



MASARYKOVA UNIVERZITA

# Stanovení vzdálenosti na Zemi

*cv. č. 4*

# Základní pojmy

→ Vzdálenost na Zemi.

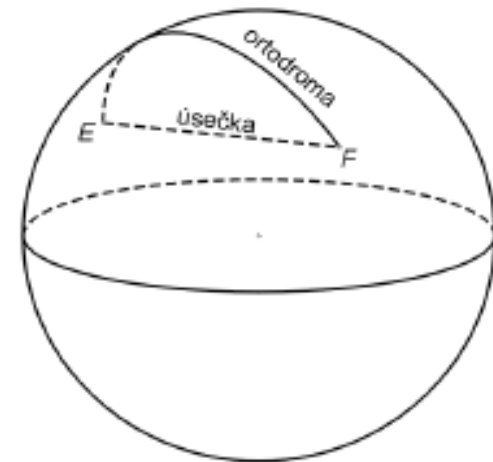
→ Ortodroma.

→ Loxodroma.

# Ortodroma I.

- z řeckého *ortos* – přímý a *dromos* – cesta.
- V klasické euklidovské geometrii: nejkratší vzdálenost dvou bodů EF je úsečka – technicky nepoužitelná.
- Nejkratší vzdálenost dvou bodů na zemském povrchu – na povrchu referenční koule.
- Ortodroma na rozdíl od loxodromy protíná poledníky pod různými azimuty.
- Vrací se do bodu, ze kterého vychází.
- Poledník je ortodroma, rovnoběžka s výjimkou rovníku není ortodromou.

# Ortodroma II.



- *Synonyma:* geodetika, geodetická křivka.
- Představuje hlavní kružnici, tj. průsečnici roviny procházející středem koule a koule.
- V kartografických zobrazeních se zobrazuje jako obecná křivka.
- V gnomonické projekci se zobrazí jako úsečka.
- Její délka je vždy konečná.
- *Použití:* geodézie, letecká či námořní doprava.

# Využití

- Výpočty základních geodetických úloh.

## ***I. (základní) geodetická úloha***

– ze souřadnic počátečního bodu  $E$ , počátečního azimutu ortodromy a délky ortodromy určete souřadnice koncového bodu  $F$  a koncový azimut ortodromy.

***II. (základní) geodetická úloha*** – ze souřadnic bodů  $E$ ,  $F$  určete délku ortodromy a její počáteční i koncový azimut.

# Možnosti řešení

1. Dvojice bodů na rovníku (na stejné rovnoběžce).
2. Dvojice bodů na stejném poledníku.
3. Dvojice bodů v obecné poloze.

# Dvojice bodů v obecné poloze I.

- ☒ Využití sférické trigonometrie:
  - ☒ řeší vztahy uvnitř sférického trojúhelníka – daného třemi body a tvořeného oblouky hlavních kružnic.
  - ☒ Oba body E a F tvoří společně se severním pólem  $P_s$  snadno řešitelný sférický trojúhelník.

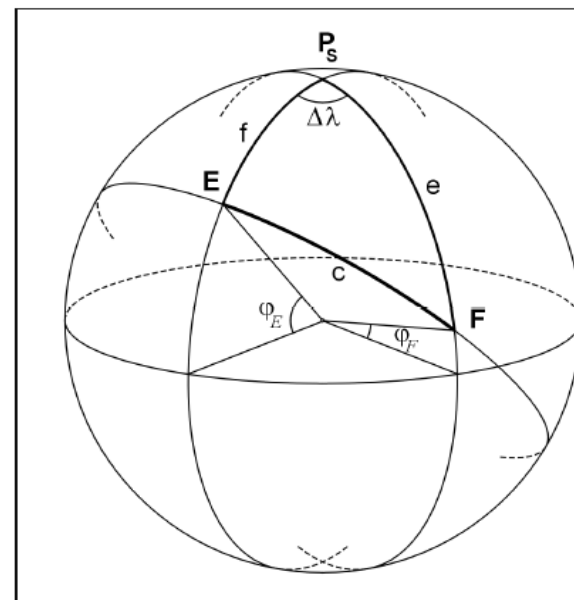
- ☒ Pro strany platí:

$$e = 90^\circ - \varphi_F$$

$$f = 90^\circ - \varphi_E$$

$c$  ... hledaná ortodroma.

$$\gamma \equiv \Delta\lambda = |\lambda_F - \lambda_E|$$



# Azimut

- Úhel mezi ortodromou a poledníkem, měří se od severu ve směru chodu hodinových ručiček.
- Azimut ortodromy se plynule mění z počáteční do koncové hodnoty, je nutné při přesunu hodnoty neustále přepočítávat.
- Je třeba dbát na pořadí míst E, F, dosazujeme souřadnice včetně znamének (**j.š. a z.d. jsou záporné!!!**).
- Pro snadnější navigaci se určuje konstantní úhel pod kterým lze z místa E dorazit do místa F.
- Dráhu pohybu pod tímto konstantním kurzem označujeme jako **loxodromu**.

