Galileiho transformace

1. Za deset sekund od okamžiku, kdy se souřadnicové osy inerciálních soustav K' a K ztotožnily, vznikla v bodě o souřadnicích $x' = 6$ m, $y' = 2$ m a $z' = 3$ m jiskra. Jaké jsou souřadnice této události v soustavě K, jestliže soustava K' se pohybuje vzhledem k soustavě K v kladném směru osy x konstantní rychlostí o velikosti $v = 7$ m.s^{-1}?

Řešení
Dosazením do Galileiho transformačních rovnic dostáváme
$x = x' + vt' = 6$ m + 7.10 m = 76 m;
$y = y' = 2$ m;
$z = z' = 3$ m;
$t = t' = 10$ s.

---

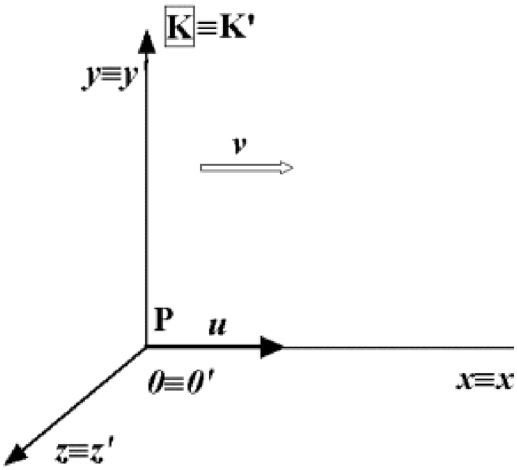
2. Z letadla, které se pohybuje vzhledem k Zemi po vodorovné přímce konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}$, je v čase $t = 0$ vypuštěno těleso. Vyjádřete závislost souřadnic x a y padajícího tělesa na čase t v soustavě K spojené se Zemí a pak pomocí Galileiho transformace v soustavě K' spojené s letadlem. Jak se pohybuje těleso vzhledem k letadlu? Odpor vzduchu zanedbejte.

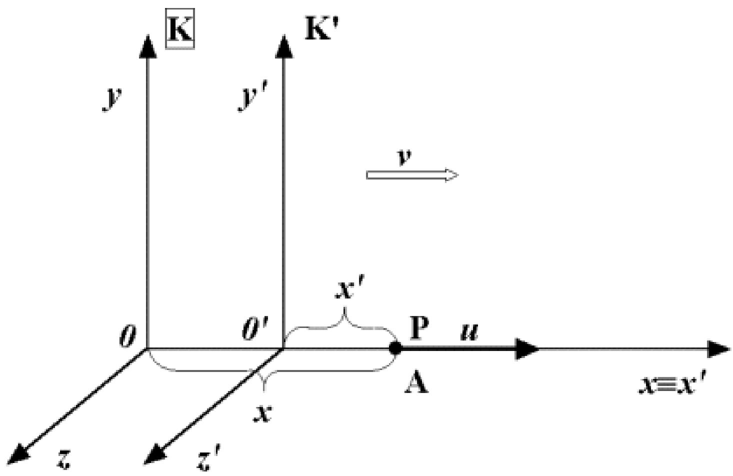
Řešení
Z hlediska pozorovatele v soustavě K lze pád tělesa při g = konst. označit za vodorovný vrh, pro který platí známé rovnice
$x = vt$ a $y = 1/2\, gt^2$. Z hlediska pozorovatele v soustavě K' spojené s letadlem má těleso v libovolném okamžiku $t' = t$ souřadnice x' a y', které určíme ze souřadnic x a y užitím Galileiho transformace:
$x' = x - vt = vt - vt = 0$,
$y' = y = 1/2\, gt^2$.
Tyto dvě rovnice vyjadřují skutečnost, že z hlediska pozorovatele v soustavě K' spojené s letadlem padá těleso volným pádem ve směru osy y'.

---

3. Soustava K' se pohybuje vzhledem k jiné inerciální soustavě K rovnoměrně přímočaře rychlostí v (zde jde o velikost rychlosti, ne o vektor). V soustavě K' nechť se pohybuje v kladném směru osy x' těleso P rovnoměrným přímočarým pohybem. Rychlost tělesa P vzhledem k soustavě K' označíme u'. Užitím Galileiho transformace dokažte, že vzhledem k soustavě K má těleso P rychlost $u = u' + v$.

