

Úlohy do semináře DM4

Sestavila Irena Budínová

1. Řešte následující úlohu, která typově odpovídá úloze z Matematické olympiády. Vysvětlete postup řešení.

Je dán trojúhelník ABC. Střed strany AB je bod U a na straně BC zvolte bod V tak, aby $|CV|:|VB| = 1:3$. Narýsujte průsečík přímek AC a UV a označte ho T. V jakém poměru jsou délky úseček AC a CT?

2. Řešte následující úlohu, která typově odpovídá úloze z Matematické olympiády. Vysvětlete postup řešení.

Prodavačka prodávala syrová vejce. První zákazník si koupil polovinu všech vajec a půl vejce, druhý zákazník polovinu zbytku a půl vejce, třetí zákazník polovinu zbytku po druhém a půl vejce a prodavačce zbylo jedno vejce. Kolik vajec měla na počátku?

3. Doplňte chybějící číslice tak, aby platilo:

$$\begin{array}{r} x x 9 \\ x x 4 \\ \hline x x x x \\ 1 7 x 4 \\ \hline x x 2 3 \\ \hline x x x x x x \end{array}$$

4. Zdůvodněte (pokud možno různými způsoby), proč platí následující pravidla:
- Součin sudého počtu záporných čísel je číslo kladné.
 - Součin lichého počtu záporných čísel je číslo záporné.
 - Dělit nulou nelze.
5. Ukažte induktivní a deduktivní přístup při dokazování následujícího tvrzení a dokažte úplnou matematickou indukci.
Číslo $m(m^2 - 7)$ je dělitelné šesti pro libovolné přirozené číslo m .
6. Řešte následující slovní úlohy a) experimentálně, b) rovnicemi, c) kongruencemi.
Číslo y dává po dělení pěti zbytek 2 a po dělení sedmi zbytek 4. O jaké číslo se jedná?
7. Dokažte, že $\sqrt{5}$ není racionální číslo. Znázorněte úsečku délky $\sqrt{5}$ cm
- pomocí Pythagorovy věty,
 - pomocí Eukleidových vět.
8. Řešte následující úlohy z finanční matematiky. Vysvětlete na nich problematiku části procentového počtu.
- Cena kabátu byla nejprve zvýšena o 20 % a potom byla tato nová cena snížena o 35 %. Nyní se kabát prodává za 3 990 Kč. Jaká byla jeho původní cena před zdražením?
 - Cena kabátu byla nejprve zvýšena o 20 % a potom byla tato nová cena snížena o 25 %. Ušetří nakupující oproti ceně před zdražením?

9. Řešte následující slovní úlohy a ukažte různé přístupy k řešení:
- Honza a Kája mají dohromady ušetřeno 3 220 Kč. Kája ušetřil o 180 Kč méně než Honza. Kolik korun ušetřil každý z nich?
 - Cihla váží kilo a půl cihly. Kolik váží cihla?
10. Ukažte možnosti ověřování / dokazování následujících matematických tvrzení. Ve kterém ročníku se s těmito větami můžeme setkat?
- Pro n prvních lichých přirozených čísel platí $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.
 - Součet tří po sobě jdoucích mocnin čísla 2 je vždy dělitelný číslem 7.
11. Řešte následující slovní úlohy.
- Vyřešte úlohu i) pomocí rovnice, ii) graficky, iii) pomocí funkcí:
Za chodcem jdoucím průměrnou rychlostí 4 km/h vyjel z téhož místa o 2 hodiny později cyklista průměrnou rychlostí 20 km/h. Za jak dlouho a jak daleko od výchozího místa dohoní cyklista chodce?
 - 45 litrů vína bylo stočeno do 54 lahví, některé byly litrové a některé 0,7 litrové. Kolik bylo kterých lahví?
12. Řešte úlohy a rovnice vedoucí na řešení kvadratických rovnic:
- Nalezte koeficienty a tvar kvadratického polynomu $ax^2 + bx + c$, jestliže víte, že součin kořenů je roven $-\frac{5}{2}$ a součet kořenů $-\frac{3}{2}$.
 - Řešte v oboru reálných čísel rovnici pouze ekvivalentními úpravami:

