MATICE PŘECHODU

Definice Nechť V je vektorový prostor nad T; nechť $\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_n$ a $\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n$ jsou dvě báze prostoru V. Nechť dále

$$
\begin{aligned}
\bar{v}_1 &= a_{11}\cdot\bar{u}_1 + a_{21}\cdot\bar{u}_2 + \dots + a_{n1}\cdot\bar{u}_n \\
\bar{v}_2 &= a_{12}\cdot\bar{u}_1 + a_{22}\cdot\bar{u}_2 + \dots + a_{n2}\cdot\bar{u}_n \qquad (1)\\
&\vdots \\
\bar{v}_n &= a_{1n}\cdot\bar{u}_1 + a_{2n}\cdot\bar{u}_2 + \dots + a_{nn}\,\bar{u}_n
\end{aligned}
$$

(tj. vektor $\bar{v}_1$ má v bázi $\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_n$ souřadnice $(a_{11}, a_{21},\dots, a_{n1})$,
vektor $\bar{v}_2$ — " — — " — $(a_{12}, a_{22},\dots, a_{n2}),\dots)$

Pak matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se nazývá matice přechodu od báze $\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_n$ k bázi $\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n$.

$\uparrow$

souřadnice vektoru $\bar{v}_1$ v bázi $\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_n$

Platí: Matice přechodu od jedné báze ke druhé, je vždy regulární (viz (1))

PŘÍKLAD Ve vektor. prostoru $\mathbb{R}^3$ máme dány dvě báze

$\bar{u}_1 = (1,1,1);\ \bar{u}_2 = (1,1,0);\ \bar{u}_3 = (1,0,0)$

$\bar{v}_1 = (2,3,2);\ \bar{v}_2 = (3,1,2);\ \bar{v}_3 = (4,3,3)$

Určete matici přechodu A od báze $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ k bázi $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ a matici přechodu B od báze $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ k bázi $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$.

① Hledáme matici přechodu A od báze $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ k bázi $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$

I. způsob: $\bar{v}_1 = a_{11}\cdot\bar{u}_1 + a_{21}\cdot\bar{u}_2 + a_{31}\cdot\bar{u}_3 \longrightarrow$

→ dosadíme souřadnice $(2,3,2) = a_{11}\cdot(1,1,1) + a_{21}\cdot(1,1,0) + a_{31}\cdot(1,0,0)$

roznásobíme a porovnáme =>

$2 = a_{11} + a_{21} + a_{31}$

$3 = a_{11} + a_{21}$

$2 = a_{11}$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_{11} = 2 \\ a_{21} = 1 \\ a_{31} = -1 \end{array}}$$

$\bar{v}_2 = a_{12} \cdot \bar{u}_1 + a_{22} \cdot \bar{u}_2 + a_{32} \cdot \bar{u}_3$ dosadíme souřadnice vektorů

$(3,1,2) = a_{12} \cdot (1,1,1) + a_{22} \cdot (1,1,0) + a_{32} \cdot (1,0,0)$

$3 = a_{12} + a_{22} + a_{32}$

$1 = a_{12} + a_{22}$

$2 = a_{12}$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_{12} = 2 \\ a_{22} = -1 \\ a_{32} = 2 \end{array}}$$

$\bar{v}_3 = a_{13} \cdot \bar{u}_1 + a_{23} \cdot \bar{u}_2 + a_{33} \cdot \bar{u}_3$

$(4,3,3) = a_{13} \cdot (1,1,1) + a_{23} \cdot (1,1,0) + a_{33} \cdot (1,0,0)$

$4 = a_{13} + a_{23} + a_{33}$

$3 = a_{13} + a_{23}$

$3 = a_{13}$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_{13} = 3 \\ a_{23} = 0 \\ a_{33} = 1 \end{array}}$$

Hodnoty dosadíme do matice přechodu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice přechodu od báze $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ k bázi $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$

2. způsob

$$\begin{array}{l} \\ + \\ \cdot(-1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & \bar{v}_1 \downarrow & \bar{v}_2 \downarrow & \bar{v}_3 \downarrow \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A

② Hledáme matici přechodu B od báze $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ k bázi $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$.

