1.4. Práce, energie, výkon

1. Vysvětlit pojem dráhový účinek síly, znát obecný vztah pro výpočet práce.
2. Vědět, že výkon je veličina vyjadřující „jak rychle se práce koná“.
3. Umět vyjádřit práci z výkonu a odvodit příslušné jednotky.
4. Vysvětlit rozdíl mezi výkonem a příkonem, definovat účinnost.
5. Vědět, že okamžitý výkon souvisí se silou a rychlostí.
6. Vysvětlit pojem vnitřní a vnější síla.
7. Znát vztah pro kinetickou energii.
8. Vyjádřit změnu potenciální energie jako práci konanou vnějšími silami.
9. Umět odvodit potenciální energii částice v homogenním tíhovém poli a v poli působení elastické síly
10. Znát vztah pro tíhovou potenciální energii.Vědět, že tíhová potenciální energie závisí na volbě nulové hladiny energie.
11. Znát vztah pro energii pružně deformované pružiny. Vědět, že potenciální energii pružnosti
12. Vědět, že mechanická energie je dána součtem energie kinetické a potenciální.
13. Znát zákon zachování energie, umět uvést konkrétní příklady dějů, při nichž se mechanická energie mění v jiné formy energie.
14. Znát souvislost změny kinetické energie a tíhové potenciální energie s mechanickou prací.

Začínáme další kapitolu, která sice nepřináší nové pojmy ve srovnání se středoškolskou fyzikou, ale bude je v některých případech definovat poněkud obecněji. To si můžete dovolit protože jste již zvládli derivační a integrační počet.

Slovo práce má v běžném životě mnoho významů. Řekneme-li „těžká práce“, můžeme mít na mysli, že je s někým těžké pořízení, ale může jít i o namáhavou práci fyzickou nebo duševní (třeba se studiem fyziky). Tentýž problém máme i s výrazem energie. Můžeme hovořit o energii elektrické, energii vynaložené na získání nějakého cíle, nebo energii vyplýtvanou na vzdělávání svých potomků.

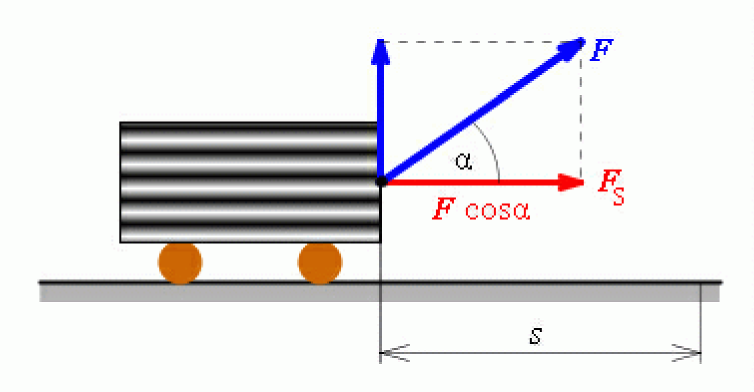
V této kapitole si problém zúžíme, budeme se zabývat pouze mechanickou prací, mechanickou energií a mechanickým výkonem. Přesto ale tato kapitola poskytne výklad řady pojmů a definice, které budou užitečné i při studiu dalších kapitol. Prostudujte si tedy tuto kapitolu velmi pozorně.

1.4.1. Mechanická práce

Mechanická práce je práce síly. Již na základní škole jste se učili, že tlačíme-li před sebou bednu po nějaké dráze a překonáváme odpor tření, konáme práci. Padáme-li, koná práci po trajektorii volného pádu tíhová síla, práci koná motor traktoru táhnoucího vlečku atd.

Velikost vykonané práce závisí nejen na velikosti působící síly, ale je důležitý i směr, ve kterém na těleso působí. Působí-li síla na těleso ve směru trajektorie pohybu, jsou její účinky (a tím i vykonaná práce) maximální. Čím více se směr síly odchyluje od trajektorie, tím se účinky snižují. Důležité je si uvědomit, že **práci koná jen složka síly ve směru pohybu.** Složka kolmá těleso nadlehčuje.

Mechanická práce W vykonaná silou F při přemisťování tělesa je úměrná velikosti této síly F, dráze s, o kterou se těleso přemístí a úhlu α, který svírá síla s trajektorií pohybu.



Obr.1.4.-1

$W = F\, s \cos\alpha$ 1.4.-1

Vztah 1.4.-1 pro výpočet práce však můžeme použít pouze tehdy je-li síla F po celé dráze působnosti s stále stejně velká a má stále stejný směr daný úhlem α.

Ve skutečnosti se může směr působení síly měnit a vlastní síla může být také proměnná.

Jak tedy budeme postupovat? Vyjdeme ze středoškolské fyziky, ze vztahu pro práci (1.4.-1), přesněji pro přírůstek práce ΔW vykonané konstantní silou F konstantního směru na malé dráze Δs.

$\Delta W = F \Delta s \cos\alpha.$

Zmenšíme ještě dráhový úsek Δs na nekonečně malý, na diferenciál dráhy ds. Tím se stane diferenciálem i vykonaná práce.

$\mathrm{d}W = F\, \mathrm{d}s \cos\alpha.$

Ještě nahradíme změnu skalární veličiny dráha ds změnou polohového vektoru d$\boldsymbol{r}$ (dr). Jak si vzpomínáte ze začátku kinematiky pak obě mají stejný význam až na to že d$\boldsymbol{r}$ určuje navíc i změnu směru.

$\mathrm{d}W = F\, \mathrm{d}r \cos\alpha$

Pokud bychom tuto rovnici integrovali, pak je vše v pořádku až na to, že uvažujeme případ síly, která stále působí ve směru α. To ale není obecný případ. Nicméně pokud jste pořádně si zopakovali vektorový počet (v tomto případě potřebujeme skalární součin dvou vektorů) pak jistě víte, že součin dvou velikostí vektorů (F, dr) vynásobený kosinem úhlu α, který svírají, představuje jejich skalární součin. Takže poslední rovnici přepíšeme do tvaru

$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F} . \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$

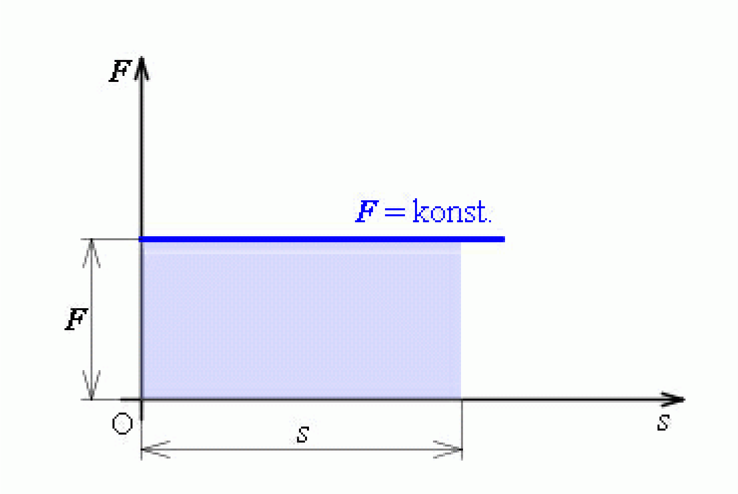
Poslední rovnici budeme integrovat a dostaneme zcela obecné vyjádření pro velikost konané práce

$\boxed{W_{1,2} = \int_1^2 \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{r}}.$ 1.4.-2

Práce vykonaná po dráze z bodu 1 do bodu 2 je dána určitým integrálem skalárního součinu síly $\boldsymbol{F}$ a diferenciálu polohového vektoru d$\boldsymbol{r}$ s mezemi danými body 1 a 2. **Výsledkem skalárního součinu je skalár, což práce je**.

