Způsob práce v laboratorním cvičení

Práce v laboratoři se řídí platným laboratorním řádem (viz [1]) a bezpečnostními předpisy.

Student je na začátku semestru seznámen s harmonogramem úloh fyzikálního praktika a s vhodnou literaturou pro konkrétní úlohy. Má možnost prohlédnout si umístění jednotlivých úloh a základních laboratorních přístrojů.

Provedením úlohy ve fyzikálním praktiku se rozumí :

1. *Předběžná analýza úkolu měření*, v jejím průběhu má student porozumět měřené veličině, seznámit se s základními metodami měření této veličiny, jejími jednotkami. Tato příprava formou krátkých poznámek je kontrolována a spolu s vypracovaným protokolem měření minulé úlohy je vstupenkou do laboratoře.

2. *Vlastní práce v laboratoři.* Po příchodu na pracoviště student ověří, zda má vše potřebné pro splnění úkolu, v opačném případě požádá o další pomůcky učitele. Student by měl v této fázi již být schopen vybrat nejvhodnější přístroje pro daný účel s cílem provést měření v rámci zadané chyby nebo, pokud není maximální chyba měření zadána, provést měření co nejobjektivněji. Je třeba ovšem brát v úvahu časové omezení a možnosti pracoviště.

3. *Dokumentace měření* odpovídá druhu užitých přístrojů. Dílčí výsledky je nutno přehledně a čitelně zaznamenávat, nejlépe do tabulek. Je třeba vždy uvést druh měřidla, jimž byly údaje získány a okolní podmínky, jež mohly měření zkreslit. Po skončení měření je třeba uvést pracoviště do původního stavu a požádat učitele o podpis záznamu naměřených hodnot.

4. *Zpracování protokolu* je vyhodnocení měření a posouzení přesnosti měření. Postup při provádění rozboru měření z hlediska přesnosti je podrobně probrán v úvodním cvičení [1]. Výpočty provádíme v zákonných jednotkách. Na závěr srovnáme výsledky s tabelovanými hodnotami. V protokolu by neměl chybět komentář o tom, jaké přístroje byly k dispozici i jejich maximální chyby. Vyšetřujeme-li závislost jedné veličiny na druhé (popř. na dalších) je nedílnou součástí protokolu vynesení příslušných grafů.

IV.2. Výsledek měření a jeho chyba

IV.2.1. Určení statistické chyby z opakovaných měření.

Výsledky přímých měření se často vyhodnocují statisticky. Výsledek fyzikálního měření lze pokládat za **náhodnou veličinu**. Náhodnou veličinou se rozumí každá veličina, jejíž hodnota je při daném měření (pokusu) ovlivněna určitými náhodnými vlivy. Hodnotu náhodné veličiny není obecně možné stanovit, lze však na základě metod počtu pravděpodobnosti zjistit, která z možných hodnot je více a která méně pravděpodobná.

Statistická chyba jednoho měření.

Nejdříve vysvětlíme několik vlastností náhodných veličin, které jsou součástí **teorie počtu pravděpodobnosti.** Pro každou náhodnou veličinu X, která může nabývat hodnot x, existuje **zákon rozdělení**, který uvádí funkce $p(x)$, jejíž hodnoty mají význam **hustoty pravděpodobnosti**. Je-li $P(x, x+dx)$ pravděpodobnost, že náhodná neličina veličina nabývá hodnot v intervalu $(x, x+dx)$, lze ji pomocí hustoty pravděpodobnosti napsat jako

$$P(x, x+dx) = p(x)\; dx\,. \qquad \text{(IV.4)}$$

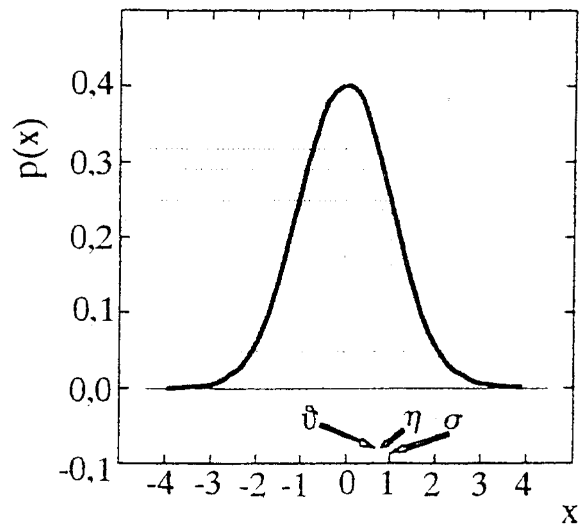
V teorii pravděpodobnosti odvodil Gauss větu určující hustotu pravděpodobnosti většiny náhodných veličin