Řešení
Předpokládejme, že v čase $t = t' = 0$ souřadnicové osy obou soustav K a K' splývají a že těleso P je v jejich společném počátku (obr. vlevo). Za dobu t přejde těleso rovnoměrným pohybem do nějakého bodu A a urazí přitom vzhledem k soustavě K' dráhu x' a vzhledem k soustavě K dráhu x (obr. vpravo). Průchod tělesa bodem A je událost, která má v soustavě K' souřadnice x', t' a v soustavě K souřadnice x, t.





Z definice rychlosti rovnoměrného přímočarého pohybu a užitím Galileiho transformace dostáváme hledanou rychlost u' vzhledem k soustavě K:

$$u = \frac{x}{t} = \frac{(x' + vt')}{t'} = \frac{x'}{t'} + v = u' + v.$$

---

4. Ze zkušenosti víme, že při rychlostech ***v*** mnohonásobně menších než rychlost světla c je hmotnost tělesa nezávislá na rychlosti, kterou se pohybuje vůči pozorovateli. Hmotnost tělesa tedy považujeme v klasické fyzice za konstantní veličinu. Dokažte, že pak také síla určená vztahem $F = ma$ je v obou vztažných soustavách stejná.

Řešení
Předpokládejme, že se inerciální soustava K' pohybuje vzhledem k inerciální soustavě K rovnoměrně přímočaře rychlostí ***v***. V soustavě K' nechť na těleso o hmotnosti m' působí konstantní síla F', která mu uděluje zrychlení a'. Podle druhého pohybového zákona pak platí $F' = ma = m'a' = F'$, neboť při rychlostech mnohem menších než c je $m = m'$ a také $a = a'$. Síla působící na určité těleso má tedy v různých inerciálních vztažných soustavách stejnou velikost, jestliže při tom platí, že vzájemná rychlost obou soustav je mnohem menší než rychlost světla c.

---

5. Na střeše posledního vagónu vlaku pohybujícího se rovnoměrně přímočaře stojí střelec, který se pokouší zasáhnout výstřelem z pušky lokomotivu. Předpokládejme, že rychlost vlaku je stejná jako rychlost střely. Může tato střela zasáhnout lokomotivu jedoucího vlaku.

Řešení
Kdyby se vlak nepohyboval, pak by střela samozřejmě mohla lokomotivu zasáhnout. Jestliže se vlak pohybuje rovnoměrně přímočaře, pak podle mechanického principu relativity musí každý mechanický děj v soustavě pohybujícího se vlaku probíhat stejně jako ve vlaku stojícím. Proto můžeme s jistotou říci, že střela opět může lokomotivu zasáhnout.

Úlohu bychom mohli také řešit v soustavě souřadné spojené se Zemí. Střela pak má vzhledem k vlaku rychlost ***v***, vlak vzhledem k Zemi také rychlost ***v*** a podle klasického zákona skládání rychlostí má potom střela vzhledem k Zemi rychlost 2***v***. Protože se vlak pohybuje vzhledem k Zemi pouze rychlostí ***v***, může střela lokomotivu zasáhnout.

Základní postuláty

1. A. Einstein již v mladém věku řešil různé myšlenkové pokusy. Představme si např., že v kosmické lodi, která se vzhledem k Zemi pohybuje rychlostí jen o málo menší, než je rychlost světla *c*, sedí ve směru jejího pohybu pozorovatel a dívá se do zrcadla. Může vidět svůj obraz?

Řešení
Kosmická loď pohybující se konstantní rychlostí je inerciální vztažná soustava, a proto na ní musí podle principu relativity každý děj probíhat stejně jako na Zemi. Pozorovatel tedy svůj obraz uvidí.
Správnost této úvahy potvrzuje i princip stálé rychlosti světla, neboť rychlost světla vzhledem ke kosmické lodi je stejná jako rychlost světla vzhledem k Zemi. Proto děj, kdy pozorovatel sleduje svůj obraz v zrcadle, musí na kosmické lodi probíhat stejně jako na Zemi.