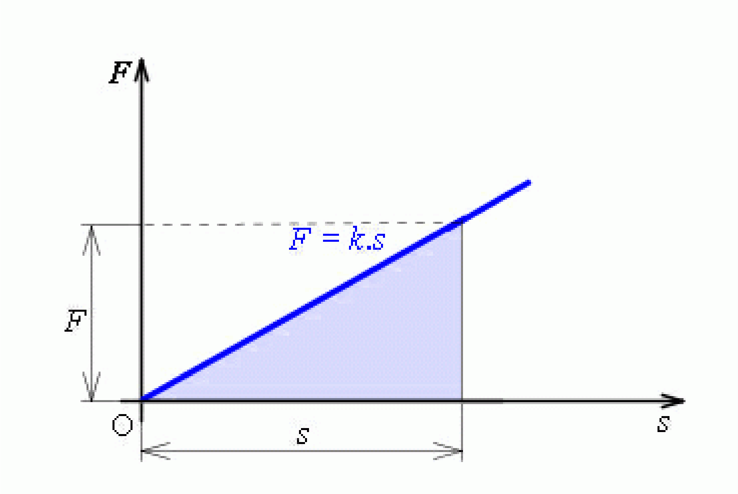
Mechanickou práci můžeme také určovat **graficky**. Vzpomeňte si na grafické stanovování velikosti uražené dráhy rovnoměrného pohybu z plochy v diagramu závislosti rychlosti na čase (kapitola 1.2.5). Nyní si na osu *x* budeme vynášet dráhu *s*, na osu *y* pak velikost působící sílu *F*. Musíme však rozlišovat různé situace podle charakteru působící síly:

- *Síla je konstantní.* V našem grafu na Obr.1.4.-2 bude znázorněna síla jako polopřímka rovnoběžná s osou *s*. Obsah modře vybarveného obdélníka udává vykonanou práci $W = F\ s$. Ale pozor, jako působící sílu musíme uvažovat jen její složku působící ve směru pohybu.



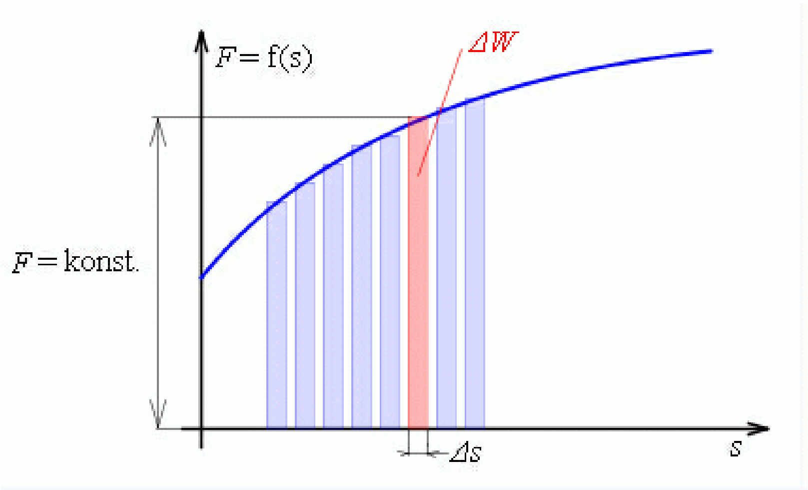
Obr.1.4.-2

- *Síla je proměnná, rovnoměrně roste s dráhou ($F = k\ s$).* V tomto případě je práce dána obsahem vybarveného trojúhelníka $W = ½\ F\ s = ½\ k\,s^2$ jak je vidět na Obr.1.4.-3.



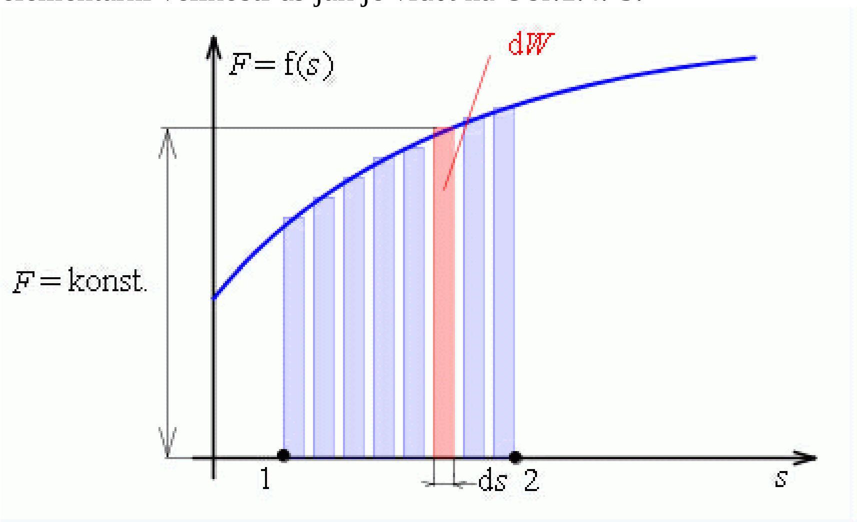
Obr.1.4.-3

- *Síla je proměnná, její průběh je popsán obecnou křivkou.* Tuto situaci vidíme na Obr.1.4.-4. V tomto případě musíme rozdělit dráhu na malé úseky Δs, pro které je změna síly velmi malá, zanedbatelná. Sílu v tomto úseku dráhy považujeme za konstantní. Pro vybarvenou plošku opět platí, že odpovídající přírůstek práce ΔW si můžeme vyjádřit jako součin konstantní síly v daném úseku dráhy *F* a příslušné dráhy Δs, $\Delta W = F\ \Delta s$. Celková vykonaná práce je pak součtem všech prací na jednotlivých úsecích. Tento postup je vlastně základem pro integrování plochy.



Obr.1.4.-4

Překresleme si Obrázek Obr.1.4.-4 tak, že místo malých úseků Δs použijeme úseky elementární velikosti ds jak je vidět na Obr.1.4.-5.



Obr.1.4.-5

Vybarvené „obdélníčky“ představují element vykonané práce dW = F ds. Sečteme-li všechny tyto elementární práce od bodu 1 do bodu 2 dostaneme práci vykonanou v tomto úseku dráhy:

$$W_{1,2} = \sum_{1}^{2} F \ \mathrm{d}s \, .$$

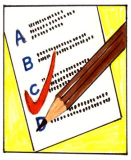
V matematice jste se dověděli, že tato suma je vlastně určitý integrál

$$W_{1,2} = \int_{1}^{2} F \ \mathrm{d}s \, .$$

To samozřejmě platí v případě, že síla během práce konané od bodu 1 do bodu 2 nemění svůj směr. Tento zápis budeme číst následujícím způsobem. Modře vybarvená **plocha** nahoře omezená křivkou vyjadřující průběh síly, dole osou s a na bocích výchozí (1) a konečnou polohou (2) **bude vyjadřovat velikost vykonané práce.**

U 1.4. -1. *Vyjádřete* jeden joule v jednotkách soustavy SI.

