

Podrobnější instrukce k výstupům v SDM2, 2017

Irena Budínová

1. Úvodní seminář

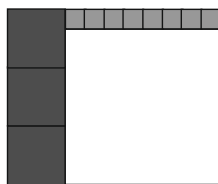
- Srovnávací studie učebnic: vyberte dvě až tři řady učebnic s rozdílným přístupem zavádění neznámé ve formě písmena a porovnejte tyto přístupy.
- Pomůcky vhodné pro výuku algebry na ZŠ

2. Algebraické výrazy; rovnice

a) Využívání algebraických výrazů v geometrických úlohách

S pomocí algebraických výrazů řešte následující úlohy ze sbírky úloh pro ZŠ a víceletá gymnázia. Při řešení používejte názorných obrázků, řešení by mělo být srozumitelné.

- Je dán čtverec o straně délky a . Odstrihnutím jeho rohů vytvoříme pravidelný osmiúhelník. Určete délku strany osmiúhelníku.
- Obdélník na obrázku je rozdělen na 12 čtverců. Délka strany tmavě šedých čtverců je 5 cm. Určete
 - obsah bílého čtverce,
 - obvod obdélníku.



b) Rozklady mnohočlenů, úpravy výrazů

Řešte následující úlohy s využitím úprav mnohočlenů:

- Zjednodušte výraz a určete podmínky, za kterých mají provedené úpravy smysl.

$$\frac{3a^3 + ab^2 - 6a^2b - 2b^3}{9a^5 - ab^4 - 18a^4b + 2b^5}$$

Zamyslete se nad tím, ve kterých krocích si žáci často nevědí rady a ve kterých krocích často dělají chyby.

- Číslo a rozdělte na dva sčítance tak, aby rozdíl jejich druhých mocnin se rovnal opět číslu a . Určete oba dva sčítance. (Postupujte od indukce k dedukci.)

c) Propedeutika rovnic v Hejného učebnicích pro 1. stupeň ZŠ

Prostudujte učebnice prof. Hejného od 1. do 5. ročníku a vyberte úlohy, které jsou propedeutikou budoucího učiva rovnice. Několik úloh v různém stupni náročnosti vzorově vyřešte.

d) Úlohy rovnicového charakteru řešené aritmeticky

Následující úlohu řešte aritmetickou metodou:

Maminka s Dominikem váží dohromady 82 kg, tatínek s Petrou váží dohromady 103 kg. Rodiče váží dohromady 149 kg a děti váží dohromady 36 kg. Kolik váží každý z nich?

3. Rovnice

a) Řešení lineárních rovnic

Řešte následující lineární rovnice a pojmenujte všechny ekvivalentní úpravy, které byly během řešení použity.

$$1) \frac{5x+1}{6} - \frac{7x-3}{8} = 1 - \frac{3x-1}{4}$$

$$2) x - \frac{x-1}{2} - \frac{2-x}{3} = 2$$

b) Řešení kvadratických rovnic různými způsoby

Řešte úlohy ze SŠ matematiky:

- 1) Pomocí doplnění kvadratického trojčlenu na úplný čtverec řešte v oboru \mathbb{R} kvadratické rovnice a) $x^2 - 3x + 2 = 0$, b) $2x^2 - 3x + 5 = 0$.
- 2) Pomocí Viětových vzorců určete kořeny kvadratické rovnice $x^2 + 12x = -35$.
- 3) Odvoďte vzorec pro reálné kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, \neq 0$) s neznámou x .

c) Řešení rovnic s neznámou ve jmenovateli ekvivalentními a důsledkovými úpravami

Řešte rovnice s neznámou ve jmenovateli a) pouze ekvivalentními úpravami, b) ekvivalentními i důsledkovými úpravami. Vysvětlete, kdy určujeme podmínky řešitelnosti a kdy provádíme zkoušku správnosti.

$$1) \frac{x+1}{x} + \frac{(x+1)^2}{x^2} - \frac{(x+1)^3}{x^3} = 1$$

$$2) \frac{1}{u+1} + \frac{u}{u^2-1} - \frac{1}{u-1} = \frac{1}{1-u^2}$$

d) Úlohy řešené rovnicemi: gradovaná série úloh

Následující úloha může být pro mnoho žáků náročná. Vytvořte jednodušší analogii úlohy, kterou by mohli řešit i slabší žáci. Obě úlohy vzorově vyřešte. (Řešte pomocí rovnice.)

