ALG2: Lineární Algebra (Skripta Horák, jako doplněk i skripta Kovár v IS)

Info ke zkoušce: zkouška Algebra 2 je typu kolokvium (= ústní zkouška), tj. u zkoušky není žádná písemka, jen ústní část.

Máte povinnost se naučit jen otázky vyznačené tučně, tj. otázka 1 se skládá jen z definice 1, definici 2 a 3 se učit nemusíte, **otázka 2 se skládá pouze z definice 4,** definici 5 se učit nemusíte, atd.

Dostanete 3 až 5 otázek z tohoto přehledu, otázky si nebudete vybírat, ale dostanete je přímo přiděleny, tj. zkoušející přímo určuje obtížnost i oblasti jednotlivých otázek; Vaším úkolem je přesně zodpovědět většinu otázek, které dostanete (i ve druhém semestru je stále důraz na přesnost matematického vyjadřování, jazyk používající nové pojmy, přesnost odvozování). Většina ze 3 otázek jsou 2 a více, většina z 5 otázek je 3 a více, apod.

Hodnocení kolokvia: u kolokvia neexistuje stupnice, pouze výsledek PROSPĚL – NEPROSPĚL; proto do otázek nejsou zahrnuty zcela všechny znalosti a pojmy.

Otázka 1:

Definice 1: vektorový prostor + příklad co je v.p., příklad co není v.p.

Definice 2: Podprostor vektorového prostoru + příklad
Definice 3: Lineární kombinace vektorů + příklad

Otázka 2:

Definice 4: lineární obal vektorů = podprostor generovaný množinou vektorů + příklad

Definice 5: součet podprostorů a příklad

Otázka 3:

a) **Věta 2.1- str. 8 A JEJÍ DŮKAZ: Průnik (i nekonečně mnoha) vektorových prostorů je vektorový prostor.**
b) **K čemu je tato věta dobrá? [odpověď: umožňuje definici 4, protože průnik podprostorů obsahujících danou množinu je opět podprostor]**

Definice 6: přímý součet podprostorů vektorového prostoru – a příklad

Otázka 4 (lehká, konstrukční):

a) **Je sjednocení podprostorů vždy podprostor? Uveďte příklad, kdy tomu tak není.**
b) **Jak zkonstruujeme součet podprostorů? [odpověď: Věta 2.4.2-str.10: součet podprostorů je podprostor generovaný jejich sjednocením]**

Otázka 5:

a) **Definice 7: lineárně ZÁVISLÁ posloupnost vektorů u_1, u_2, … , u_k. A příklad.**
b) **Věta 3.1-str.14 A JEJÍ DŮKAZ: Vektory u_1, u_2, … , u_k jsou lineárně závislé právě tehdy, když některý vektor u_i je lineární kombinací zbývajících vektorů této posloupnosti.**

Otázka 6:

a) **Definice 8: báze vektorového prostoru. Příklad, co je báze, a co není báze.**
b) **Definice 9: Dimenze vektorového prostoru. Příklad.**
c) **Některé vlastnosti báze a dimenze podle Vašeho výběru bez důkazu z vět 4.1, 4.2, 4.4, 4.5.**

Definice 10: Souřadnice vektoru v dané bázi + příklad

Věta 3.3-str.15: Steinitzova věta o výměně:
Každých r lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ z lineárního obalu L($\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s$) lze vyměnit (přehozením pořadí) za r-tici $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$, pro r menší nebo rovno s tak, že lineární obal daných s vektorů se výměnou nezmění: L($\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s$) = L($\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_s$) .
[Dk je instruktivní, jedná se o netriviální důkaz indukcí, nemusíte ho umět – využívá se v důkazu klíčových vět 4.2-str.19, 4.4-str.20 této teorie vektorových prostorů]

Věta 4.1. (o jednoznačnosti souřadnic v dané bázi) Každý vektor daného vektorového prostoru lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z jeho báze)

Věta 4.2-str.19: (vlastnosti báze) - klíčová věta této části teorie, k jejímu důkazu je potřeba právě Steinitzova věta o výměně; dk využívá Steinitzovu větu velmi elegantně a je zážitek si ho přečíst a porozumět mu.