---

2. Ve sci - fi románech můžeme občas číst o zvláštních pocitech kosmonautů pohybujících se se svou kosmickou lodí stálou rychlostí blízkou rychlosti světla. Někdy spisovatelé dokonce hovoří o ohrožení základních životních funkcí člověka. Jsou takové úvahy správné z hlediska základních principů speciální teorie relativity?

Řešení
Všechny biologické děje probíhající v živých organismech jsou také fyzikálními procesy. Podle principu relativity probíhají ve všech inerciálních vztažných soustavách všechny děje za stejných podmínek vždy stejně. Obrovská rychlost kosmické lodi by tedy nemohla ovlivnit průběh biologických dějů.

---

3. Na kosmické lodi pohybující se vzhledem k Zemi stálou rychlostí 270 000 $km.s^{-1}$ vysílá bodový zdroj světlo všemi směry. Jaký tvar světelných vlnoploch zjistí pozorovatel na této lodi?

Řešení
Z principu stálé rychlosti světla vyplývá, že světelné vlnoplochy na kosmické lodi budou kulové stejně jako na Zemi. Stejný závěr plyne i z principu relativity, neboť na kosmické lodi musí všechny děje probíhat stejně jako v jiných inerciálních vztažných soustavách.

Relativnost současnosti

1. Vysvětlete, proč se relativnost současnosti dvou událostí na Zemi běžně neprojevuje.

Řešení
V našem běžném životě se setkáváme jen se vztažnými soustavami, které se pohybují rychlostmi mnohem menšími než je rychlost světla *c*. Uvažujeme-li nějaké dvě události odehrávující se na Zemi např. v bodech *A* a *B*, musí být vzdálenost těchto bodů nutně menší než průměr zeměkoule. Doba, kterou světlo potřebuje k překonání vzdálenosti k pozorovateli ***AP*** = 1/2 ***AB***, je pak velmi malá, a proto se obě události jeví pro pozorovatele jako současné. Relativnost současnosti se může projevovat jen při rychlostech srovnatelných s rychlostí světla. Při běžných rychlostech, na něž jsme zvyklí, lze považovat současnost událostí vždy za absolutně nezávislou na vzájemném pohybu vztažných soustav.

2. Vysvětlete, proč z hlediska speciální teorie relativity není zcela správná formulace věty: V určitém okamžiku se ve vesmíru odehrály současně tři nesoumístné události U_1, U_2 a U_3. Rozeberte význam výrazu "v určitém okamžiku" z pohledu speciální teorie relativity.

Řešení
Současnost událostí je relativní pojem, a proto je potřeba uvést vztažnou soustavu, v níž jsou uvedené události U_1, U_2 a U_3 současné. Větu uvedenou v zadání můžeme přesněji formulovat takto: V dané vztažné soustavě se ve vesmíru odehrály současně tři nesoumístné události U_1, U_2 a U_3.

Výraz "v určitém okamžiku" z fyzikálního hlediska obecně znamená, že soustava synchronizovaných hodin rozmístěných v dané vztažné soustavě ukazuje současně stejný časový údaj. Protože současnost téhož časového údaje hodin v různých bodech je relativní, má výraz "v určitém okamžiku" smysl jen v dané vztažné soustavě.

---

3. Ve dvou různých bodech A, B ležících na ose y inerciální vztažné soustavy K nastanou současně dvě události U_1 a U_2. Dokažte, že v soustavě K', která se pohybuje vzhledem k soustavě K ve směru osy x stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$, jsou obě události také současné.

Řešení
Zvolme body A a B na ose y např. tak, že počátek O soustavy K bude středem úsečky AB. Z definice současnosti dvou událostí nám plyne, že světlo vyslané z bodů A a B v okamžiku vzniku obou událostí dorazí do bodu O současně. Z hlediska pozorovatele v soustavě K' se pohybuje soustava K rychlostí $-\boldsymbol{v}$. Obě události nastaly v soustavě K' v bodech A', B' a světlo vyslané z těchto bodů se pohybuje po dráhách $A'O$ a $B'O$ stejnou rychlostí c. Protože do bodu O dorazí oba světelné signály současně a dráhy $A'O$ a $B'O$ jsou stejné, je podle definice zřejmé, že obě události U_1, U_2 jsou současné i v soustavě K'.