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}\,. \qquad \text{(IV.5)}$$

Tato funkce se nazývá (**Gaussův - Laplaceův**) **normální zákon rozdělení**. Veličina x_0 se nazývá **správná hodnota** a je totožná s nejpravděpodobnější hodnotou, vždy kladná konstanta σ je tzv. **směrodatná odchylka**. V teorii chyb, kde výsledek měření je náhodnou veličinou, ji nazýváme **střední kvadratickou chybou jednoho měření.** Její druhá mocnina σ^2 se nazývá **rozptyl (disperze)**. Základní vlastnosti funkce hustoty pravděpodobnosti $p(x)$ jsou zřejmé z obr. 1. Definičním oborem funkce $p(x)$ je interval $(-\infty, \infty)$.

Pravděpodobnost, že naměřená hodnota náhodné veličiny leží v intervalu $(x_0-\sigma,\ x_0+\sigma)$ je *68,3%*, v intervalu $(x_0-3\sigma,\ x_0+3\sigma)$ je *99,7%*.

Pozn. Hodnota 3σ se v některých učebnicích zavádí jako **maximální (krajní) chyba jednoho měření.** Udává interval v okolí správné hodnoty x_0, ve kterém se nachází naměřená hodnota veličiny s pravděpodobností *99,7 %*



Obr. IV.1.: Normované normální rozložení (σ = 1, x_0 = 0)

$$P(x_0 - 3\sigma, x_0 + 3\sigma) = \int_{x_0-3\sigma}^{x_0-3\sigma} p(x)\,dx = 0{,}997 \qquad \text{(IV.6)}$$

50% je pravděpodobnost, že hodnota náhodné veličiny leží v intervalu $(x_0 - \vartheta, x_0 + \vartheta)$, kde veličina ϑ se nazývá **pravděpodobná chyba jednoho měření** a platí, že $\vartheta = 0{,}674\ \sigma \doteq 2/3\ \sigma$.
Míra přesnosti je definována :

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\ . \qquad \text{(IV.7)}$$

Statistická chyba souboru opakovaných měření

Správná hodnota a statistická chyba jednoho měření mají pouze teoretický význam, nelze je totiž z jednoho měření vypočíst. Je nutné si uvědomit, že správná hodnata měřené veličiny je nedosažitelná jakýmkoliv měřením nebo výpočtem. Výsledky jednotlivých měření jsou rozloženy v okolí **správné hodnoty** x_0 s relativní četností odpovídající normálnímu zákonu rozložení. Ze souboru hodnot x_i získaných opakováním konečného počtu měření lze však vypočíst pouze **aritmetický průměr** $\bar{x}$, kterým ve výpočtech nahrazujeme správnou hodnotu x_0, a přibližný normální zákon rozložení s nejpravděpodobnější hodnotou rovněž $\bar{x}$.

Určení nejpravděpodobnějšího výsledku měření.

Předpokládejme, že provádíme měření veličiny X, jejíž správná hodnota je x_0. Výsledky opakovaných měření se budou vzájemně lišit. Výsledek i-tého měření označíme x_i. Provedeme-li n měření, aritmetický průměr naměřených hodnot

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{(IV.8)}$$

má tři důležité vlastnosti : a) Součet odchylek od aritmetického průměru, určeného rovnicí (IV.4):

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0\ , \qquad \text{(IV.9)}$$

je roven nule.

b) Pro aritmetický průměr je součet čtverců odchylek nejmenší

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2 = \min\ . \qquad \text{(IV.10)}$$

c) Rozdíl mezi správnou hodnotou x_0 a aritmetickým průměrem $\bar{x}$ je pro velký počet měření $n \to \infty$ roven nule.