TO 1.4. -1. Na těleso pohybující se po vodorovné podložce působí postupně tři stejně velké síly. Síla F_1 ve směru pohybu, síla F_2 pod úhlem 30^o od směru pohybu a síla F_3 kolmo na směr pohybu. *Která síla koná největší práci?*



a) F_1 b) F_2 c) F_3 d) všechny síly konají stejnou práci

TO 1.4. -2 Na těleso pohybující se po vodorovné podložce působí postupně tři stejně velké síly. Síla F_1 ve směru pohybu, síla F_2 pod úhlem 30^o od směru pohybu a síla F_3 kolmo na směr pohybu. *Která síla koná nulovou práci?*

a) F_1 b) F_1,F_3 c) F_3 d) žádná z nich

TO 1.4.-3 Pro výpočet mechanické práce *W* (viz obr.) *lze akceptovat* následující vztahy

a) $W = F\, r \sin\alpha$

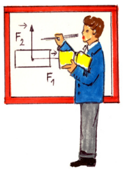
b) $W = F\, r \cos\alpha$

c) $W = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{r}$

d) $W = \int \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{r}$

e) $W = \int \boldsymbol{F} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}$

TO 1.4. -4 *Jak velkou práci vykoná síla* 5 N působící ve směru osy *x* při přemístění tělesa z bodu *A*(2m,0) do bodu *B*(12m,0)?



Člověk táhne rovnoměrným pohybem po vodorovné pláni sáně s nákladem 100 kg po dráze 300 m. *Jakou mechanickou práci vykoná*, jestliže provaz svírá s vodorovnou rovinou úhel 0^o a součinitel smykového tření saní na sněhu je 0,1?

Označíme si hmotnost nákladu m = 100 kg, dráhu s = 300 m, úhel mezi směrem pohybu a působící silou $\alpha = 0^o$, součinitel tření f = 0,1. Počítáme s g = 10 m.s^{-2}.

Má-li být pohyb rovnoměrný, pak člověk musí působit silou *F*, která je právě tak velká jako síla třecí $F_t = f\, m\, g$. Rovnoměrný pohyb (bez zrychlení) je totiž charakterizován tím, že výslednice působících sil je nulová. Podle vztahu pro práci $W = F\, s \cos\alpha$ vykoná působící síla mechanickou práci:

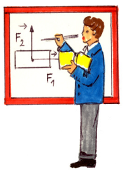
$$W = F_t\, s = f\, m\, g\, s \cos\alpha = 0{,}1.100.10.300.\cos 0 = \underline{30\,000\ \mathrm{J}}.$$

Člověk vykoná mechanickou práci 30 kJ.

U 1.4. -2 *Jakou mechanickou práci vykoná síla naší paže*, jestliže nákupní tašku o hmotnosti 8 kg a) zvedneme do výše 1 m, b) držíme ve výši 1 m nad zemí, c) přeneseme ve vodorovném směru do vzdálenosti 5 m?

U 1.4. -3 Cyklista jede stálou rychlostí po vodorovné silnici proti větru, který na něj působí silou 12 N. a) *Jakou práci vykoná při překonávání síly větru* na dráze 5 km? b) *Jakou práci vykoná*, svírá-li směr větru se směrem jeho pohybu úhel 60^o?

U 1.4. -4 Automobil o hmotnosti 2 000 kg jede stálou rychlostí do kopce se stoupáním 4 m na každých 100 m dráhy. Součinitel odporu proti pohybu automobilu je 0,08. *Určete práci*, kterou vykonal motor automobilu na dráze 3 km.



Jak velkou práci vykoná síla $\boldsymbol{F} = 5\mathbf{i}$ (N), jejíž působiště se pohybuje po dráze $\boldsymbol{r} = 3t^2\mathbf{j}$ (m,s) ?

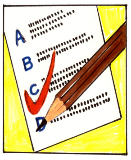
Samozřejmě vyjdeme z obecného vztahu pro práci. V něm ale potřebujeme ne $\boldsymbol{r}$, ale d$\boldsymbol{r}$. Takže si nejdříve vyjádříme diferenciál dráhy určené polohovým vektorem (zopakovat z matematiky).

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\mathrm{d}t = \frac{\partial}{\partial t}(3t^2\mathbf{j})\mathrm{d}t = 6t\mathbf{j}\mathrm{d}t$$

a dosadíme do obecného vztahu pro práci za $\boldsymbol{F}$ a d$\boldsymbol{r}$.

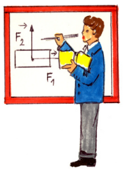
$$W = \int 5\mathbf{i}.6t\mathbf{j}\mathrm{d}t = 0 \ \mathrm{J}.$$

Práce bude nulová, protože skalární součin dvou kolmých vektorů $\boldsymbol{F}$ a d$\boldsymbol{r}$ je nulový.



TO 1.4.-5 *Jak velkou práci* vykoná za první dvě sekundy síla $\boldsymbol{F} = t^2\mathbf{i} + \ \mathbf{j}$ (N,s), jejíž působiště se pohybuje po dráze $\boldsymbol{r} = t^3\mathbf{j}$ (m,s) ? W =

TO 1.4.-6 *Jak velkou práci* vykoná síla $F = 2x$ (N,m) při přemístění tělesa z místa o souřadnici x_1 = 1 m do místa o souřadnici x_2 = 3 m ? W =

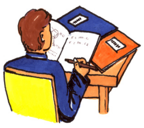


Vypočítejte práci nutnou k prodloužení pružiny o 10 cm. Tuhost pružiny je 500 N.m^{-1}.

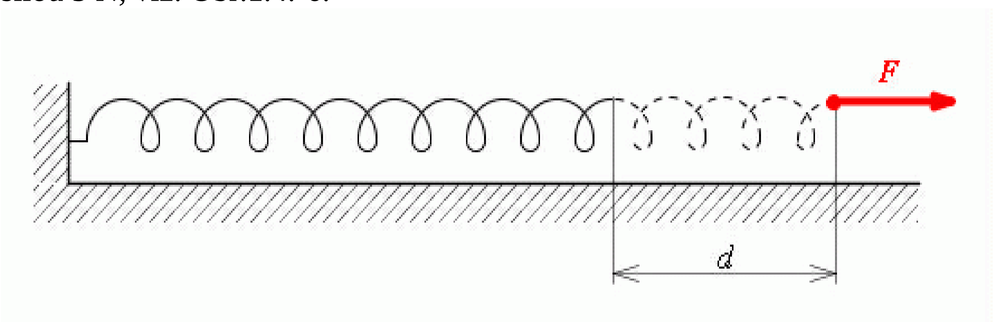
Tuhost pružiny vyjadřuje elastické vlastnosti pružiny. Tuhost pružiny k je konstanta úměrnosti mezi působící silou a délkou protažení pružiny. Kdo posilujete ruce s roztahovacími pružinami, víte že čím více pružiny roztahujete, tím větší sílu musíte vynaložit.

Při výpočtu vykonané práce nemůžeme přímo vyjít ze vztahu pro práci $W = F\, s \cos\alpha$. Tento vztah platí za podmínky, že síla po celé dráze zůstává konstantní. V našem případě síla se mění s délkou protažení x podle vztahu $F = k\,x$. Vyjdeme z obecného vztahu pro práci 1.4.-2. Protože síla působí ve směru dráhy (směr x), můžeme nahradit skalární součin síly a změny polohového vektoru $\boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ součinem jejich velikostí F dr. A jelikož síla působí ve směru dráhy ($\cos\alpha = 1$) dostaneme pro práci vztah:

$$W = \int_0^{0,1} kx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2 \Big|_0^{0,1} = \frac{1}{2}500\ 0{,}1^2 = 2{,}5\mathrm{N}$$



U 1.4.-5 Abychom pružinu udrželi protaženou o 10 cm, musíme na ni působit silou 5 N, viz. Obr.1.4.-6.