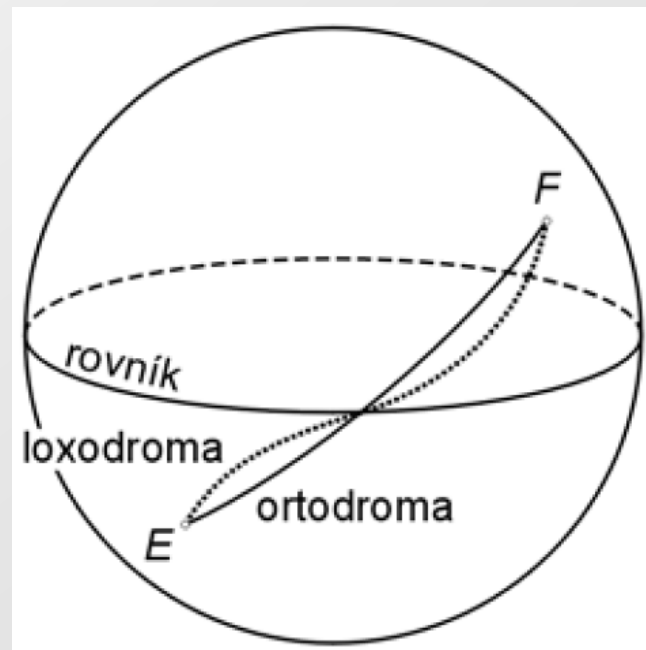
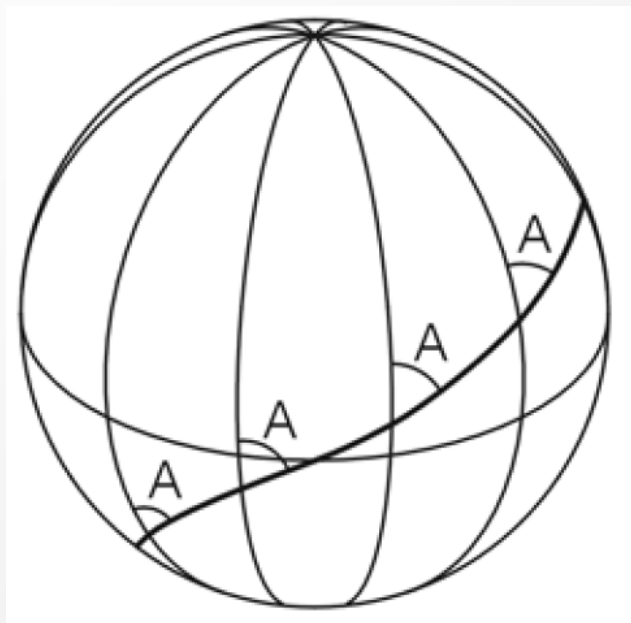


