

# OBVODY A OBSAHY GEOMETRICKÝCH ÚTVARŮ

Růžena Blažková, Milena Vaňurová

Text vychází ze základních pojmů souvisejících s obecným pojmem míry geometrického útvaru a z návodů na konkrétní manipulativní činnosti, prostřednictvím kterých se žákům všechny vztahy lépe objasní.

Geometrické útvary se liší jednak tvarem, jednak velikostí. Například různý tvar a stejnou velikost můžeme pozorovat na jednom litru mléka, který se prodává buď v lahvi tvaru válce, nebo v krabici tvaru kvádrů nebo v krabici tvaru hranolu – stále je to 1 litr mléka. Podobně obdélník, který má obsah  $10 \text{ dm}^2$  může mít např. délku 1 dm a šířku 10 dm, nebo délku 2 m a šířku 5 m. Naopak geometrické útvary, které jsou shodné, i stejnou velikost.

Velikost geometrických útvarů určujeme buď měřením (v případě délky úsečky) nebo výpočtem (např. obvod a obsah obdélníku).

## 1. Základní pojmy

Podle Slovníku školské matematiky jsou základní pojmy uvedeny takto:

**Míra útvaru** je společný název pro délku útvaru na přímce či křivce, pro obsah útvaru v rovině či na ploše, pro objem útvaru v prostoru. Pojem míra vyjadřuje společné vlastnosti funkcí, které přiřazují útvarům nezáporná reálná čísla pro jejich délky (obsahy, objemy).

Nechť je dán systém  $M$  útvarů v takovém prostoru  $P$ , kde je definována shodnost útvarů a pojmy vnitřní a hraniční bod útvaru. Mírou útvarů ze systému  $M$  nazveme funkci  $m$ , která má tyto vlastnosti:

1. Každému útvaru  $X$  přiřazuje reálné číslo  $m(X) \geq 0$ .
2. Každým dvěma shodným útvarům  $X, Y$  přiřazuje taková čísla  $m(X), m(Y)$ , že  $m(X) = m(Y)$ .
3. Každým dvěma útvarům  $X, Y$ , které nemají společný vnitřní bod vzhledem k prostoru  $P$ , přiřazuje taková čísla  $m(X), m(Y)$ , že  $m(X \cup Y) = m(X) + m(Y)$ .
4. Alespoň jednomu útvaru  $E$  přiřazuje číslo  $m(E) = 1$ .

**Délka úsečky** je číslo přiřazené úsečce některou mírou  $m$  definovanou na množině všech úseček. (Též velikost úsečky, vzdálenost dvou bodů.)

**Obvod obrazce** je délka křivky nebo lomené čáry, která je hranicí obrazce v rovině. Měřitelnost hranice je jednou charakteristických vlastností útvarů zvaných obrazce.

**Obsah obrazce v rovině** je číslo přiřazené obrazci některou mírou  $m$  definovanou na určité množině rovinných útvarů. Zvolenému čtverci  $E$  přísluší míra  $m(E) = 1$ .

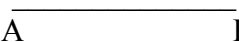
Ve školské matematice se nejprve odvozují obsahy pravoúhelníků s celočíselnými rozměry, které lze pokrýt shodnými čtverci  $E$ , dále pak obsahy rovnoběžníků, trojúhelníků, lichoběžníků, mnohoúhelníků. Obsahy jiných útvarů se určují pomocí jejich jader a obalů.

**Objem tělesa** je číslo přiřazené tělesu některou mírou  $m$  definovanou na určité množině těles. Zvolené krychli  $B$  přiřazujeme  $m(B) = 1$ .

## 2. Je třeba rozlišovat geometrické útvary a jejich velikosti.

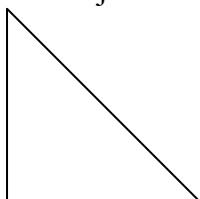
Geometrický útvar

Velikost geometrického útvaru

Úsečka AB  


délka úsečky AB:  $|AB| = 4 \text{ cm}$

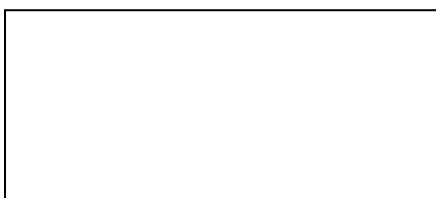
Trojúhelník ABC



obvod trojúhelníku ABC  
 $o = 14 \text{ cm}$

Obdélník ABCD

obsah obdélníku ABCD  
 $S = 36 \text{ cm}^2$



## 3. Určení délky úsečky

Délka úsečky je **číslo**, které udává, kolika násobkem jednotkové úsečky daná úsečka je.