Obr.1.4.-6.

a) *Jaká je tuhost pružiny?* b) *Jak velkou práci konáme?*

1.4.2. Výkon

V současné civilizaci se pracovní síla hodnotí nejen podle množství odvedené práce, ale také za jakou dobu je provedena. Pracovníci se hodnotí podle jejich výkonu. **Výkon vyjadřuje jak rychle se určitá práce koná.** Ve fyzice se fyzikální veličina výkon definuje následovně:

Výkon P je podíl vykonané práce ΔW a doby Δt, za kterou byla tato práce vykonána.

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad 1.4.\text{-}3$$

Tímto vztahem jsme si definovali **průměrný výkon.**

A stejně jako v řadě předchozích případů budeme časový interval po který sledujeme velikost vykonané práce zmenšovat až na nekonečně malou hodnotu ($\Delta t \rightarrow \mathrm{d}t$), přejdeme na časovou derivaci práce – **okamžitý výkon**.

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \qquad 1.4.\text{-}4$$

Fyzikální veličina výkon je skalární veličina. Jednotkou výkonu je jeden watt (W). Z definičního vztahu pro výkon vyplývá, že 1 W = J/s = kg.m^2.s^{-2}.

Jednotka watt je poměrně malá jednotka. Zdvihneme-li kilogramové závaží do výšky jednoho metru za jednu sekundu, pracujeme s výkonem přibližně 10 W. V praxi se nejčastěji setkáte s výkony vyjadřovanými v kilowatech (kW). Slabší auta mají motor s výkonem 40 až 50 kW, silná ve stovkách kW. Hovoříme-li o výkonech elektráren, pak je vyjadřujeme v megawatech (MW).

Například při určování výkonu motoru auta, ale i jinde se můžete setkat se starší jednotkou nazývanou koňská síla HP (horse power). 1 HP = 0,746 kW $\approx$ ¾ kW.

Často potřebujeme určit okamžitý výkon třeba motoru auta v nějakém krátkém čase dt. V tomto případě dostačuje znát tažnou sílu motoru F a rychlost auta v. Uvažujme takto: za velmi krátkou dobu dt urazí těleso (auto) dráhu ds a bude mít okamžitou rychlost v = ds /dt. Tažná síla vykoná práci dW = F ds. Okamžitý výkon tedy bude:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{F\,\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = F\,v\,.$$

Toto ovšem platí v případě, že síla působí ve směru trajektorie a tedy rychlosti. Obecně však síla a rychlost mají různý směr (třeba při smyku auta). Pak okamžitá rychlost je dána vztahem $\boldsymbol{v}$ = d$\boldsymbol{r}$/dt. Okamžitý výkon teď bude vyjádřen jako

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{v} \qquad 1.4.\text{-}5$$

U řady elektrických spotřebičů jste se jistě setkali s pojmem podobným výkonu – příkonem. Touto veličinou vyjadřujeme, že dodáváme spotřebiči určitou energii ΔE za čas Δt. Pomocí těchto veličin definujeme příkon.

Podíl dodané energie dE a doby, po kterou energii dodáváme dt nazýváme příkon P_o.

$$P_o = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \qquad 1.4.\text{-}6$$

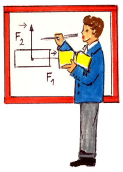
Jednotkou příkonu bude samozřejmě zase watt.

Máme-li tedy reálný spotřebič, například elektromotor, s příkonem 1 kW, pak se těžko veškerá dodaná energie spotřebuje na tzv. užitečný výkon P (výkon využitý pro požadovanou činnost). Bude to záviset na konstrukci elektromotoru, na kvalitě jeho provedení a řadě jiných parametrů. To jak velká část příkonu se využije ve formě užitečného výkonu, nám udává veličina nazývaná účinnost η (éta).

Účinnost η je podíl výkonu P a příkonu P_o.

$$\eta = \frac{P}{P_o} \qquad 1.4.\text{-}7$$

Účinnost je bezrozměrná veličina, násobíme-li ji stem, dostaneme účinnost v procentech.



Zásobník vody pro vodovod je na sloupu ve výšce 25 m nad povrchem vody v přehradě. *Kolik vody přečerpá čerpadlo* s příkonem 30 kW do zásobníku za 1 hodinu, je-li účinnost čerpadla 30 %? *Za jakou dobu se voda načerpaná do nádrže spotřebuje*, je-li spotřeba vody 10 l za sekundu? Změnu výšky hladiny v přehradě zanedbáváme.

Označíme si příkon čerpadla $P_o = 3.10^4$ W, jeho účinnost $\eta = 0{,}3$, objem, který odteče za 1 sekundu $V_s = 10$ l/s, čas čerpání $t = 1$ h = 3 600 s, výšku nad hladinou $h = 25$ m, hustota vody je $\rho = 1\,000$ kg.m^{-3}, hledaný objem bude V a hledaný čas t_1.

Výkon čerpacího zařízení je $P = \eta P_o$, práce vykonaná při přečerpávání vody za dobu t je $W = P\,t = \eta P_o t$. K přečerpání vody o objemu V a hustotě ρ do výšky h je nutné vykonat práci. Tato práce se projeví jako změna potenciální energie vody $E_p = m\,g\,h = V\rho g\,h$. Vykonaná práce je rovna změně energie.

$$\eta P_o t = V \rho g h.$$

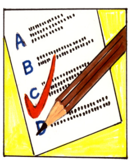
Z této rovnice určíme objem vyčerpané vody:

$$V = \frac{\eta P_o t}{\rho g h} = 0{,}3.3.10^4.3\,600/(10^3.10.25) = \underline{130 \text{ m}^3}$$

Doba, za kterou se voda o objemu V spotřebuje je

$$t_1 = V/V_s = 130/(10.10^{-3}) = 13\,000 \text{ s} = \underline{3{,}6 \text{ h}}.$$

Za 1 hodinu se do nádrže načerpá 130 m^3 vody, která se pak spotřebuje za 3,6 h.



TO 1.4. -7 *Jednotka W.s (wattsekunda) je jednotkou :*

a) výkonu b) práce c) energie d) impulzu síly

TO 1.4. -8 *Fyzikální veličina výkon je*:

a) vektor b) skalár

TO 1.4.-9 Vztahu *$P = W/t$ jako definice okamžitého výkonu* lze užít

a) zcela obecně

b) jen v případě, kdy práce roste lineárně s časem

c) jen v případě, kdy síla roste lineárně s časem

TO 1.4. -10 *Účinnost η je vždy*:

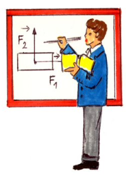
a) < 1 b) > 1 c) ≤ 1 d) ≥ 1

U 1.4. -6 Vzpěrač zvedl činku o hmotnosti 210 kg do výšky 2 m za 3 s. *Urči jeho průměrný výkon.*

U 1.4. -7 Sklep, jehož podlaha o ploše 50 m^2 je ve výšce 3 m pod úrovní okolí, zaplavila voda do výšky 80 cm. *Za jakou dobu vyčerpá tuto vodu čerpadlo* o příkonu 1 kW a účinnosti 75 %?