# Loxodroma I.

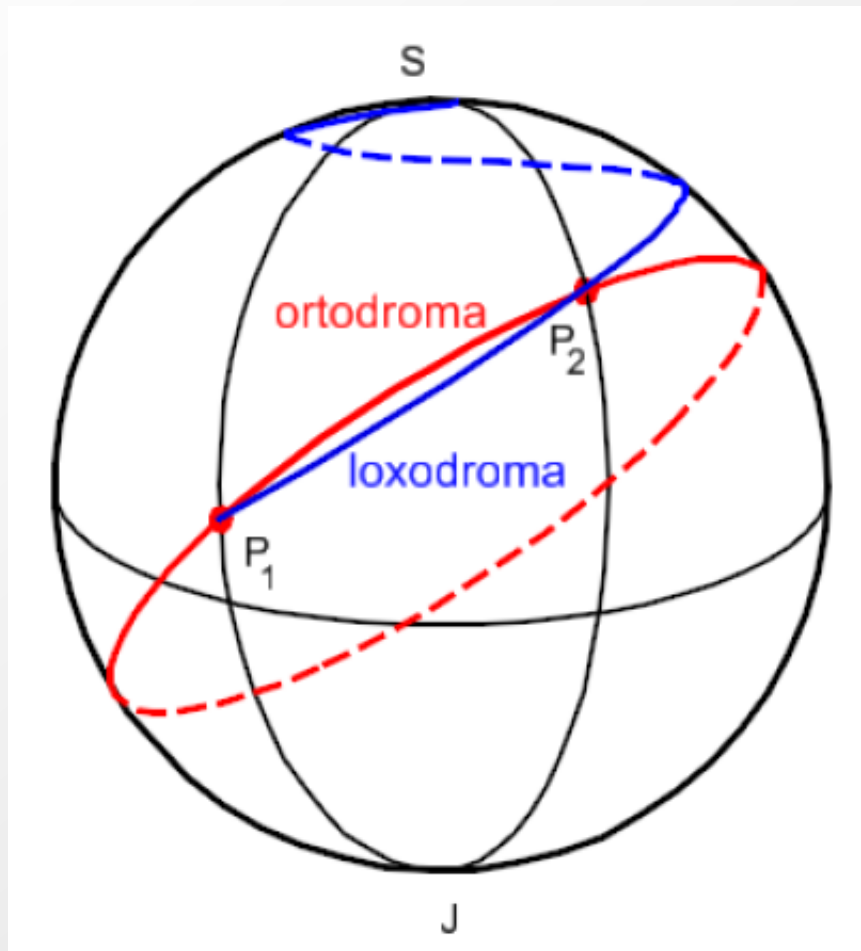
- ❏ Z řeckého *loxos* – šikmý a *dromos* – cesta.
- ❏ Čára spojující dvě místa na glóbu a protínající všechny poledníky pod týmž úhlem (azimutem  $A$ ).
- ❏ Délka  $l = \infty$ .
- ❏ Není nejkratší spojnici dvou bodů na referenční ploše (s výjimkou rovníku).
- ❏ Spirálovitě se blíží k severnímu/jižnímu pólu, kterého však nikdy nedosáhne.
- ❏ V Mercatorově zobrazení se zobrazí jako úsečka => použití pro námořní navigaci.
- ❏ Využití: letecká, námořní doprava (dnes při navigaci používán GPS).

# Loxodroma II.

- $A=0$  -> loxodroma splývá s poledníkem.
- $A=90$  -> loxodroma splývá s rovnoběžkou.



# Ortodroma x loxodroma



# Zadání cvičení

- Téma cvičení – Vzdálenost na Zemi
- Zadání: ***Chystáte se na letní olympiádu v Riu de Janeiru v roce 2016?***
  - a) Nakreslete orientační náčrt vzájemné polohy míst E a F a spojte je úsečkou znázorňující loxodromu. Hledáte nejkratší vzdálenost, přitom však dávejte pozor na přechod rovníku!
  - b) Vypočtěte a запиšte azimut loxodromy pro směr cesty z místa E → F.
  - c) Vypočtěte délku ortodromy mezi Brnem (E) a Riem de Janeirem (F). Zapište přitom její úhlovou velikost ( $c$ ) i délku  $d_{EF}$  v kilometrech.
  - d) Vypočtěte délku loxodromy  $I_{EF}$  mezi Brnem (E) a Riem de Janeirem (F) a porovnejte s výsledkem s  $d_{EF}$ . Zapište, která z tras je kratší a uveďte i rozdíl obou vzdáleností v km.

## Jak na výpočet – ortodroma? I.

- Pro určení nejkratší vzdálenosti bodů E, F budeme řešit II. geodetickou úlohu. Stačí přitom zjistit délku ortodromy.
- Nejjednodušší je, když místa leží na stejném rovníku, či poledníku.
- Ale co když ne? Pak jde o obecnou polohu, kterou budeme řešit.

## Jak na výpočet – ortodroma? II.

- ☒ Za ortodromu volíme vždy nejkratší oblouk hlavní kružnice, proto musí být splněno  $\Delta\lambda \leq 180^\circ$ .
- ☒ Pokud vychází  $|\lambda_F - \lambda_E| > 180^\circ$ , použije se doplněk do plného úhlu  $\Delta\lambda = 360^\circ - |\lambda_F - \lambda_E|$ .
- ☒ Pamatujete na trigonometrické věty (sinova a kosinova věta)?
- ☒ Kosinova věta pro stranu  $c$  sférického trojúhelníku:  
$$\cos c = \cos e * \cos f + \sin e * \sin f * \cos \gamma$$

## Jak na výpočet – ortodroma? III.

### ☞ Odtud dosazením získáte:

$$\cos c = \cos (90^\circ - \varphi_F) * \cos (90^\circ - \varphi_E) + \sin (90^\circ - \varphi_E) * \sin (90^\circ - \varphi_F) * \cos \Delta\lambda$$