Matematické důkazy těchto tvrzení najdeme např. v učebnici: J. Brož : "Základy fyzikálních měření (I)" SPN Praha 1967. Z uvedených vlastností aritmetického průměru vyplývá tento závěr :

Za správnou hodnotu měřené veličiny považujeme s jistou pravděpodobností aritmetický průměr $\bar{x}$ všech výsledků měření x_i, $x_0 \doteq \bar{x}$.

Musíme také rozlišovat mezi **chybou jednoho měření** σ a **chybou aritmetického průměru** $\bar{\sigma}$, která je $\sqrt{n}$ krát menší.

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{(IV.11)}$$

Předpokládejme, že jsme za stejných podmínek provedli n měření a dostali jsme výsledky $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$. Výsledky a mezivýpočty zapisujeme přehledně do tabulky podle vzoru v kap. VI.1.

Na základě počtu pravděpodobnosti můžeme střední kvadratickou chybu aritmetického průměru vyjádřit výrazem

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}} \tag{IV.12}$$

nebo pro výpočet jednodušeji, ale méně přesně

$$\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{2\pi}\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_{i+}}{n\sqrt{n-1}} \doteq \frac{5}{2}\,\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\Delta x_{i+})}{n\sqrt{n-1}} \tag{IV.13}$$

kde Δx_{i+} je kladná odchylka od aritmetického průměru. V návodech pro výpočet na kalkulátoru se statistickým programem se uvádí vzorec

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n(n-1)}} \tag{IV.14}$$

který lze získat úpravou rovnice (IV.12). Chyba aritmetického průměru $\bar{\sigma}$ udává interval $(x_0 - \bar{\sigma},\ x_0 - \bar{\sigma})$ v okolí střední hodnoty veličiny x_0, ve kterém se nachází správná veličina s pravděpodobností *68,3%*.

Poznámka : Užitím vztahu (IV.11) lze vypočíst krajní, resp. pravděpodobnou chybu aritmetického průměru. Navíc se někdy zavádí tzv. **průměrná chyba** $\bar{\eta}$. Je definována jako střední hodnota z absolutní hodnoty odchylek.

$$\bar{\eta} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\,|x - \bar{x}|\,dx\,. \tag{IV.15}$$

Odtud plyne, že

$$\bar{\eta} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.\bar{\sigma} = 0{,}798\,\bar{\sigma}\,. \tag{IV.16}$$

IV. 2.2. Určení chyby jednoho měření

Pokud veličinu měříme jen jednou, což je v řadě případů postačující (například vážení nebo měření délek), nemůžeme chybu stanovovat na základě statistického rozboru. Pak je její stanovení pro daný problém specifické - je např. znám vztah, který ji na základě jiných informací umožní vyjádřit. Sem patří např. chyby vážení (kap. VI.1.), chyby odečítání na ručkových měřících přístrojích (kap.VI.9.), chyby na digitálních měřících přístrojích. Určení chyb jednoho měření bude věnována pozornost u každé úlohy. **Obecně lze však uvést, že chyba jednoho měření je dána polovinou jemného dělení stupnice použitého měřícího přístroje, u číslicových měřících přístrojů tzv. kvantovacím krokem A/D převodníku. Do značné míry je i mírou sebekritičnosti experimentátora.**

IV.2.3. Chyby veličin získaných výpočtem

Jedním z důležitých úlolů fyzikálních měření je určit veličinu z fyzikálního zákona, který vyjadřuje její souvislost s několika jinými veličinami získanými měřením. Tak například hustota těles se určuje z naměřené hmoty a objemu podle vztahu $\rho = m/V$. Hledaná veličina se pak neměří, ale vypočítáváme ji z jiných měřených veličin (hmotnosti a objemu) podle příslušného vztahu nebo zákona. Protože v měřených veličinách se vždy vyskytují chyby, je i hledaná, výpočtem stanovená, veličina zatížena určitou chybou.