U 1.4.-8 Elektromotor s příkonem 1,2 kW vykoná za 1 minutu práci 60 kJ. *Jaká je jeho účinnost?*

U 1.4.-9 Běžně používanou praktickou jednotkou práce je kilowatthodina. *Kolik je to joulů?*



Na těleso působí konstantní síla 3 N. *Určete jeho výkon* v okamžiku, kdy je jeho rychlost 4 m/s.

Předpokládejme, že síla a rychlost tělesa mají stejný směr. Pak vyjdeme ze vztahu pro výkon $P = \mathrm{d}W/\mathrm{d}t$, do kterého dosadíme za diferenciál práce dW a upravíme

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{F\,\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = F\,v$$

Do tohoto vztahu dosadíme zadání a dostane pro okamžitý výkon hodnotu <u>12 W</u>.

U 1.4. -10 Na těleso působí konstantní síla 2 N. *Určete jeho výkon* v okamžiku, kdy je jeho rychlost 3 $m.s^{-1}$.

U 1.4.-11 *Jakou práci* vykonal motor auta tíhy 5.10^4 N, jestliže se zvýšila rychlost auta z 10 m/s na 20 m/s ? $W =$

1.4.3. Mechanická energie

Koná-li síla mechanickou práci přemísťováním tělesa, pak se výsledek této práce může projevit dvojím způsobem:

a) *<u>Těleso získá nebo změní svou rychlost</u>*. Vyjděme z následujícího příkladu. Tlačíme vozík hmotnosti m určitou konstantní silou F po vodorovné dráze délky s. Neuvažujme odporové síly. Vozík se bude pohybovat pohybem rovnoměrně zrychleným se zrychlením $a = \frac{F}{m}$ a za čas t získá rychlost $v = a\,t$. V tomto čase urazí vozík dráhu $s = \frac{1}{2} a\,t^2$. Práce vykonaná působící silou bude:

$$W = F\,s = m\,a\,\frac{1}{2}a\,t^2 = \frac{1}{2}m(a\,t)^2 = \frac{1}{2}m\,v^2 .$$

To byl zjednodušený příklad – síla byla konstantní a pohybovali jsme se po vodorovné dráze. Podívejme se na problém obecněji. Zase tlačíme vozík tentokrát proměnnou silou ***F*** po dráze charakterizované polohovým vektorem ***r***. Opět neuvažujme odporové síly.. Vykonaná práce bude dána vztahem 1.4.-2

$$W_{1,2} = \int_1^2 \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Uvažujme bez relativistických efektů – hmotnost bude konstantní. Volme případ, kdy síla bude působit vodorovným směrem po vodorovné dráze. Pak vztah pro práci můžeme upravit

$$W = \int \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}.\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int m\mathrm{d}\boldsymbol{v}.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \int m\mathrm{d}\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v} = \int m.\boldsymbol{v}.\mathrm{d}\boldsymbol{v}$$

V našem případě vektor rychlosti a vektor změny rychlosti mají stejný směr (vodorovný), pak můžeme jejich vektorový součin nahradit prostým součinem a integrovat. Dostaneme stejný výraz jako ve zjednodušeném přikladu

$$W = \int mv\mathrm{d}v = \frac{1}{2}m\,v^2$$

Takto „rozjetý“ vozík, který má „energii“, může tuto energii přeměnit zpět na práci. Tuto mechanickou energii označujme jako **kinetickou (pohybovou) energii tělesa** E_k**.** Kinetická energie je **skalární veličina.**

Kinetická energie E_k **tělesa je přímo úměrná jeho hmotnosti** m **a druhé mocnině jeho velikosti rychlosti** v**.**

$$E_k = \frac{1}{2}m\,v^2 \qquad 1.4.\text{-}8$$

Síla působící po dráze dodá tedy tělesu kinetickou energii. Proto kinetická energie bude mít stejnou jednotku jako práce. Jednotkou kinetické energie je joule.

b) *Těleso získá schopnost konat práci*.

V předešlé části pojednávající o kinetické energii jste se dověděli, že konáme-li práci, změní se kinetická energie hmotného objektu.

Tlačíme-li vozík do kopce (proti silám tíhového pole), vykonáme zase práci, ale vozík, přestaneme-li tlačit, se zastaví. Zatím co v prvním případě měl vozík schopnost se pohybovat – měl kinetickou energii, pak v tomto případě má zase vozík jinou schopnost – rozjede se zpátky a to pohybem zrychleným. Získal schopnost nám vynaloženou práci vrátit – získal **potenciální energii.** V tomto případě mluvíme o **tíhové potenciální energii** (někdy se jí nesprávně říká polohová) objektu (vozíku) hmotnosti m v poli tíhových sil (vnitřních sil tíhového pole).

Odbočme na chvíli a osvětleme si pojem vnitřní a vnější síla. **Vnitřní silou** rozumíme sílu, která je charakteristické pro dané pole, daný prostor. Tak vnitřní silou tíhového pole je tíhová síla, vnitřní silou elektrostatického pole je síla působící na náboj do pole vložený (Coulombova síla) atp. **Vnější silou** pak je síla, kterou na daný objekt působíme zvnějšku – síla, kterou přemisťujeme hmotný objekt v tíhovém poli nebo náboj v poli elektrostatickém.

Jiný příklad na potenciální energii. Stlačíme pružinu – vykonáme práci vnějšími silami proti elastickým (vnitřním) silám pružiny. Takto vynaložená práce se projeví schopností pružiny zase se rozvinout a vykonat práci třeba odtlačením nějakého předmětu, uvolněním ventilu apod. Pružina opět získala stlačením potenciální energii, tentokráte nazývanou **potenciální energie elastická** pružiny v poli elastických sil.

Teď jsme pořád hovořili o mechanické potenciální energii. Ale ještě jeden příklad. Vezměte si dva magnety. Ze střední školy víte, že okolo těchto magnetů vzniká magnetické pole, které se projevuje magnetickou silou působící na jiné magnety. Přibližujeme-li tyto dva magnety k sobě (při vhodné orientaci), pak musíme vyvinout sílu – konat práci. Ale magnety získávají schopnost vykonanou práci vrátit – získávají magnetickou potenciální energii – pustíme-li je, pak magnety od sebe odskočí. **Potenciální energie není jen mechanická, ale můžeme o ní hovořit i v souvislosti s jinými poli - elektrickým, magnetickým apod**.

Podívejme se nyní na tento problém z hlediska matematického. Nejdříve proberme **tíhovou potenciální energii**. Pro zjednodušení nebudeme tlačit vozík, ale zdvihat předmět tíhy *G* z výšky h_1 do výšky h_2 jak je vidět na Obr.1.4.-8.