### ☞ Pozor na znaménka zeměpisných šířek a vyčíslení goniometrických funkcí!

### ☞ Získaná hodnota $c$ určuje velikost oblouku EF v úhlové míře ( $^\circ$ ), je nutné ji ještě upravit na délku v kilometrech. Jde přitom o oblouk hlavní kružnice o poloměru shodném s poloměrem referenční koule ( $r_z$ ), proto:

$$d_{EF} = 2\pi r_z \frac{c}{360^\circ}$$

## Jak na výpočet – loxodroma? I.

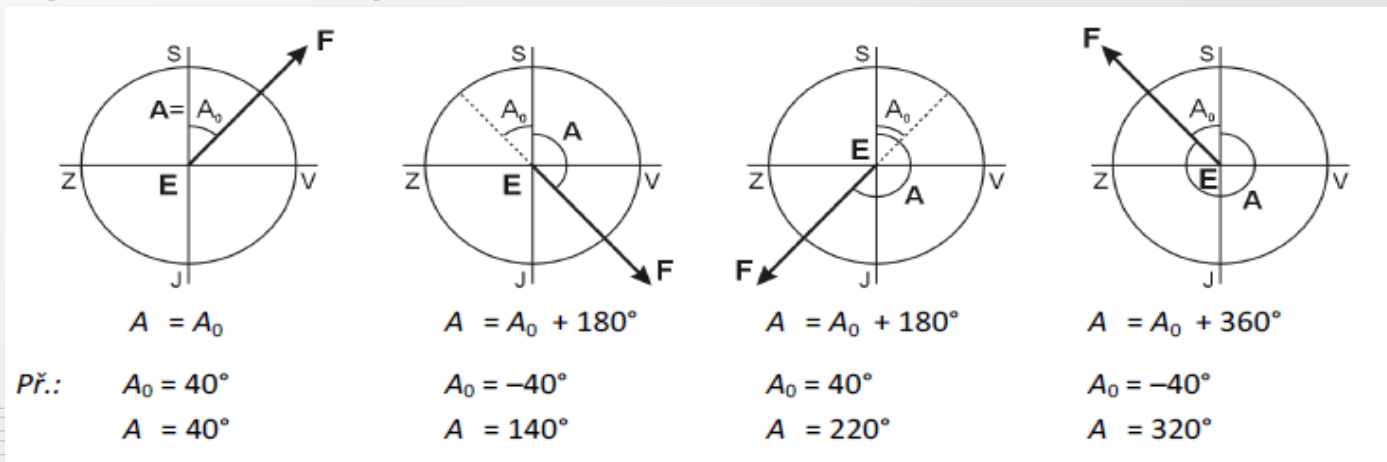
- Loxodroma je v optimálním případě spirála na kulové ploše, blíží se v nekonečně mnoha závitech k oběma pólům.
- Pro správné určení azimutu loxodromy je nutné určení správného pořadí bodů (počáteční a koncový). Délka je potom v obou případech stejná!
- Platí stejné podmínky jako v případě ortodromy.
- Nejprve se ručí azimut A ze vztahu:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\lambda_F - \lambda_E}{\ln \left( \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\varphi_F}{2} + 45^\circ \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{\varphi_E}{2} + 45^\circ \right)} \right)} * \frac{\pi}{180^\circ}$$



## Jak na výpočet – loxodroma? II.

- Platí stejné podmínky jako v případě ortodromy.
- Z hodnoty  $\text{tg } A$  lze matematicky vyčíslit pouze úhel  $A_0$ , který leží v intervalu základní periody funkce tangens ( $-90^\circ; +90^\circ$ ). Protože ale azimut  $A$  se měří v intervalu ( $0^\circ, 360^\circ$ ), je nutné opravit hodnotu  $A_0$  podle vzájemné polohy měst do správného kvadrantu.

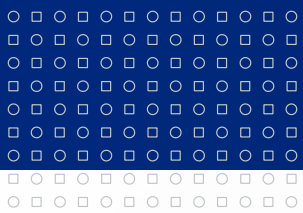


## Jak na výpočet – loxodroma? III.

- Délka loxodromy se následně určí podle vzorce:

$$l_{EF} = \frac{r_Z}{\cos A} * (\varphi_F - \varphi_E) * \frac{\pi}{180^\circ}$$

- Pro nejkratší možnou loxodromu je nutné opět splnit podmínku  $\Delta\lambda \leq 180^\circ$ .
- Pro nejkratší možnou loxodromu je nutné opět splnit podmínku  $\Delta\lambda \leq 180^\circ$ .
- Pokud vychází  $|\lambda_F - \lambda_E| > 180^\circ$ , použije se doplněk do plného úhlu  $\Delta\lambda = 360^\circ - |\lambda_F - \lambda_E|$ .
- Protože se tentokrát ve výpočtu nepoužívá absolutní hodnota, dosazuje se doplněk s opačným znaménkem než původní rozdíl  $|\lambda_F - \lambda_E|$ , (např. místo  $290^\circ$  se dosazuje  $-70^\circ$ , místo  $-190^\circ$  se dosazuje  $170^\circ$ )



Pro dnešek vše!!!

Pokračování ve čtvrtek 28. dubna 2016