Předpokládáme, že fyzikální veličina X, kterou zjišťujeme, je funkcí několika jiných veličin $a, b, c, \ldots$

$$X = f(a, b, c, \ldots) \tag{IV.19}$$

Chyby, s nimiž jsou měřeny, označíme Δa, Δb, Δc,.... Mohou to být chyby odhadnuté před měřením nebo získané statistickým výpočtem (např. jako střední kvadratické chyby aritmetického průměru $\bar{\sigma}_a$ $\bar{\sigma}_b$ $\bar{\sigma}_c$ ...). **Střední kvadratická chyba výsledné veličiny** X je pak dána vztahem

**

$$\Delta X = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 (\Delta a)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 (\Delta b)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 (\Delta c)^2 + \ldots} \tag{IV.20}$$

Pozn.: Často se používá pro vyjádření přesnosti **maximální (krajní) chyby**, jejíž symbolické vyjádření je aproximováno vztahem

$$\Delta X = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| \Delta b + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right| \Delta c + \ldots \tag{IV.21}$$

V tomto způsobu vyjádření přesnosti se za diference Δa, Δb, Δc, . . . dosazují krajní (maximální) chyby jednotlivých veličin. Tento vztah připomíná matematický vzorec pro výpočet totálního diferenciálu funkce více proměnných, parciální derivace jsou však v absolutní hodnotě, vzhledem ke kladné hodnotě chyb, a namísto diferenciálů da, db, dc, . . . jsou použity konečně veliké diference - chyby Δa, Δb, Δc, ...

– odhad „rozptylu"

V praxi σ neznáme, známe s resp. $\hat{s}$ a interval spolehlivosti sestavujeme pro aritmetický průměr $\hat{x}$, který považujeme za výsledek měření. Sestavení intervalu spolehlivosti vyžaduje v tomto případě použití Studentova rozdělení. Ukazuje se totiž [7], že máme-li výběr veličiny X s objemem n ze základního souboru řídícího se normálním rozdělením se střední hodnotou μ, řídí se veličina t definovaná vztahem (2,30) Studentovým rozdělením s $\nu = n - 1$ stupni volnosti.

Podobně jako v případě normálního rozdělení lze určit meze intervalu pomocí koeficientů $t_{p\nu}$ a pomocí $\hat{s}$, k nimž lze přiřadit pravděpodobnost, s níž se v daném intervalu nachází střední hodnota μ, tj.

$$\mathcal{P}\left[\hat{x} - t_{p\nu}\hat{s} \leq \mu \leq \hat{x} + t_{p\nu}\hat{s}\right] = P \qquad (2,34)$$

Koeficienty $t_{p\nu}$ jsou tabelovány (viz TABULKA odst. 2.10.).

V praxi k zápisu výsledku místo (2,34) využíváme formy:

přímo měřená

$$x = \left(\hat{x} \pm t_{p\nu}\,\hat{s}\right) \quad [X] \quad \text{pro } P = \ldots \% \qquad (2,35)$$

V případě hodnoty nepřímo měřené veličiny Y vypočtené z hodnot $\hat{x}_1$, ... $\hat{x}_m$ přímo měřených veličin stanovíme interval spolehlivosti ze vztahu

pro výslednou veličinu !!

$$\boxed{y = \left(\hat{y} \pm k_p\,\hat{s}_y\right)} \quad [X]$$

ZÁKONEM ŠÍŘENÍ CHYB !

přičemž $\hat{s}_y$ vypočteme ze vztahu ([redacted]) a k_p má dříve zavedený význam.