Věta 4.4-str.20: (věta o dimenzi podmnožiny vektorového prostoru) Dimenze podprostoru U, který je podmnožinou vektorového prostoru V, je menší nebo rovna dimenzi V. Přitom rovnost dimenzí nastane právě tehdy, když se prostory rovnají. [Dk.: opět využije Steinitzovu větu]

Věta 4.5: (věta o dimenzi součtu a průniku podprostorů) … užitečná pro praktické výpočty: dimenze součtu PLUS dimenze průniku dvou podprostorů = součet dimenzí jednotlivých podprostorů.

Otázka 7:

a) **Definice 11: pořadí, parita pořadí. Příklad**
b) **Definice 12: Determinant čtvercové matice. Příklad. Některé vlastnosti z vět 2.1 až 2.5 bez důkazu.**

Otázka 8:

a) **Věta 2.1-str.29 A JEJÍ DŮKAZ: Transponováním se hodnota determinantu nezmění.**
b) **Věta 2.2-str.30 A JEJÍ DŮKAZ: Rozdělíme-li řádek matice A na součet dvou vektorů, je determinant matice A roven součtu dvou determinantů, kde v daném řádku jsou tyto dílčí vektory a zbylé řádky jsou stejné jako v A.**

Otázka 9:

a) **Co je to systém lineárních rovnic? Příklad, co je; příklad, co není.**
b) **Jaké tři různé metody řešení systémů lineárních rovnic existují? Popište je, vysvětlete a uveďte, kdy je můžeme použít (vždy nebo jen někdy? Kdy?)**
[odpověď: 1) Gaussova eliminační metoda; 2) Cramerovo pravidlo; 3) maticové řešení: systém Ax=b vynásobíme zleva maticí A^{-1}, dostaneme …]

Definice 13: Algebraický doplněk prvku a_{ij} čtvercové matice

Otázka 10 (lehká, výpočetní):

Věta 2.7-str.33, respektive její důsledek-str.34: Rozvoj Laplaceův při výpočtu determinantu. A příklad.

Definice 14: Adjungovaná matice

Otázka 11 (lehká, výpočetní):

Výpočet inverzní matice pomocí determinantů – popište postup bez důkazu. A příklad.

Definice 15: součet matic, násobení matice skalárem.
Věta 3.1: Mat_{mn},PLUS je komutativní grupa.
Definice 16: součin matic.

Otázka 12:

Věta 3.5-str.38 A JEJÍ DŮKAZ: Mat_{nn} je pro n větší nebo rovno dvěma nekomutativní okruh, který obsahuje dělitele nuly.

Věta 3.7-str.39: Determinant součinu matic je součin determinantů.
Definice 17: regulární matice, singulární matice. Příklady
Definice 18: inverzní matice

Otázka 13:

a) **Věta 3.6-str.38 bez důkazu: Vztah mezi transponováním a součinem matic.**
b) **Věta 3.9-str.42 bez důkazu: Vlastnosti inverzní matice ve vztahu k i) inverzi, ii) součinu matic, iii) determinantu, iv) transponování matic**

Věta 3.10-str.42: Množina Reg_{nn} je vzhledem k operaci násobení nekomutativní grupa.

Otázka 14 (lehká):

a) **Definice 19: hodnost matice.**
b) **Věty 4.1-4.5 (str.44-46) … některé vlastnosti hodnosti matice uvedené bez důkazu**
c) **Věta 4.8: Jak souvisí hodnost matice a její schodový tvar?**

Otázka 15:

a) **Definice 20-str.47: elementární řádkové úpravy … které to jsou?**
b) **Věta 5.1-str.52 A JEJÍ DŮKAZ: elementární řádkové úpravy matice lze prezentovat jako vynásobení této matice jistou maticí zleva**

Otázka 16:
Poznámka za větou 5.1-str.52 … vysvětlení Gauss-Jordanova postupu výpočtu inverzní matice