$$\frac{3x}{(x-2)(x-5)} = \frac{x+2}{x-5} - \frac{2}{x-2}$$
13. Na následujících příkladech popište metodiku výuky zakreslování grafu funkce.
- Motivujte reálnými příklady následující funkce a zakreslete jejich grafy:
 $y = 3x, y = -0,5x, y = 2x - 5, y = 2(x + 3)$.
 - Zakreslete grafy funkcí: $y = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{x} + 1, y = \frac{1}{x+1}$
14. Kvadratická funkce.
Zakreslete grafy funkcí $y = -x^2 + 1, y = 2x^2 - 4x - 6$. Určete vlastnosti druhé funkce.
15. Racionální lomená funkce.
- Zakreslete graf funkce $y = \frac{x+2}{x-5}$. Určete vlastnosti této funkce.
 - Jak se změní tlak plynu, jestliže se při stejné teplotě změní jeho objem na dvojnásobek? Zakreslete graf.
16. Goniometrické funkce.
Zakreslete grafy funkcí $y = \sin 3x, y = -2 \sin x + 1, y = \frac{1}{2} \cos(x - \frac{\pi}{2})$.
Určete vlastnosti druhé z funkcí.
17. Goniometrické funkce
Pomocí jednotkové kružnice definujte funkce $y = \sin x, x = \cos x, y = \operatorname{tg} x$.
Dále pomocí jednotkové kružnice určete $\sin \frac{2}{3}\pi$ a $\cos \frac{3}{4}\pi$.
18. Aplikace goniometrických funkcí.
- Máme pravidelný trojboký jehlan o délce hrany základny 2 cm a výšce 4 cm. Určete odchylku a) boční stěny od základny, b) boční hrany od základny.

- b) Zjistěte bez kalkulačky za použití pravítka, kružítka a úhloměru úhel α , je-li $\sin \alpha = 0,73$.
19. Planimetrie.
Jaký je součet vnitřních úhlů čtyřúhelníku? Dokažte různými způsoby.
20. Řešte konstrukční úlohy:
Proveďte a popište základní konstrukci úsečky délky $\frac{15}{4}$ cm dvěma různými způsoby.
21. Řešte konstrukční úlohy:
Je dána úsečka AP, $|AP| = 4$ cm. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je AP výškou ke straně BC a dále je dáno $c = 5$ cm, $t_b = 6$ cm.
22. Geometrická zobrazení.
Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: strany a, b a těžnice ke straně c .
23. Geometrická zobrazení.
Rozdělte úsečku AB v poměru zlatého řezu.
24. Stereometrie.
Definujte pravidelná tělesa a uveďte jejich zajímavé vlastnosti. Experimentálním způsobem ověřte platnost Eulerovy věty.
25. Míry geometrických útvarů.
a) Definujte následující pojmy: délka úsečky, obsah rovinného útvaru, objem prostorového útvaru.
b) Ukažte zavedení obsahu čtverce, obdélníku, rovnoběžníku, trojúhelníku.
26. Míry geometrických útvarů.
Vepište do kružnice o poloměru r postupně rovnostranný trojúhelník, čtverec, pravidelný šestiúhelník, pravidelný osmiúhelník. Vyjádřete jejich obvody a obsahy pomocí r .
27. Řešte kombinatorické úlohy. Postupujte způsobem odpovídajícím základní škole a pomocí vzorce, který na příkladu osvětlíte.
Kolik přímek je určených 12 různými body v rovině, jestliže právě čtyři z nich leží na jedné přímce a žádné tři další ze zadaných bodů již neleží na jedné přímce?
28. Řešte úlohy z pravděpodobnosti a statistiky:
Z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 0 sestavte všechna šesticiferná čísla tak, aby se číslice v zápisu čísla neopakovaly. Náhodně vybereme jedno číslo. Vypočítejte pravděpodobnost, že náhodně vybrané číslo bude i) dělitelné pěti, ii) dělitelné třemi.