2.10. Tabulka Studentových koeficientů (převzato z [8])

ν \ P	0,050	0,100	0,200	0,500	0,683	0,900	0,954	0,980	0,990
1	0,079	0,158	0,325	1,000	1,839	6,314	13,82	31,82	63,66
2	0,071	0,142	0,289	0,816	1,322	2,920	4,500	6,965	9,925
3	0,068	0,137	0,277	0,765	1,198	2,353	3,292	4,541	5,841
4	0,067	0,134	0,271	0,741	1,142	2,132	2,858	3,747	4,604
5	0,066	0,132	0,267	0,727	1,111	2,015	2,640	3,365	4,032
6	0,065	0,131	0,265	0,718	1,091	1,943	2,508	3,143	3,707
7	0,065	0,130	0,263	0,711	1,077	1,895	2,421	2,998	3,499
8	0,065	0,130	0,262	0,706	1,067	1,860	2,359	2,896	3,355
9	0,064	0,129	0,261	0,703	1,059	1,833	2,313	2,821	3,250
10	0,064	0,129	0,260	0,700	1,053	1,812	2,277	2,764	3,169
11	0,064	0,129	0,260	0,697	1,048	1,796	2,249	2,718	3,106
12	0,064	0,128	0,259	0,695	1,044	1,782	2,225	2,681	3,055
13	0,064	0,128	0,259	0,694	1,041	1,771	2,206	2,650	3,012
14	0,064	0,128	0,258	0,692	1,038	1,761	2,189	2,624	2,977
15	0,064	0,128	0,258	0,691	1,035	1,753	2,175	2,602	2,947
16	0,064	0,128	0,258	0,690	1,033	1,746	2,163	2,583	2,921
17	0,064	0,128	0,257	0,689	1,031	1,740	2,153	2,567	2,898
18	0,064	0,127	0,257	0,688	1,029	1,734	2,143	2,552	2,878
19	0,064	0,127	0,257	0,688	1,028	1,729	2,135	2,539	2,861
20	0,063	0,127	0,257	0,687	1,026	1,725	2,128	2,528	2,845
21	0,063	0,127	0,257	0,686	1,025	1,721	2,121	2,518	2,831
22	0,063	0,127	0,256	0,686	1,024	1,717	2,115	2,508	2,819
23	0,063	0,127	0,256	0,685	1,023	1,714	2,109	2,500	2,807
24	0,063	0,127	0,256	0,685	1,022	1,711	2,104	2,492	2,797
25	0,063	0,127	0,256	0,684	1,021	1,708	2,100	2,485	2,787
26	0,063	0,127	0,256	0,684	1,020	1,706	2,096	2,479	2,779
27	0,063	0,127	0,256	0,684	1,020	1,703	2,092	2,473	2,771
28	0,063	0,127	0,256	0,683	1,019	1,701	2,088	2,467	2,763
29	0,063	0,127	0,256	0,683	1,018	1,699	2,085	2,462	2,756
30	0,063	0,127	0,256	0,683	1,018	1,697	2,082	2,457	2,750
31	0,063	0,127	0,256	0,682	1,017	1,696	2,079	2,453	2,744
32	0,063	0,127	0,255	0,682	1,017	1,694	2,076	2,449	2,738
33	0,063	0,127	0,255	0,682	1,016	1,692	2,074	2,445	2,733
34	0,063	0,127	0,255	0,682	1,016	1,691	2,071	2,441	2,728
35	0,063	0,127	0,255	0,682	1,015	1,690	2,069	2,438	2,724
36	0,063	0,127	0,255	0,681	1,015	1,688	2,067	2,434	2,719
37	0,063	0,127	0,255	0,681	1,014	1,687	2,065	2,431	2,715
38	0,063	0,127	0,255	0,681	1,014	1,686	2,063	2,429	2,712
39	0,063	0,126	0,255	0,681	1,014	1,685	2,061	2,426	2,708
40	0,063	0,126	0,255	0,681	1,013	1,684	2,059	2,423	2,704
41	0,063	0,126	0,255	0,681	1,013	1,683	2,058	2,421	2,701
42	0,063	0,126	0,255	0,680	1,013	1,682	2,056	2,418	2,698
43	0,063	0,126	0,255	0,680	1,012	1,681	2,055	2,416	2,695
44	0,063	0,126	0,255	0,680	1,012	1,680	2,053	2,414	2,692
45	0,063	0,126	0,255	0,680	1,012	1,679	2,052	2,412	2,690
46	0,063	0,126	0,255	0,680	1,012	1,679	2,051	2,410	2,687
47	0,063	0,126	0,255	0,680	1,011	1,678	2,050	2,408	2,685
48	0,063	0,126	0,255	0,680	1,011	1,677	2,049	2,407	2,682
49	0,063	0,126	0,255	0,680	1,011	1,677	2,047	2,405	2,680
50	0,063	0,126	0,255	0,679	1,011	1,676	2,046	2,403	2,678

V tabulce jsou hodnoty $t_{P\nu}$, pro které je pravděpodobnost $\mathcal{P}(|t| < t_{P\nu}) = P$, v závislosti na počtu stupňů volnosti ν.