Otázka 17:
a) **Definice 21: matice přechodu od báze $\underline{u}$ k bázi $\underline{v}$ … i) vzorce (1), str.53 nejprve normálně, a pak ii) maticově: $\underline{v}=\underline{u}A$ (označení: $\underline{v}$ je čtvercová matice, kde bazické vektory v_i jsou ve sloupcích, $\underline{u}$ je matice čtvercová, kde bazické vektory u_i jsou ve sloupcích)**
b) **Vzorce ze str. 56, které přepočítávají souřadnice vektoru v různých bázích … vzorce v obou směrech!! Ideální je psát vektor stejným písmenem, pouze jako index uvést bázi, ve které jsou souřadnice uvedeny: $w_{\underline{u}}=Aw_{\underline{v}}$, $w_{\underline{v}}=A^{-1}w_{\underline{u}}$.**

Otázka 18:
Jaké situace mohou nastat vzhledem počtu řešení systému lineárních rovnic? Frobeniova věta-str.62, a její důsledek-str.65 … vysvětlení bez důkazu, ale aspoň na příkladech.

Otázka 19:
a) **Definice 22: homogenní systém lineárních rovnic**
b) **Věta 3.1-str.66 … bez důkazu: jaké situace mohou nastat při řešení systému homogenních lineárních rovnic?**
c) **Věta 3.2: Množina řešení homogenního systému lineárních rovnic je vektorový podprostor v R^n.**

Otázka 20 (důkaz konstruktivní, hezký):
Věta 3.3 a JEJÍ DŮKAZ: U je vektorový podprostor v R^n. Pak existuje homogenní systém lineárních rovnic o n neznámých, že U je množinou řešení tohoto systému.

Otázka 21:
a) **Definice 23: zhomogenizovaný systém lineárních rovnic**
b) **Věta 3.4-str.70 … bez důkazu: jaký je vztah mezi řešením systému HOM a NEHOM?**
c) **Věta 3.5-str.71 … bez důkazu: Všechna řešení soustavy NEHOM lze vyjádřit jako …**

Otázka 22 (jednoduchá, ale zákeřná, zapomíná se na ni):
Co je to Euklidovský vektorový prostor? [vektorový prostor, na kterém je definován skalární součin vektorů]

Otázka 23:
a) **Definice 24: skalární součin vektorů (pořádně, čtyři vlastnosti: i) komutativita součinu, ii) distributivita součinu, iii) interakce skalárního součinu vektorů a vnějšího násobení vektoru skalárem; iv) kladná hodnota součinu prvku se sebou samým mimo nulový vektor.**
b) **Definice 25 … velikost vektoru = norma vektoru (pojem navazující na definici 24).**
c) **Schwarzova nerovnost, str.74 … bez důkazu**
d) **Definice 26 … odchylka dvou vektorů**
e) **Je odchylka vektorů definována jednoznačně? [Odpověď: poznámka na str. 76: ze Schwarzovy nerovnosti plyne, že cosinus odchylky leží v intervalu od minus jedné do jedné, a tedy existuje jednoznačně úhel mezi 0 a π s tímto cosinem]**

Otázka 24:

Důkaz trojúhelníkové nerovnosti 1.4.3.-str.75 u pojmu velikosti vektorů

Otázka 25:

a) **Výpočet skalárního součinu na základě vzorce pro odchylku vektorů**
b) **Fyzikální využití skalárního součinu – např. výpočet práce při posunutí tělesa (bylo probráno pouze na přednášce nebo viz internet)**

Otázka 26:

a) **Vektorový součin vektorů – matematická (geometrická) definice;**
b) **Fyzikální využití vektorového součinu – např. výpočet momentu síly při otáčení tělesa kolem pevné osy (bylo probráno pouze na přednášce nebo viz internet)**

Definice 27: Ortogonální vektory … tato definice povoluje, aby jeden či oba vektory byly nulové
Věta 2.2-str.78 … věta už vylučuje ty ortogonální vektory, které jsou nulové

Otázka 27:

Věta 2.3-str.78 A JEJÍ DŮKAZ: Gram-Schmidtův proces: K-tici vektorů $u_1, u_2, \dots, u_k$ lze zaměnit k-ticí ortogonálních vektorů $e_1, e_2, \dots, e_k$, která generuje tentýž prostor (Důkaz vlastně konstruuje tuto posloupnost – stručně popište nalezení posloupnosti vektorů $e_1, e_2, \dots, e_k$).