Obecně pak můžeme uvedenou skutečnost formulovat tak, že pohybuje-li se inerciální vztažná soustava K' vzhledem k inerciální soustavě K rovnoměrně ve směru osy x, pak současnost dvou událostí, které nastaly ve dvou bodech přímky kolmé k ose x, je absolutní.

Skládání rychlostí

Uvažujme vztažnou soustavu K' pohybující se vzhledem k jiné inerciální vztažné soustavě konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}$, která je menší než c. Vyšle-li pozorovatel v soustavě K' v kladném směru osy x' foton, pak by se tato částice podle klasického zákona skládání rychlostí pohybovala vzhledem k soustavě K rychlostí $u = c + v$. Tento výsledek je ale v rozporu s druhým postulátem speciální teorie relativity.

Pomocí Lorentzovy transformace můžeme nyní odvodit pro skládání rychlostí obecnější vztah, který platí při libovolných rychlostech.

Předpokládejme, že v čase $t = t' = 0$, v němž souřadnicové osy obou soustav splývají, je částice v jejich společném počátku. Za dobu t' se částice rovnoměrným pohybem dostane do nějakého bodu A a urazí při tom v soustavě K' dráhu x' a vzhledem k soustavě K dráhu x. Průchod částice bodem A je událost, která má v soustavě K' souřadnice x', t' a v soustavě K souřadnice x, t. Z definice rychlosti rovnoměrného přímočarého pohybu vyplývá, že částice má vzhledem k soustavě K' rychlost

$$u' = \frac{x'}{t'}$$

a vzhledem k soustavě K rychlost

$$u = \frac{x}{t}$$

a pro hledanou velikost rychlosti $\boldsymbol{u}$ vzhledem k soustavě K pak užitím Lorentzových transformačních vztahů dostaneme

$$u = \frac{x}{t} = \frac{\gamma(x' + vt')}{\gamma\left(t' + \frac{x'v}{c^2}\right)} = \frac{x' + vt'}{t' + \frac{x'v}{c^2}} = \frac{\frac{x'}{t'} + v}{1 + \frac{x'v}{t'c^2}}$$

neboli

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}.$$

Při rychlostech $\boldsymbol{v}$ mnohem menších než rychlost světla c tento vztah opět přechází v klasický vztah pro skládání rychlostí.

Při odvozování jsme vycházeli z předpokladu, že vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ mají stejný směr. Pokud by byly orientovány opačně, lze výslednou velikost rychlosti $\boldsymbol{u}$ vzhledem k soustavě K vyjádřit ve tvaru

$$u = \frac{u' - v}{1 - \frac{u'v}{c^2}}.$$

Uvedené vzorce platí jen pro skládání vzájemně rovnoběžných rychlostí.

----------Skládání rychlostí

1. Těleso se pohybuje vzhledem k vztažné soustavě K' rychlostí $u' = 3/4c$ souhlasně orientovanou s osou x'; stejnou rychlostí $\boldsymbol{v}$ se pohybuje soustava K' vzhledem k soustavě K. Určete rychlost tělesa vzhledem k soustavě K.

Řešení

Pro rychlost u' a v neplatí v tomto případě podmínky

$u' \ll c$ a $v \ll c$, a proto při řešení příkladu nelze použít klasický zákon pro skládání rychlostí. Z relativistického vztahu

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

dostáváme

$$u = \frac{\frac{3}{4}c + \frac{3}{4}c}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{24}{25}c = 0,96c.$$

Výsledná rychlost u je opět menší než rychlost světla ve vakuu. Použití klasického zákona skládání rychlostí by vedlo v tomto případě k nesprávnému výsledku

$$u_k = u' + v = \frac{3}{4}c + \frac{3}{4}c = 1,5c.$$

---

2. Z letadla letícího rychlostí 1 000 $\mathrm{km.h^{-1}}$ byla ve směru letu vystřelena střela rychlostí 2 000 $\mathrm{km.h^{-1}}$ (vzhledem k letadlu). Určete rychlost střely vzhledem k Zemi.