4.3. Chyby měřidel

Třída přesnosti: třída přesnosti ručkových měřících přístrojů p(%) se udává v procentech a stanovuje absolutní chybu měření na daném rozsahu R podle vztahu:

$$\varepsilon = \mathbf{p.R}$$

Příklad: rozsah ampérmetru je R = 3 A , třída přesnosti je 1.5%.

Absolutní chyba měření proudu na tomto rozsahu

$$\varepsilon(I) = 1.5.10^{-2}.\ 3 = 0.045\ A$$

Poznámka: je zřejmé, že z důvodů minimalisace relativní chyby měření je nutno měřit v horní polovině stupnice ručkového měřícího přístroje

Třída přesnosti je údajem výrobce, který je získán statistickým šetřením na seriích hotových výrobků (měřících přístrojů). Chybu měření stanovenou z třídy přesnosti je nutno srovnat s chybou stanovenou statistickým zpracováním. V tomto případě se s ní zachází jako s chybou stanovenou odhadem a skládá se s chybou statistickou (viz dále).
Pojem třídy přesnosti je možno zobecnit i na jiné měřící přístroje. Někdy je možno odhadnout absolutní chybu měření z dělení stupnice.

Seminární úloha 14: Měření odporu metodou přímou (viz schema) bylo provedeno s přístroji třídy přesnosti 1. Byly naměřeny následující hodnoty: I = 210 mA (rozsah 0.3 A),
U = 18.5 V (rozsah 30 V).
Vnitřní odpor voltmetru je $10^5\ \Omega$ a vnitřní odpor ampérmetru je 7 Ω. Stanovte velikost měřeného odporu a chybu měření. Diskutujte možné alternativy zapojení a nutné korekce s ohledem na chybu měření.

Vyhodnocení chyby u digitálních měřících přístrojů

U všech číslicových přístrojů nastává "kvantizační chyba", která je minimálně rovna polovině hodnoty nejnižšího bitu. Chyba digitálních přístrojů se často udává ve dvou složkách, v procentech rozsahu plus platnost poslední číslice. Obě chyby musíme sečíst.

Příklad 1:
Na třímístném digitálním voltmetru s přesností ±0,8% ±1 digit byla naměřena na rozsahu DC 20V hodnota 2,50V.
Jaká je chyba měření?
a) Chyba rozsahu: 0,8% z 20V = 160mV
b) Chyba digitalizace: 10mV
c) Výsledná chyba: ±170mV
d) "Upravená" hodnota: 2,33V až 2,67V

Příklad 2:
Na třímístném digitálním voltmetru s přesností ±0,8% ±3 digit byla naměřena na rozsahu AC 20V hodnota 2,50V.
Jaká je chyba měření?
a) Chyba rozsahu: 0,8% z 20V = 160mV
b) Chyba digitalizace: 30mV
c) Výsledná chyba: ±190mV
d) "Upravená" hodnota: 2,31V až 2,69V

Parametry multimetru typ M3900

DC napětí	(stejnosměrné)		AC napětí	(střídavé)	
Rozsah	Přesnost	Rozlišení	Rozsah	Přesnost	Rozlišení
200mV	±0,5% z rozsahu ±1 digit	100μV	200mV	±1,2% z rozsahu ±3 digit	100μV
2V	±0,8% z rozsahu ±1 digit	1mV	2V	±0,8% z rozsahu ±3 digit	1mV
20V	±0,8% z rozsahu ±1 digit	10mV	20V	±0,8% z rozsahu ±3 digit	10mV
200V	±0,8% z rozsahu ±1 digit	100mV	200V	±0,8% z rozsahu ±3 digit	100mV
1000V	±0,8% z rozsahu ±1 digit	1V	700V	±1,2% z rozsahu ±3 digit	1V