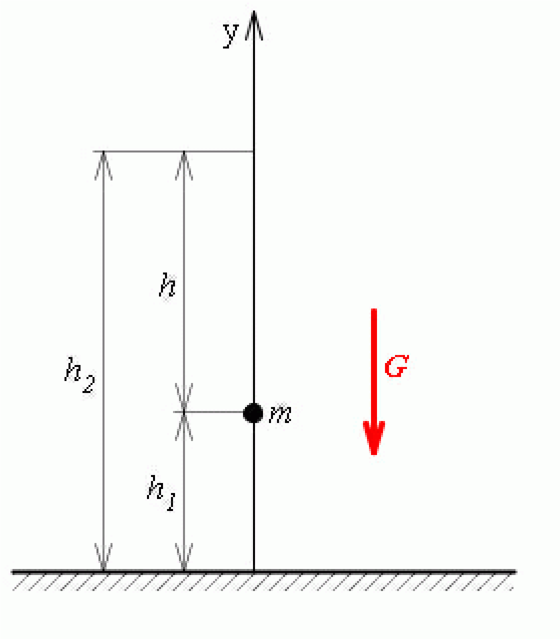
Vykonáme tedy práci *W* , která se projeví **změnou** tíhové potenciální energie ΔE_{pt} :

$$\Delta E_{pt} = W = -\int_{h_1}^{h_2} -G\,\mathrm{d}y = mg\,(h_2 - h_1),$$

položíme-li $(h_2 - h_1) = h$, dostáváme pro změnu potenciální tíhové energie objektu hmotnosti *m* v tíhovém poli vztah známý ze střední školy

$$\Delta E_{pt} = m\,g\,h. \qquad 1.4.\text{-}9$$

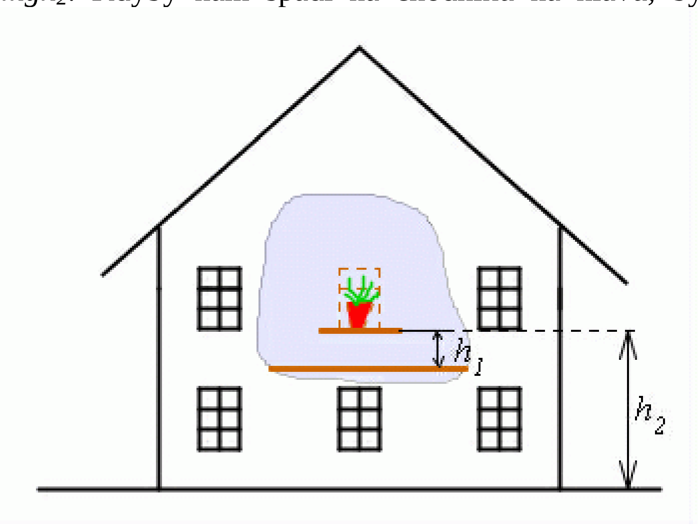
Pozor, jde o **změnu potenciální energie, ne o absolutní velikost**.



Obr.1.4.-8

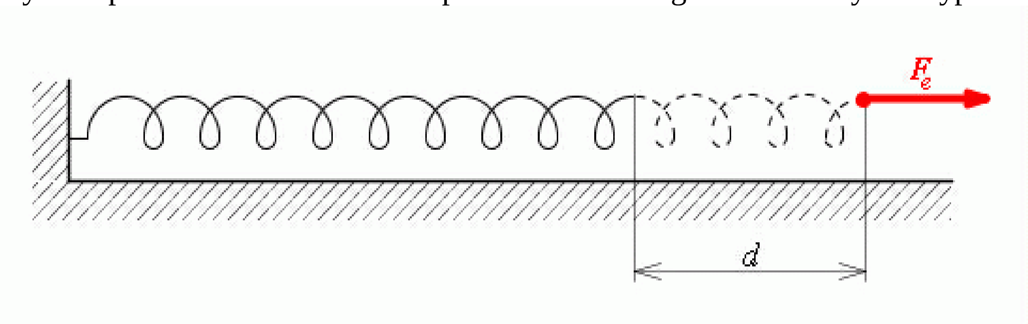
Dvě „mínus“ ve vztahu pro změnu potenciální energie mají následující význam: prvé mínus před integrálem znamená, že působíme **proti** vnitřním silám daného pole, tentokrát tíhového. Druhé mínus je pak proto, že směr tíhy *G* je opačný, než kladný směr osy y.

Ještě jedno upozornění. **Tíhová potenciální energie tělesa závisí na volbě vodorovné roviny**, **vůči které ji stanovujeme**. Proto je třeba si dát pozor na to vůči jaké rovině potenciální energii vztahujeme. Zase se podívejme na příklad a to na obrázku, viz. Obr.1.4.-10. Květináč stojící na okenním parapetu má potenciální energii vůči podlaze bytu mgh_1. Spadne-li nám na nohu v místnosti až tak moc se nestane. Potenciální energie květináče vůči Zemi je mgh_2. Kdyby nám spadl na chodníku na hlavu, byly by jeho účinky podstatně vážnější.



Obr.1.4.-10.

Jak to bude s pružinou a její elastickou potenciální energií? Stlačováním pružiny ve směru x konáme práci proti elastickým silám silou F_e = - k x, kde k je konstanta pružiny (Obr.1.4.-9). Výraz pro změnu elastické potenciální energie bude nyní vypadat následovně:



Obr.1.4.-9

$$\Delta E_{pe} = W = -\int_0^d -\mathrm{k}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{k}d^2. \qquad 1.4.\text{-}10$$

Potenciální energie pružnosti (elastická) je dána tuhostí pružiny k **a čtvercem deformační dráhy** ***d*****.**

Tuhost pružiny je materiálová konstanta, která vyjadřuje elastické vlastnosti pružiny a má jednotku N.m^{-1}.

A teď získané vztahy pro tíhovou potenciální energii a potenciální energii pružnosti zobecníme**.**

Změna potenciální energie bude dána záporně vzatým dráhovým integrálem vnitřních sil.

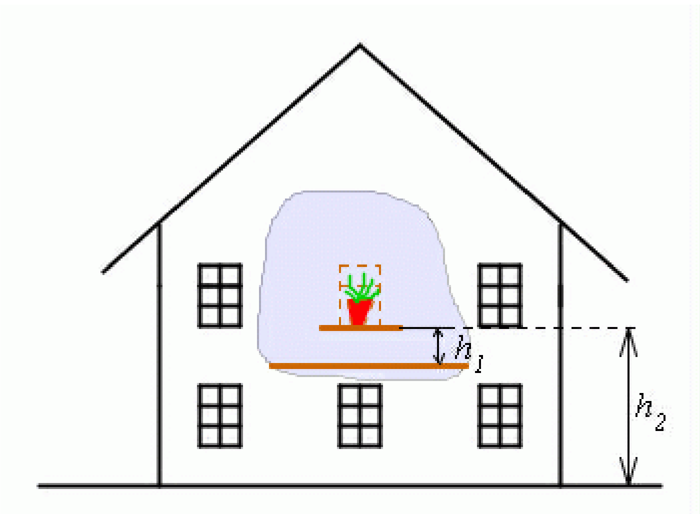
$$\Delta E_p = -\int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F}_i . \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad 1.4.\text{-}11$$

kde symbolem $\boldsymbol{F}_i$ jsme si označili **vnitřní síly** pole, ve kterém potenciální energii vyšetřujeme (tíhové, elastických sil, magnetické apod.).

Potenciální energie se opět vyjadřuje v jednotkách joule.

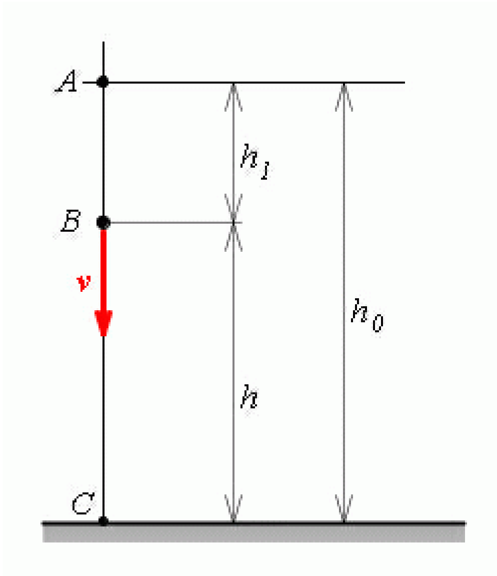
Tento vztah je zcela obecný a platí pro změnu potenciální energie v jakémkoliv poli charakterizovaném svými vnitřními silami.