Řešení

Obě rychlosti $v = 1\,000\ \mathrm{km.h^{-1}}$ a $u' = 2\,000\ \mathrm{km.h^{-1}}$ jsou ve srovnání s rychlostí světla c velmi malé; při řešení příkladu lze proto použít klasický zákon skládání rychlostí

$$\boldsymbol{u = u' + v = 2\,000\ \mathrm{km.h^{-1}} + 1\,000\ \mathrm{km.h^{-1}} = 3\,000\ \mathrm{km.h^{-1}}}.$$

Relativistický vztah pro skládání rychlostí vede ke stejnému výsledku

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{2.10^3\ \mathrm{km.h^{-1}} + 10^3\ \mathrm{km.h^{-1}}}{1 + \frac{2.10^6\ \mathrm{km.h^{-1}}}{c^2}} = 2\,999{,}999\,999\,995\ \mathrm{km.h^{-1}} \doteq 3\,000$$

jeho použití je zde však zbytečné.

---

3. Dokažte, že při skládání rychlostí v a u' o velikostech menších než c má také výsledná rychlost u velikost menší, než je rychlost světla c.

Řešení

Zvolme případ, v němž rychlosti v a u' mají stejný směr. Relativistický vztah pro skládání rychlostí upravme nejprve na tvar

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = c\frac{c(u' + v)}{c^2 + u'v}.$$

Vzhledem k tomu, že $0 < v < c$ a $0 < u' < c$, je také $(c - v)(c - u') > 0$, $c^2 - cv - cu' + u'v > 0$ a $c^2 + u'v > c(u' + v)$. Porovnáním upraveného vztahu pro skládání rychlostí s poslední nerovností pak dostáváme $u < c$.

---

4. Student chtěl vyvrátit poznatek o konečné rychlosti šíření informací myšlenkovým pokusem. Předpokládejme, že v bodu *A* nastala určitá událost *U*. Pozorovatel P_1 umístěný poblíž bodu *A* chce předat informaci o vzniku této události jinému pozorovateli P_2, jenž je umístěn poblíž bodu *B*. K přenosu informace použije pozorovatel P_1 tuhou tyč umístěnou mezi body *A* a *B*. V okamžiku, v němž událost *U* nastala, posune pozorovatel P_1 levý konec tyče ve směru šipky doprava. Poněvadž tyč je tuhá, posune se současně i její pravý konec a tak lze informaci o vzniku události *U* předat pozorovateli P_2 nekonečně velkou rychlostí. Je studentova úvaha správná?

Řešení
Úvaha je založena na nesprávném předpokladu, že v přírodě existují absolutně tuhá tělesa. Je třeba si uvědomit, že pojem tuhá tyč je jen určitá abstrakce. Posuneme-li tyč zhotovenou z libovolné látky ve směru doprava, deformuje se nejdříve jen její levý konec u bodu *A*; tato deformace se pak šíří rychlostí $\boldsymbol{v}$ směrem k bodu *B* a teprve pak se posune pravý konec tyče). Rychlost $\boldsymbol{v}$, kterou se šíří deformace, je stejná jako rychlost zvuku v dané látce (např.rychlost zvuku v oceli $v = 5\,000$ m.s^{-1} = 5 km/s). Informace o vzniku události *U* se tedy v tyči šíří konečnou rychlostí $v < c$.

Chybná představa o současném pohybu obou konců tyče při jejím uvádění do pohybu ve směru podélné osy vzniká proto, že doba $t = \frac{d}{v}$, o níž se pohyb bodu *B* za pohybem bodu *A* opozdí, je v praxi většinou velmi malá. Kdybychom např. ocelovou tyč o délce $d = 10$ m posunuli ve směru její podélné osy, je zpoždění $t = \frac{d}{v} = \frac{10}{5000}\ \mathrm{s} = 2.10^{-3}\ \mathrm{s}.$

Chybná představa o současném pohybu obou konců tyče při jejím uvádění do pohybu ve směru podélné osy vzniká proto, že doba $t = d/v$, o níž se pohyb bodu *B* za pohybem bodu *A* opozdí, je v praxi většinou velmi malá. Kdybychom např. ocelovou tyč o délce $d = 10$ m posunuli ve směru její podélné osy, je zpoždění $t = d/v = 10/5000$ s = 2.10^{-3} s.