DC proud	(stejnosměrný)		AC proud	(střídavý)	
Rozsah	Přesnost	Rozlišení	Rozsah	Přesnost	Rozlišení
20uA	±2,0% z rozsahu ±5 digit	10nA	20μA	±3,0% z rozsahu ±7 digit	10nA
200uA	±0,8% z rozsahu ±1 digit	0,1μA	200μA	±1,8% z rozsahu ±3 digit	0,1μA
2mA	±0,8% z rozsahu ±1 digit	1μA	2mA	±1,0% z rozsahu ±3 digit	1μA
20mA	±0,8% z rozsahu ±1 digit	10μA	20mA	±1,0% z rozsahu ±3 digit	10μA
200mA	±1,2% z rozsahu ±1 digit	100μA	200mA	±1,8% z rozsahu ±3 digit	100μA
2A	±1,2% z rozsahu ±1 digit	1mA	2A	±1,8% z rozsahu ±3 digit	1mA
10A	±2,0% z rozsahu ±5 digit	10mA	10A	±3,0% z rozsahu ±7 digit	10mA

Odpor		
Rozsah	Přesnost	Rozlišení
200Ω	±0,8% z rozsahu ±3 digit	0,1Ω
2kΩ	±0,8% z rozsahu ±1 digit	1Ω
20kΩ	±0,8% z rozsahu ±1 digit	10Ω
200kΩ	±0,8% z rozsahu ±1 digit	100Ω
2MΩ	±0,8% z rozsahu ±1 digit	1kΩ
20MΩ	±1,0% z rozsahu ±2 digit	10kΩ

Metoda nejmenších čtverců [Angot]. Je obvykle i ve vybavení jednoduchých kalkulátorů. Její podstata spočívá v tom, že nejsprávněji rozložená analytická funkce *f(x)* náhradou za empirickou funkci splňuje podmínku, že **residuální** (**chybový**)**součet čtverců** je minimální

$$S_o = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 = \min \tag{V.9}$$

Uplatnění tohoto požadavku pro případ **lineární závislosti** se nazývá **lineární regrese** [Bartsch]. Získaná přímka optimálně prokládaná soustavou bodů se nazývá **regresní (vztahová) přímka**

$$f(x) = a_o + a_1\, x \tag{V.10}$$

Výsledné vztahy pro **regresní koeficienty** a_0 a a_1 jsou

$$a_0 = \frac{1}{n}\left(\Sigma y_i - a_1 \Sigma x_i\right) = \bar{y} - a_1 \bar{x} \tag{V.11}$$

$$a_1 = \frac{n\Sigma x_i y_i - \Sigma x_i \,\Sigma y_i}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2} = \frac{\Sigma x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2} \tag{V.12}$$

Poznámka I.: Residuální součet čtverců

$$S_o = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n.\bar{y}^2 - a_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}\right) \tag{V.13}$$

Střední kvadratická chyba (rozptyl, směrodatná chyba)

$$\sigma = \sqrt{\frac{S_o}{n-2}} \tag{V.14}$$

Střední kvadratická chyba posunutí přímky

$$\sigma(a_o) = \sigma\left(n - \frac{n^2\,\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{V.15}$$

Střední kvadratická chyba směrnice přímky

$$\sigma(a_1) = \sigma\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\,\bar{x}^2\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{V.16}$$

Pro výpočet koeficientů a_o a a_1 spolu s jejich chybami $\sigma\,(a_o)$ a $\sigma\,(a_1)$ využívejte program REGRESE dostupný na počítačové síti.

Stupeň závislosti (přesnost lineárního vztahu) vyjadřuje rovněž **korelační koeficient** (koeficient korelace)

$$r_{xy} = \frac{\Sigma\,(x_i - \bar{x})\;(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma\,(x_i - \bar{x})^2\;\Sigma\,(y_i - \bar{y})^2}}$$

kde $r_{xy} \in \langle -1, 1 \rangle$.

Pro $/r_{xy}/ = 1$ naměřené body leží přímo na své regresní přímce. Pro $/r_{xy}/ > 0{,}8$ považujeme korelaci za dobrou. Pro $/r_{xy}/ < 0{,}5$ naměřené body nekorelují a proložené regresní přímky je neoprávněné.

Poznámka II.: Metodu nejmenších čtverců lze aplikovat na obecné nelineární empirické závislosti, kde náhradní funkce *f(x)* je obecná (polynom, racionální lomená funkce ap.) - viz. Rektorys K. a kol.: Přehled užité matematiky II.