I. zp.:

$$\bar{u}_1 = b_{11}\bar{v}_1 + b_{21}\bar{v}_2 + b_{31}\cdot\bar{v}_3$$
$$\bar{u}_2 = b_{12}\cdot\bar{v}_1 + b_{22}\cdot\bar{v}_2 + b_{32}\cdot\bar{v}_3$$
$$\bar{u}_3 = b_{13}\cdot\bar{v}_1 + b_{23}\cdot\bar{v}_2 + b_{33}\cdot\bar{v}_3$$

$\bar{u}_1 = b_{11}\cdot\bar{v}_1 + b_{21}\bar{v}_2 + b_{31}\cdot\bar{v}_3$ dosadíme souřadnice vektorů

$$(1,1,1) = b_{11}\cdot(2,3,2) + b_{21}\cdot(3,1,2) + b_{31}\cdot(4,3,3)$$

$$1 = b_{11}\cdot 2 + 3\cdot b_{21} + 4\cdot b_{31}$$
$$1 = 3b_{11} + b_{21} + 3b_{31}$$
$$1 = 2\cdot b_{11} + 2\cdot b_{21} + 3\cdot b_{31}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} b_{31} = -1 \\ b_{21} = 1 \\ b_{11} = 1 \end{array}}$$

$\bar{u}_2 = b_{12}\cdot\bar{v}_1 + b_{22}\cdot\bar{v}_2 + b_{32}\cdot\bar{v}_3$

$$(1,1,0) = b_{12}\cdot(2,3,2) + b_{22}\cdot(3,1,2) + b_{32}\cdot(4,3,3)$$

$$1 = b_{12}\cdot 2 + 3\cdot b_{22} + 4b_{32}$$
$$1 = 3\cdot b_{12} + b_{22} + 3\cdot b_{32}$$
$$0 = 2\cdot b_{12} + 2\cdot b_{22} + 3\cdot b_{32}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} b_{32} = 6 \\ b_{22} = -5 \\ b_{12} = -4 \end{array}}$$

$\bar{u}_3 = b_{13}\cdot\bar{v}_1 + b_{23}\cdot\bar{v}_2 + b_{33}\cdot\bar{v}_3$

$$(1,0,0) = b_{13}\cdot(2,3,2) + b_{23}\cdot(3,1,2) + b_{33}\cdot(4,3,3)$$

$$1 = 2\cdot b_{13} + 3\cdot b_{23} + 4\cdot b_{33}$$
$$0 = 3\cdot b_{13} + b_{23} + 3\cdot b_{33}$$
$$0 = 2\cdot b_{13} + 2\cdot b_{23} + 3\cdot b_{33}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} b_{33} = 4 \\ b_{23} = -3 \\ b_{13} = -3 \end{array}}$$

Matice B přechodu od báze $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ k bázi $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

2. způsob

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -6 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -6 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 5 & -23 & -15 \\ 0 & -7 & 0 & -7 & 35 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$
$$B$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Výpočtem se ověří, že platí $A \cdot B = E_3$, tj. $\boxed{B = A^{-1}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Věta}}$ Nechť $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ a $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ jsou dvě báze vektor. prostoru V. Nechť matice A je maticí přechodu od báze $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ k bázi $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$. Pak maticí přechodu od báze $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ k bázi $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ je matice A^{-1}.

