pokud se cifry mohou opakovat?
- Kolik přirozených čísel menších než 10^5 lze zapsat pouze pomocí cifer 7 a 9?

VARIACE S OPAKOVÁNÍM

- Předcházející příklady patří do kategorie variace s opakováním.
- K-členná **variace s opakováním** z *n* prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše k-krát.
- Počet variací s opakováním:

  $V'(k,n) = n^k$

- Kolika způsoby můžeme sestavit 5 vagonů, když ve třech vagonech je písek a ve dvou je cement?
- Kolik anagramů lze vytvořit z písmen slova MATEMATIKA?
- Určete počet všech anagramů, které lze vytvořit z písmen PARABOLA, požadujeme-li, aby se ve vytvořeném anagramu pravidelně střídaly samohlásky a souhlásky.

- Kolik různých anagramů můžeme získat ze slova ROKOKO, nesmějí-li v takovém anagramu stát všechna písmena O vedle sebe?
- Pro 8 studentů je připraveno ubytování ve 3 pokojích, z nichž dva jsou trojlůžkové, jeden dvojlůžkový. Kolik je způsobů rozdělení do jednotlivých pokojů?
- Matka má 2 stejná jablka, 3 stejné hrušky a 4 stejné pomeranče. Každý den dá synovi po jednom kousku ovoce. Určete, kolik je možností výdeje.

PERMUTACE S OPAKOVÁNÍM

- Předcházející příklady patřily do kategorie permutace s opakováním.
- Permutace s opakováním z *n* prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní vyskytuje každý prvek alespoň jednou.

$$P'(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,\dots k_n!}$$

- Na následujícím příkladě ukažte, jaký existuje vztah mezi permutacemi a permutacemi s opakováním:
  - Z číslic 1, 2, 3, 4 utvořte všechna čtyřciferná čísla. Z číslic 1, 2 utvořte všechna čtyřciferná čísla.

- U stánku prodávají tři druhy čokolád a Aleš chce koupit 5 čokolád. Kolik má možností nákupu?
- V sadě je 32 karet, 8 druhů, každá ve čtyřech barvách. Kolika způsoby můžeme vybrat 4 karty, jestliže: a) rozlišujeme jen barvy, b) rozlišujeme barvy i hodnoty karet?
- Mezi 6 dětí rozdělujeme 15 (stejných) tenisových míčků. Určete počet a) všech možných rozdělení, b) počet všech rozdělení, při kterých každé dítě dostane aspoň jeden míček.

- Máme 2 druhy pohlednic, z nich chceme vybrat 3 pohlednice. Kolik je možností výběru?
- Máme 2 druhy pohlednic, chceme vybrat 4 pohlednice. Kolik je možností výběru?
- Máme 12 druhů pohlednic. Kolika způsoby lze provést nákup 8 pohlednic, když jeden druh může být zakoupen vícekrát?

KOMBINACE S OPAKOVÁNÍM

- Předcházející úlohy spadají do kategorie kombinace s opakováním.
- Jedná se o nejnáročnější příklady. Na ZŠ proto volíme úlohy tak, aby je žáci mohli řešit intuitivně.
- K-členná **kombinace s opakováním** z *n* prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše k-krát.

- Počet kombinací s opakováním:

$$K'(k,n) = \binom{n+k-1}{k}$$

- Toto číslo také udává, kolika způsoby můžeme rozmístit *k* identických předmětů do *n* přihrádek.

ZAŘAZOVÁNÍ KOMBINATORICKÝCH ÚLOH DO UČIVA ZŠ

- Kombinatorické úlohy lze zařazovat průběžně do různých tematických celků od 6. ročníku:
- Numerace a početní výkony v oboru přirozených čísel
  - Kolika způsoby můžeme zaplatit 50 Kč pomocí mincí: 20 Kč, 20 Kč, 5 Kč, 2 Kč?
  - Doplňte mezi čtyři dvojky závorky a znaménka +, -, . , : tak, abyste dostali výsledek 1.

- Dělitelnost v oboru přirozených čísel
  - Určete všechny dělitele čísla 2730.
  - Kolik trojciferných přirozených čísel sestavených z číslic 0, 1, 2, 3, 5 je dělitelných pěti?
- Algebraické výrazy
  - Pascalův trojúhelník, binomická věta

LITERATURA

- Calda, E., Dupač, V.: Matematika pro gymnázia. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika. Praha: Prometheus, 1993.
- Divíšek, J., Dřízal, V., Koman, M.: Matematika pro 5. ročník ZŠ. Doplňující text pro třídy s rozšířenou výukou matematiky a přírodovědných předmětů. Praha: Prometheus, 1991.