Ale vraťme se ještě k příkladu padajícího květináče (Obr.1.4.10). Vysvětleme si, proč jsou účinky v obou případech různé. Necháme spadnout květináč z parapetu do místnosti. Květináč má tíhovou potenciální energii vůči podlaze mgh_1 a začne padat vlivem tíhové síly. Tíhová síla koná práci po délce h_1. Tato práce se změnila na kinetickou energii. Po dopadu na podlahu se celá tíhová potenciální energie přemění na kinetickou energii. Padá-li květináč z okna, opět se tíhová potenciální energie mění na



energii pohybovou. Teď však určujeme potenciální energii vůči Zemi, výška h_2 je podstatně větší než h_1. Potenciální energie květináče vůči Zemi je tedy také větší než vůči podlaze v místnosti. Protože se mění větší potenciální energie, bude i kinetické energie květináče větší. To znamená, že bude větší i jeho dopadová rychlost a s tím související jeho hybnost.

Na případu květináče jsme si vlastně vysvětlili důležitý fyzikální zákon, zákon zachování mechanické energie. Popišme si, co se vlastně děje při pádu květináče poněkud „fyzikálněji“.



Vyjdeme z obrázku Obr.1.4.-11. Tíhová potenciální energie E_{po} tělesa hmotnosti m je v bodě A rovna mgh_o (vůči Zemi). Je-li těleso v klidu, jeho kinetická energie je nulová $E_{ko} = 0$. V bodě B se potenciální energie snížila o mgh_1 na hodnotu mgh. Současně ale těleso získalo kinetickou energii $\frac{1}{2} mv^2$. A konečně ve spodním bodě C je potenciální energie tělesa nulová $E_p = 0$ a jeho kinetická energie je $E_k = \dfrac{1}{2} m\, v_k^2$.

Z předešlého si můžeme vyvodit závěr, že při volném pádu se celková mechanická energie tělesa podél celé trajektorie nemění. Dokonce lze experimenty dokázat, že platí obecnější **zákon zachování mechanické energie:**

Obr.1.4.-11

Při všech mechanických dějích se mění potenciální energie v kinetickou energii a naopak. Celková mechanická energie v izolované soustavě se zachovává.

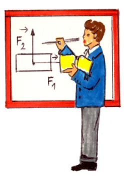
$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} =$ konst. 1.4.-12

Nebo jinak změna celkové potenciální energie v izolované soustavě je nulová.

$\Delta E = 0$

Je třeba zdůraznit, že **tento zákon platí pouze v izolované soustavě těles**. Nemohou zde působit síly zvnějšku. Například při volném pádu jsme neuvažovali odpor prostředí.

U příkladů na tyto problémy je často velice výhodné využít **zákona zachování mechanické energie** a uvědomit si, že práce se spotřebovává na změnu potenciální a kinetické mechanické energie a naopak. Názorně to ukazuje následující jednoduchý řešený příklad.



Těleso hmotnosti 1 kg padá z výšky 45 m. *Jaké budou potenciální a kinetická energie* a) na počátku pohybu, b) po jedné sekundě a c) po třech sekundách pádu?

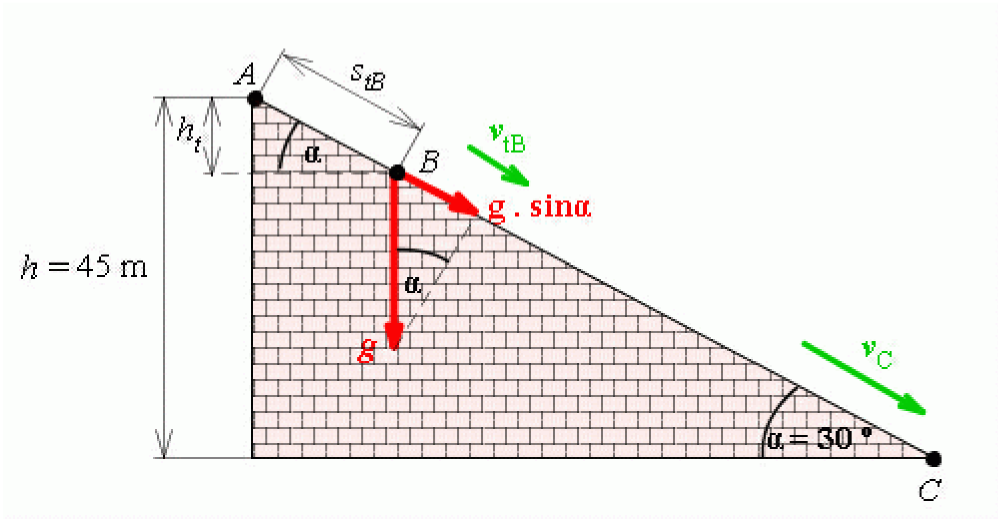
Označíme si hmotnost tělesa $m = 1$ kg, výšku $h = 45$ m, časy $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ s, $t_3 = 3$ s, hledáme energii kinetickou E_k a energii tíhovou potenciální E_p. Budeme počítat pro tíhové zrychlení $g = 10$ m.s^{-2}.

ad a) Ve výšce h bude mít těleso vůči povrchu Země potenciální energii $E_{po} = m\,g\,h = 1.10.45 = \underline{450\text{ J}}$. Předpokládáme, že těleso pouze upustíme, tedy jeho počáteční rychlost je nulová a tedy i kinetická energie bude nulová. Jeho celková energie je $E_c = E_{po} + E_{ko} = 450$ J.

ad b) Na konci prvé sekundy urazí těleso dráhu $s_1 = \frac{1}{2}\, g\, t_1^2 = 0{,}5.10.12 = 5$ m a bude mít rychlost $v_1 = g\, t_1 = 10.1 = 10$ m/s. Potenciální energie vůči povrchu Země tedy bude $E_p = m\, g\, (h - s_1) = 1.10.(45 - 5) = \underline{400\text{ J}}$. Kinetická energie bude $E_k = 0{,}5.m.v_1^2 = 0{,}5.1.10^2 = \underline{50\text{ J}}$. Součet obou energií je roven celkové energii a bude zase 450 J.

ad c) Na konci třetí sekundy urazí těleso dráhu s_3 = ½ $g\ t_3^2$ = 0,5.10.3^2 = 45 m a bude mít rychlost $v_3 = g\ t_3$ = 10.3 = 30 m/s. Potenciální energie vůči povrchu Země tedy bude $E_p = m\ g\ (h - s_3)$ = 1.10.(45 - 45) = <u>0 J</u>. Těleso v tomto okamžiku dopadne na povrch Země. Kinetická energie bude E_k = 0,5.m.v$_3^2$ = 0,5.1.30^2 = <u>450 J.</u>

Vraťme se ještě k tomuto řešenému příkladu. Poněkud si změníme situaci. Těleso <u>nepadá</u> z výšky 45 m, ale <u>klouže</u> z této výšky bez tření po nakloněné rovině se sklonem 30°, viz. Obr.1.4.-13.



Obr.1.4.-13

Zase budeme hledat potenciální tíhovou a kinetickou energii podél dráhy tělesa. Začneme v bodě *A*, tedy na počátku pohybu. Stejně jako v případu volného pádu, bude zde kinetická energie nulová E_{kA} = 0. Potenciální polohová energie zde bude maximální $E_{pA} = m\ g\ h$. Celková mechanická energie tělesa je $E_{cA} = E_{kA} + E_{pA} = m\ g\ h$.