POZNÁMKA Nechť $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ a $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ jsou dvě báze vektor. prostoru V a nechť $A = (a_{ij})$ je matice přechodu od báze $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ k bázi $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$. Dále nechť $\bar{w} \in V$ je vektor, přičemž $\bar{w}$ má v bázi $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$, resp. $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ souřadnice

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, resp. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Tzn. $\bar{w} = x_1 \cdot \bar{u}_1 + x_2 \cdot \bar{u}_2 + \dots + x_n \cdot \bar{u}_n$
$\bar{w} = y_1 \cdot \bar{v}_1 + y_2 \cdot \bar{v}_2 + \dots + y_n \cdot \bar{v}_n$. $\overset{\text{Dosadíme z (1)}}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \bar{w} = y_1 \cdot \bar{v}_1 + y_2 \cdot \bar{v}_2 + \dots + y_n \cdot \bar{v}_n =$$
$$= y_1 \cdot (a_{11}\bar{u}_1 + \dots + a_{n1}\bar{u}_k) + y_2 \cdot (a_{12}\bar{u}_1 + a_{22}\bar{u}_2 + \dots + a_{n2}\bar{u}_n) +$$
$$+ \dots + y_n \cdot (a_{1n} \cdot \bar{u}_1 + \dots + a_{nn} \cdot \bar{u}_n) = \underbrace{(a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2 + \dots + a_{1n} y_n)}_{x_1} \cdot \bar{u}_1 +$$
$$+ \underbrace{(a_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 + \dots + a_{2n} \cdot y_n)}_{x_2} \cdot \bar{u}_2 + \dots + \underbrace{(a_{n1} \cdot y_1 + a_{n2} \cdot y_2 + \dots + a_{nn} \cdot y_n)}_{x_n} \cdot \bar{u}_n =$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x_1 &= a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2 + \dots + a_{1n} \cdot y_n \\ x_2 &= a_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 + \dots + a_{2n} \cdot y_n \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1} \cdot y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}$$

Z tohoto vztahu vyplývá, jak lze vyjádřit souřadnice vektoru $\bar{w}$ v bázi $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ pomocí téhož vektoru vyjádřeného v bázi $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$

Pokud bychom chtěli vyjádřit souřadnice vektoru $\bar{w}$ daného v bázi $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ v bázi $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$, pak platí vztah

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

PŘÍKLAD Nalezněte matici přechodu od báze (I) k bázi (II) vektorového prostoru V, je-li dáno:

$V = \mathbb{R}^2$; (I): $\bar{u}_1 = (2,-3)$; $\bar{u}_2 = (-1,1)$

(II): $\bar{v}_1 = (1,0)$; $\bar{v}_2 = (0,-2)$

---

2. způs:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} +1 & 0 & -1 & +2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{matrix}} \\ 0 & 1 & \end{array}\right)$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}}$$

$A =$ matice přechodu od (I) k (II)

1. způsob:

$\bar{v}_1 = a_{11} \cdot \bar{u}_1 + a_{21} \cdot u_2 \Rightarrow (1,0) = a_{11} \cdot (2,-3) + a_{21} \cdot (-1,1)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a_{11} = -1 \\ a_{21} = -3 \end{matrix}}$$

$\bar{v}_2 = a_{12} \cdot \bar{u}_1 + a_{22} \cdot \bar{u}_2 \Rightarrow (0,-2) = a_{12} \cdot (2,-3) + a_{22} \cdot (-1,1)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a_{12} = 2 \\ a_{22} = 4 \end{matrix}}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

PŘÍKLAD Určete souřadnice vektoru $\bar{w} = (1,3)$ dané v bázi (I) (viz minulý příklad) v bázi II, je-li matice přechodu od báze (I) k bázi (II) je

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Platí : $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, kde $(x_1, .., x_n)$ jsou souřadnice vektoru $\vec{w}$ v bázi (I); $(y_1, .., y_n)$ jsou souřadnice vektoru $\vec{w}$ v bázi (II)

$\vec{w} = (1,3)$ v bázi I

$$(**) \quad \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}$$

=> odtud roznásobením matic řešíme soustavu (1. způs.)

Rovněž platí $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$(*) \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

... je potřeba určit A^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

(the right block of the last matrix is marked $\underbrace{\quad}_{A^{-1}}$)

dosadíme do (*)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

, tj $\underline{\underline{\vec{w} = (-1,0)}}$ v bázi (II).

Ověříme (dosadíme do (**)) správnost výpočtu

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

↓

$\underline{\vec{w} = (1,3)}$ v bázi (I)