Délku úsečky určujeme měřením. Pokud je délka úsečky celočíselným násobkem dané jednotky, určíme ji přesně. Pokud se krajní bod úsečky nekryje s násobkem jednotky, buď používáme principu zaokrouhlování (určíme délku úsečky přibližně), nebo zjemníme měřítko a určíme délku úsečky v menších jednotkách.

$$|AB| = 4 \text{ cm}$$

$$|AB| \doteq 4 \text{ cm}$$

$$|AB| = 4 \text{ cm}3\text{mm}$$

## 4. Vyvození obvodů a obsahů geometrických útvarů

Všechny vztahy jsou vyvozovány na základě konkrétní činnosti a učitelům je tak dána možnost konstruktivistického způsobu výuky, kdy pracují žáci, sami jsou aktivní při získávání vědomostí a výuka je zbavena pasivního předávání poznatků učitelem bez přičinění žáků.

### Trojúhelník

Obvod trojúhelníku je číslo, které udává délka jeho hranice.

Manipulativní činnost pro určení obvodu trojúhelníku vychází z měření stran různých trojúhelníků (vystřižených z papíru) a určení délky hranice každého z nich. V závěru se výsledky jednotlivých činností zobecní.

Závěr: Obvod trojúhelníku je roven součtu délek jeho stran:  $o = a + b + c$ .

Obvod trojúhelníku můžeme určit také graficky – pomocí grafického součtu úseček, které jsou stranami trojúhelníku. Délka úsečky této úsečky je rovna obvodu trojúhelníku.

### Obdélník a čtverec

#### Obvod obdélníku

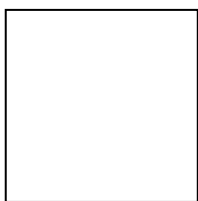


$a$

Obvod obdélníku je číslo, které udává délku jeho hranice. Při vyvozování pojmu obvod obdélníku vycházíme z manipulativní činnosti a praktických příkladů. Žáci pracují s různými obdélníky, které mají délky stran vyjádřené přirozenými čísly v centimetrech (příp. v decimetrech nebo v metrech). Jejich úkolem je změřit délky stran jednotlivých obdélníků a vypočítat délku hranice každého z obdélníků. Je vhodné ponechat žákům způsob, kterým délku hranice obdélníku určí. Mají tyto možnosti:

- sečtou postupně délky všech čtyř stran:  $o = a + b + a + b$ ,
- sečtou délky dvou protějších stran (dvojnásobek délky a dvojnásobek šířky obdélníku):  
 $o = 2a + 2b$ ,
- sečtou délku delší a kratší strany obdélníku a součet vynásobí dvěma:  $o = 2 \cdot (a + b)$ .

Analogicky se postupuje při určení obvodu čtverce. Žáci měří délku strany čtverce a počítají:



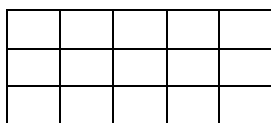
$a$

- sečtou délky všech čtyř stran:  $o = a + a + a + a$ ,
- zapiší obvod pomocí součinu:  $o = 4a$ .

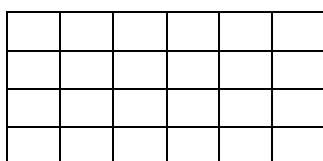
#### Obsah obdélníku

Obsah obdélníku je číslo, které udává počet čtverečných jednotek, kterými je možno obdélník pokrýt.

Manipulativní činnost spočívá v pokrývání obdélníku (nejlépe s délkami stran vyjádřenými přirozenými čísly) čtverci o obsahu  $1 \text{ cm}^2$ .



$$S = 5 \cdot 3 = 15$$
$$S = 15 \text{ cm}^2$$



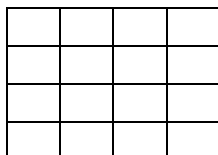
6 cm

$$S = 6 \cdot 4 = 24$$
$$S = 24 \text{ cm}^2$$

Na základě pochopení součinu počtu řad a počtu sloupců v konkrétních případech se zobecní: Obsah obdélníku s délkami stran  $a$ ,  $b$ :

$$S = a \cdot b$$

Podobně se pokrývají čtverce o délkách stran vyjádřených přirozenými čísly.



4 cm

$$S = 4 \cdot 4 = 16$$
$$S = 16 \text{ cm}^2$$

Vztah se zobecní pro obsah čtverce, jehož strana má délku  $a$ :

$$S = a \cdot a$$

Úlohy:

1. Obdélník má obvod 24 cm. Jaké mohou být délky jeho stran? Který z obdélníků má největší obsah?

2. Obdélník má obsah  $18 \text{ cm}^2$ . Jaké mohou být délky jeho stran? Který z obdélníků má nejmenší obvod?

3. Jak se změní a) obvod, b) obsah čtverce, jestliže jeho stranu zvětšíme dvakrát?
4. Jak se změní a) obvod, b) obsah obdélníku, jestliže jeho délku o 5 cm zmenšíme a jeho šířku o 5 cm zvětšíme?
5. Uveďte příklady obdélníku a dalších geometrických útvarů, které mají stejný obvod, ale nemají stejný tvar.