---

5. Zdroj elektronů *Z* emituje elektrony o rychlostech $\boldsymbol{u}$ a $-\boldsymbol{u}$ v navzájem opačných směrech; $u = 1{,}5.10^8$ m.s^{-1}. Určete rychlost elektronu, který se pohybuje vpravo, vzhledem k elektronu pohybujícímu se vlevo.

Řešení
Vzhledem k soustavě *K'* spojené s levým elektronem se zdroj *Z* pohybuje vpravo rychlostí $u = 1{,}5.10^8$ m.s^{-1}. Pravý elektron se vzhledem ke zdroji pohybuje ve stejném směru stejně velkou

rychlostí $u = 1{,}5.10^8$ m.s^{-1}. Pro velikost rychlosti u' elektronu pohybujícího se vpravo vzhledem k soustavě K' dostáváme proto

$$u' = \frac{u+u}{1+\frac{u^2}{c^2}} = \frac{3.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}}{1+\frac{(1{,}5.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}})^2}{(3.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}})^2}} = 2{,}4.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}.$$

Elektron se vzhledem k druhému elektronu pohybuje rychlostí $2{,}4.10^8$ m.s^{-1}.

---

6. Dvě tyče A a B o vlastních délkách 1 m se vzhledem k Zemi pohybují rychlostmi $\boldsymbol{v}$ a $-\boldsymbol{v}$ po vodorovné přímce, v níž leží osy obou tyčí; $v = 0{,}5c$. Jaká je délka tyče B v soustavě souřadnic spojené s tyčí A?

Řešení
Tyč B se vzhledem k tyči A pohybuje rychlostí

$$u = \frac{v+v}{1+\frac{v^2}{c^2}} = \frac{4}{5}c.$$

Délka tyče B vzhledem k tyči A je tedy

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = l_0\frac{3}{5} = 0{,}6\ \mathrm{m}.$$

Tyč B má v soustavě souřadnic spojené s tyčí A délku 0,6 m.

---

7. Inerciální soustava K' se pohybuje vzhledem k inerciální soustavě K stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$. V čase $t' =$ O se začala z počátku soustavy K' pohybovat v kladném směru osy y' částice P stálou rychlostí o velikosti $\boldsymbol{u}_y'$. Najděte velikost rychlosti $\boldsymbol{u}$ této částice v soustavě K.

Řešení

Vyřešme úlohu nejprve podle klasické fyziku pro $v \ll c$ a $u'_y \ll c$. Částice P se vzhledem k soustavě K' pohybuje po přímce $O'P$, vzhledem k soustavě K po přímce OP. Velikost rychlosti částice v soustavě K je pak zřejmě

$$u = \sqrt{{u_x}^2 + {u_y}^2} = \sqrt{v^2 + {u'_y}^2},$$

kde u_x a u_y jsou souřadnice rychlosti $\boldsymbol{u}$. Při řešení této úlohy podle zákonů relativistické fyziky nemůžeme vycházet ze vzorce pro skládání rychlostí, poněvadž rychlosti $\boldsymbol{u}_y'$ a $\boldsymbol{v}$ jsou na sebe kolmé; použijeme proto Lorentzovu transformaci. Pro pohyb částice v soustavě K' platí:

$$\begin{aligned} x' &= 0 \\ y' &= u'_y t' \\ z' &= 0 \end{aligned}$$

Z Lorentzovy transformace vyplývá

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

a odtud

$$\begin{aligned} y &= y' = u'_y t' = u'_y \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,t \\ x &= \frac{vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = vt \\ z &= z' = 0 \end{aligned}$$

Pro souřadnice rychlosti $\boldsymbol{u}$ pak dostáváme

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{x}{t} = v \\ u_y &= \frac{y}{t} = u'_y \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \end{aligned}$$

Hledaná velikost rychlosti $\boldsymbol{u}$ v soustavě K je proto

$$u = \sqrt{{u_x}^2 + {u_y}^2} = \sqrt{v^2 + {u'_y}^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

Odlišný výsledek v porovnání s klasickou fyzikou dostáváme proto, že v klasickém případě platí samozřejmě rovnost $u_y = u'_y$, zatímco podle relativistické fyziky je $u_y = u'_y\gamma$.