Definice 28: Ortogonální množiny vektorů
Věta 2.5-str.80: množiny jsou ortogonální právě tehdy, když jsou ortogonální vektorové podprostory jimi generované

Otázka 28:

a) **Definice 29: Ortogonální doplněk vektorového podprostoru v daném vektorovém prostoru.**
b) **Věta 2.6-str.81, věta 2.7-str.82: bez důkazu jen některé vlastnosti operace ortogonálního doplňku (jedná se o unární operaci – jednomu podprostoru je přiřazen jeho ortogonální doplněk!!!! Podobně i transponování matice je unární operace, nalezení inverze k dané regulární čtvercové matici je unární operace, atd.)**

Otázka 29 (jednoduchá, výpočetní):

Jak nalezneme bázi ortogonálního doplňku podprostoru U? [Odpověď: Jako bázi řešení jistého systému lineárních rovnic – kterého?]

Def 30: ortogonální projekce vektoru do podprostoru.

Otázka 30 (těžká, výpočetní):

Jak nalezneme ortogonální projekci vektoru v do podprostoru U? Př. 2.2-str.83 … naučte se, jedná se o konstruktivní příklad; na tomto příkladu nebo obecně vysvětlete konstrukci projekce vektoru v do podprostoru o bázi u_1,u_2.

Otázka 31:

a) **Definice 31: lineární zobrazení mezi vektorovými prostory, izomorfismus;**
b) **Poznámka: obě podmínky z definice 31 lze spojit do jedné: obraz lineární kombinace je lineární kombinace obrazů**
c) **Př. 1.2.a)-str.85 … každé lineární zobrazení lze reprezentovat jistou maticí (Fajmonova připomínka) – určete tedy matici lineárního zobrazení v tomto příkladu;**
d) **Př. 1.2.b)-str.85 … zobrazení psí není lineární – proč? Vysvětlete.**

Věta 1.1: lineární zobrazení zachovává závislost množiny vektorů
Věta 1.3: složení dvou lineárních zobrazení je opět lineární zobrazení (a matice tohoto zobrazení se zkonstruuje jako součin matic dílčích zobrazení
Věta 1.4: Základní věta o lineárních zobrazeních: Každé lineární zobrazení je jednoznačně zadáno obrazy nějaké báze vektorového prostoru vzorů (vzhledem k tomuto zobrazení).

Otázka 32:

a) **Definice 32: Jádro Ker lineárního zobrazení, obor hodnot Im lineárního zobrazení;**
b) **Věta 1.6-str.89 A JEJÍ DŮKAZ: Lineární zobrazení φ mezi vektorovými prostory je injektivní právě tehdy, když Ker φ je jednoprvková množina obsahující nulový vektor.**

Věta 1.7: dim Ker **φ +** dim Im **φ** = dim V (V je prostor vzorů vhledem k zobrazení **φ**)
Věta 1.9: vlastnosti izomorfismu: zachovává závislost i nezávislost posloupnosti vektorů, zachovává bázi i dimenzi vektorového prostoru (tj. zobrazuje bázi na bázi, existuje právě mezi vektorovými prostory stejné dimenze).
Definice 33: lineární transformace vektorového prostoru V do sebe sama, automorfismus.
Definice 34: Matice lineární transformace = ta matice, která jednoznačně určuje, na jaké vektory se zobrazí nějaká báze prostoru V.

Otázka 33 (skládání zobrazení 01):

Vysvětlete všechny věci z diagramu převodů báze a lineárního zobrazení na daném příkladu (viz diagram na přednášce 11 nebo v souboru skladani-zobrazeni v IS, příklad označený jako skládání zobrazení 01 … schéma se zadáním příkladu dostanete na krátkou přípravu):

a) **Jak získáme matice přechodu v daném příkladu?**
b) **Jak získáme matici zadaného lineárního zobrazení?**
c) **Jak získáme matice složených zobrazení a jaký mají rozměr?**
d) **Jakým způsobem se přenáší konkrétní vektor v daném schématu?**

Otázka 34 (skládání zobrazení 02):