Pět kamarádů má kuličky. Každý z nich má o 35 kuliček více, než je $\frac{1}{6}$ všech kuliček. Kolik kuliček mají dohromady a kolik má každý z nich?

4. Slovní úlohy řešené rovnicemi

a) Řešení slovních úloh aritmeticky a pomocí rovnic

Následující úlohu řešte a) aritmeticky (pomocí znázornění), b) pomocí rovnic.

- 1) Babička měla v pytlíku bonbony. Kdyby chtěla každému vnoučeti dát 5 bonbonů, jedno dítě by nedostalo žádný bonbon. Kdyby dala každému vnoučeti 4 bonbony, 3 bonbony by jí zbyly. Kolik měla babička vnuků a kolik bonbonů?

Následující úlohu řešte a) experimentem (pomocí tabulky), b) pomocí rovnice.

- 2) Otec je o 2 roky starší, než je trojnásobek synova věku. Za 14 let bude otec dvakrát tak starý než jeho syn. Kolik let je otcí a kolik synovi?

b) Úlohy o společné práci řešené rovnicemi

Pomocí rovnice řešte následující úlohu:

Údržbář provede potřebné opravy za 24 dní. Vezme-li si na opravy pomocníka, budou společně hotovi za $13\frac{1}{3}$ dne. Za kolik dní by opravy provedl pomocník?

c) Úlohy o pohybu stejným směrem řešené aritmeticky a rovnicemi

Následující úlohu řešte a) aritmeticky, b) pomocí rovnice. Situaci graficky znázorněte, proveďte všechny náležitosti slovní úlohy.

V 6 hodin 40 minut vyplul z přístavu parník plující průměrnou rychlostí 12 km/h. Přesně v 10 hodin za ním vyplul motorový člun průměrnou rychlostí 42 km/h. V kolik hodin dohoní člun parník?

d) Úlohy o pohybu proti sobě řešené aritmeticky a rovnicemi

Následující úlohu řešte pomocí rovnice, co nejlépe ji graficky znázorněte.

- 1) Dvě letadla letí z letišť A a B vzdálených 420 km navzájem proti sobě. Letadlo z letiště A odstartovalo o 15 minut později a letí průměrnou rychlostí o 40 km/h větší než letadlo z letiště B. Určete průměrné rychlosti obou letadel, víte-li, že se setkají 30 minut po startu letadla z letiště A.

5. Soustavy lineárních rovnic; závislosti

a) Různé metody řešení soustav lineárních rovnic

Následující úlohu řešte pomocí soustavy rovnic.

Napíšeme-li přirozené trojčíslné číslo, jehož ciferný součet je 16, s obráceným pořadím cifer, získáme číslo o 297 menší. Vydělíme-li prostřední číslici první číslicí původního čísla, dostaneme částečný podíl 1 a zbytek 4. Určete původní trojčíslné číslo.

b) Úlohy, pomocí kterých lze názorně zavést pojmy definiční obor a obor hodnot; grafické znázornění závislosti

Jeden rohlík stojí 1,90 Kč. Zakreslete graf závislosti zaplacené sumy za rohlíky na počtu rohlíků. Zakreslete správně graf závislosti, určete její definiční obor a obor hodnot. Vysvětlete tyto pojmy.

c) Úlohy, pomocí kterých názorně pracujeme s vlastnostmi funkcí: monotonie, extrémy

Automobil po dobu 5 sekund zrychloval z rychlosti 45 km/h se zrychlením 2 m/s^2 , poté jel 10 sekund konstantní rychlostí. Zakreslete graf závislosti rychlosti na čase. Určete funkční předpis jednotlivých závislostí, zakreslete graf a diskutujte jejich vlastnosti, jako jsou spojitost, monotonie, omezenost, extrémy.

d) Názorné zavedení funkce přímá úměrnost

Hanka po dobu jednoho týdne dostávala od maminky 20 Kč denně za pomoc v domácnosti. Zakreslete graf závislosti získaného obnosu na počtu dní (na začátku neměla Hanka žádné peníze). Zapište funkční předpis. Úlohu změňte tak, aby byl graf a) posunut po ose x , b) posunut po ose y). Určete definiční obor, obor hodnot, vlastnosti daných závislostí.

6. Závislosti**a) Lineární funkce: zakreslování grafu, čtení z grafu**

- 1) Zakreslete grafy následujících funkcí a) statickou metodou, b) dynamickou metodou.

$$y = 3x + 1, y = 2 - 2x$$

- 2) Určete rovnici lineární funkce, jejíž graf prochází body $A[0; 3], B[-2; -3]$.

b) Kvadratická funkce na ZŠ a na SŠ

Pomocí praktických příkladů (např. určování obsahu čtverce, aj.) zaveďte kvadratickou závislost. Ukažte, jaký má funkční předpis a jak vypadá její graf (na ZŠ pouze pro $y = kx^2$). Určete její definiční obor, obor hodnot, vlastnosti. Ukažte, jakým způsobem se dále funkce probírá na SŠ.

c) Funkce nepřímá úměrnost a její aplikace

Čtyři stroje vykonají danou práci za 20 hodin. Vyjádřete rovnicí závislost počtu hodin potřebných k provedení dané práce na počtu strojů. Zakreslete graf závislosti, určete její vlastnosti. Z grafu vyčtěte, za kolik hodin stejnou práci vykoná 10 strojů.

d) Grafické řešení soustav lineárních rovnic

Řešte graficky soustavy rovnic:

$$1) \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 6y = 1 \end{cases}$$

7. Závislosti, kombinatorika**a) Grafické řešení slovních úloh o pohybu**

Řešte graficky slovní úlohy o pohybu.

- Alena vyšla v 7:40 hodin do školy, která je vzdálena od domu 600 m, rychlostí 3 km/h. Její bratr Ruda si všiml, že si doma zapomněla svačinu a rozhodl se ji doběhnout. Utíkal za ní rychlostí 6 km/h. Podaří se mu ji dohonit ještě před školou?
- Mezi dvěma přístavišti na řece jezdí parník. Cesta tam a zpět mu trvá 3 hodiny 45 minut. Po proudu pluje rychlostí 12 km/h a proti proudu rychlostí 8 km/h. Určete vzdálenost mezi přístavišti.

b) Variace a kombinace bez opakování na ZŠ

Na následujících úlohách ilustруйте, jakými metodami mohou řešit úlohy rozvíjející kombinační myšlení žáci ZŠ bez znalosti vzorců. Modifikujte zadání tak, aby bylo možno úlohy řešit intuitivně (řešte nejdříve jednodušší verze úloh).

- 1) Z čísel 1, 3, 4, 5, 8 sestavte všechna čtyřciferná čísla tak, aby se číslice v zápisu čísla neopakovaly.
- 2) Kolik a) úseček, b) přímek je zadáno pěti body v rovině?

c) Variace a kombinace bez opakování na SŠ

Odvoďte vztah mezi variacemi a kombinacemi bez opakování.

d) Variace a kombinace s opakováním na ZŠ

- 1) Kolik čtyřciferných čísel můžeme sestavit z číslic 3 a 6?
- 2) Máme 2 druhy pohlednic, z nich chceme vybrat 3 pohlednice. Kolik je možností výběru?

8. Kombinatorika; statistika a pravděpodobnost**a) Variace, kombinace a permutace s opakováním na SŠ**

- 1) Kolik různých anagramů můžeme získat ze slova ROKOKO, nesmějí-li v takovém anagramu stát všechna písmena O vedle sebe?
- 2) V sadě je 32 karet, 8 druhů, každá ve čtyřech barvách. Kolika způsoby můžeme vybrat 4 karty, jestliže: a) rozlišujeme jen barvy, b) rozlišujeme barvy i hodnoty karet?

b) Zaznamenávání dat různými způsoby a jejich interpretace

Pomocí didaktické hry uveďte problematiku zaznamenávání dat

c) Zakreslování různých diagramů a čtení z nich

Na různých příkladech ukažte různé možnosti zakreslování dat do diagramů.

d) Úlohy na pravděpodobnost

- 1) Určete pravděpodobnost, že náhodně zvolené dvojciferné přirozené číslo je buď prvočíslo, anebo mocnina čísla 2.
- 2) Tenista má první podání úspěšné s pravděpodobností 0,6 a druhé podání má úspěšné s pravděpodobností 0,8. S jakou pravděpodobností se tento tenista dopustí dvojchyby? (Výpočet zdůvodněte.)