Vysvětlete všechny věci z diagramu převodů báze a lineární transformace na daném příkladu (viz příklad na přednášce-cvičení ve dvanáctém týdnu nebo v souboru skladani-zobrazeni v IS, příklad označený jako skládání zobrazení 02 … diagram dostanete na krátkou přípravu):

a) **Jak získáme matice přechodu v daném příkladu?**
b) **Jakým způsobem převádíme vektory v zobrazeních zadaných dlouhými šipkami?**
c) **Jak získáme matici lineární transformace v bázi $\underline{v}$?**
d) **Def 35-str.96: podobné matice = matice stejné lineární transformace v různých bázích**

Poznámka: díky tomu, že poslední část skript se už nebude zkoušet, studentům možná unikne důvod, proč se trápit s převodem matice transformace do jiné báze. Odpovědí je otázka 35: pro každou symetrickou matici A existuje podobná diagonální matice D, která lépe zachycuje geometrické vlastnosti dané transformace (blíže viz otázka 35).

Následující partie (Horák od str. 97 do konce skript) už nebudou zkoušeny letos (2017), ale budete je možná potřebovat ve 4. a 5. semestru, zejména v geometrii. Příklad a některé geometrické věci, které v Horákovi nejsou, jsou vzaty z Kovára v IS:

Definice 36-str.101: vlastní vektor lineární transformace (zadané maticí A) je takový vektor **u**, který se transformuje na svůj násobek, Tj. $\varphi(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. Vlastní hodnota příslušná danému vlastnímu vektoru je právě skalár λ v uvedeném vztahu.

Kovár, pdf-str.120, příklad 4.1: nalezení vlastních hodnot a vlastních vektorů příslušných dané matici A lineární transformace. Výpočetně důležitý příklad.

Definice 37: ortogonální zobrazení (Horák, str. 105)
Věta 4.1-str.105: z této věty a Schwarzovy nerovnosti na str. 74 plyne: protože ortogonální zobrazení zachovává velikost vektorů i skalární součin, zachovává toto zobrazení vlastně celý výraz v definici 26 odchylky vektorů, tj. zachovává odchylky všech vektorů, nejen pravé úhly

Kovár-str.123, věta 4.1 (pozor, to je náhodou věta se stejným číslem, ale z jiných skript!) Podobné matice mají stejné vlastní hodnoty.

Definice 38-Horák, str.108: ortogonální matice = taková matice, že její inverzi vypočteme pouze transponováním!!

Otázka 35 (letos nezkouším): Jaký je vztah mezi vlastními čísly a vektory podobných matic a ortogonálním zobrazením? Odpověď dává Kovár, příslušné věty jsou citovány jen pro případ reálné matice, situaci komplexní matice je vynechána:

a) Kovár str. 123. věta 4.2: vlastní vektory reálné symetrické matice, které přísluší různým vlastním hodnotám, jsou navzájem ortogonální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.
b) Kovár, str. 124, věta 4.3: Reálná symetrická matice má právě n navzájem různých vlastních hodnot.
c) Kovár 4.4-str.126: Pro každou symetrickou reálnou matici A řádu n (= pro zobrazení zadané touto maticí) existuje ortonormální báze složená z vlastních vektorů matice A.
d) Kovár 4.5-str.128: Každá reálná symetrická matice A je podobná diagonální matici D, která na diagonále obsahuje vlastní čísla matice A, a ortogonální matice H tak, že $D=H^TAH=H^{-1}AH$. (na rozdíl od Horáka, Kovár značí transponování matice H znakem H^T)
e) Kovár str. 129, př. 4.3 … ilustrace bodu d) … sestavení matic D a H pro reálnou symetrickou A … důležitý výpočet
f) Kovár str. 130- shrnutí: d),e) lze shrnout v tom smyslu, že reálnou symetrickou matici A lze podobnostní transformací převést na diagonální tvar pomocí ortogonální matice: $D= H^TAH$

Otázka 36 (letos nezkouším): Jaké jsou aplikace = využití vlastních hodnot a vlastních vektorů?

a) Viz IS, soubor aplikace-vlastnich-hodnot-01: geometrický význam vlastních hodnot transformace roviny (viz předmět Geometrie v 5.semestru)
b) Viz IS, soubor aplikace-vlastnich-hodnot-02: řešení lineárních systémů diferenciálních rovnic (viz předmět Matematická analýza 03).