Přejdeme do bodu *B* do kterého dorazí těleso za čas *t*. Energie počítáme úplně stejným způsobem jako v řešeném případě. Pouze si musíme uvědomit, že na nakloněné rovině způsobuje pohyb <u>jen složka</u> tíhové síly $F = F_G \sin\alpha = m\ g \sin\alpha$.

Za čas *t* urazí těleso dráhu s_{tB} = ½ $g \sin\alpha\ t^2$ a bude mít rychlost $v_{tB}= g \sin\alpha\ t$. V tomto čase bude potenciální energie tělesa $E_{pB} = m\ g\ h_t = m\ g\ (s_{tB} \sin\alpha)$. Dosadíme-li za dráhu s_{tB} , dostaneme pro potenciální tíhovou energii výraz $E_{pB} = m\ g\ h - m\ g$ ½ $g \sin\alpha\ t^2$.

Kinetická energie tělesa je E_{kB} = ½ $m\ v_{tB}^2$ = ½ $m\ (g \sin\alpha\ t)^2$ = ½ $m\ g^2 \sin^2\alpha\ t^2$. Sečteme-li teď obě mechanické energie v bodě *B*, dostaneme výraz $E_{cB} = E_{kB} + E_{pB} = m\ g\ h. = E_{cA}$.

A konečně se podívejme na koncový bod dráhy *C*. Potenciální energie tělesa vůči Zemi zde bude nulová E_{pC} = 0. Kinetická energie se vypočítá ze vztahu E_{kC} = ½ $m\ v_C^2$. Konečnou rychlost si musíme stanovit. Do vztahu pro rychlost potřebujeme znát čas, který těleso potřebuje k uražení celé dráhy. Čas si určíme právě ze známé dráhy s_C = ½ $(g \sin\alpha)\ t_C^2$. Z tohoto vztahu vyplývá pro hledaný čas vztah $t_C = \sqrt{\dfrac{2s_C}{g\sin\alpha}} = \sqrt{\dfrac{2h}{g\sin^2\alpha}}$. Dosadíme tento čas do rovnice pro rychlost $v_C = g\sin\alpha\sqrt{\dfrac{2h}{g\sin^2\alpha}}$, a rychlost pak do vztahu pro hledanou kinetickou energii. Po úpravě výsledného výrazu dostaneme zase $E_{kC} = m\ g\ h$. V dolním bodě dráhy je kinetická energie tělesa rovna potenciální energii na počátku dráhy $E_{kC} = E_{pA} = E_c$.

Proč jsme tak důkladně rozebírali tento příklad? Výpočty mechanických energií se zde prováděly pomocí vzorců z kinematiky. To vedlo ke zdlouhavým výpočtům. Pokud ale máme určit jen hodnoty energií, často dostačuje vycházet ze zákona zachování energie a výpočty se podstatně zjednoduší. Kdybychom měli například stanovit v našem případě konečnou rychlost v_C v bodě C. Vyjdeme ze zákona zachování energie, energie si stanovíme nahoře v bodě A a dole v bodě C. Bude platit $E_{cA} = E_{cC}$, tedy $m\, g\, h = ½\, m\, v_C^2$.

Vyjádříme si z této rovnice konečnou rychlost $v_C = \sqrt{2\, g\, h}$. Po dosazení $v_C = \sqrt{2.10.45} = 30\,\mathrm{m.s^{-1}}$.

Vraťme se k předchozím dvěma příkladům. Zopakujme si jaké problémy jsme řešili.

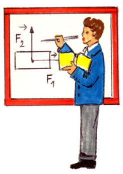
- Nejdříve jsme uvažovali volný pád tělesa a vyšetřovali jsme přeměnu jedné formy mechanické energie (potenciální tíhové) v druhou formu (kinetickou energii).

- V druhém případě se těleso pohybovalo po nakloněné rovině bez tření. Opět se původní tíhová potenciální energie měnila postupně v energii kinetickou.

V obou případech se jednalo o uzavřenou (izolovanou) soustavu skládající se ze Země a vyšetřovaného tělesa. Uvnitř soustavy působila tíhová síla **–vnitřní síla** soustavy. Na soustavu nepůsobily žádné **vnější síly** $\boldsymbol{F}_{ext}$. V našem případě vnějšími silami mohou být odporové síly jako je tření, odpor vzduchu apod.

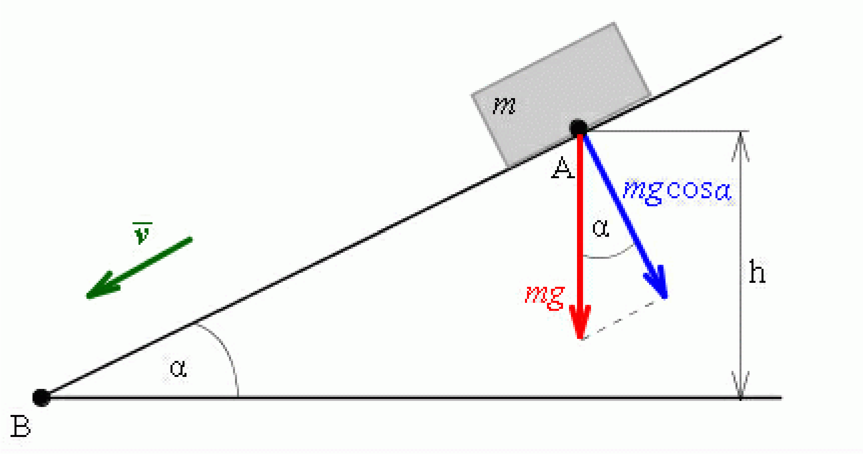
V této izolované soustavě platí: $E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$ = konst.. Matematické znění tohoto zákona zachování energie si můžeme také zapsat jako $\Delta E = 0$.

Ukažme si vliv vnějších sil na následujícím příkladu.



Z jaké výšky h se musí pohybovat těleso po nakloněné rovině s úhlem $\alpha = 30^{o}$ s koeficientem tření $f = 0{,}1$, aby na konec dospělo s rychlostí $v = 20\ \mathrm{m.s^{-1}}$?

Vyjdeme ze zákona zachování mechanické energie, pomůže nám Obr.1.4.-12. Nahoře v bodě, který si označíme A, má těleso hmotnosti m vzhledem k bodu B (konci nakloněné roviny), tíhovou potenciální energii E_{pA} rovnu $m\ g\ h$. Kinetickou energii tam nemá, těleso je v klidu, jeho celková energie je tedy rovna tíhové potenciální energii.



Obr.1.4.-12

Pokud bychom neuvažovali tření, pak tato celková energie v bodě B bude stejná, tentokráte ovšem rovna pouze energii pohybové E_{kB} (položili jsme si tíhovou potenciální energii v bodě B rovnu nule). Platí tedy zákon zachování mechanické energie $E_{pA} = E_{kB}$.

Ale v našem případě během pohybu tělesa po nakloněné rovině konají ještě třecí síly práci, která spotřebovává část celkové energie. Takže výsledná rovnice bude vypadat následovně:

$E_{pA} = E_{kB} + W$

Dosadíme-li jednotlivé výrazy:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg\cos\alpha\ f\frac{h}{\sin\alpha}.$$

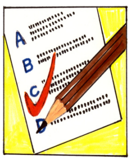
Výraz $mg\cos\alpha$ představuje složku tíhy tělesa vyvíjející kolmý tlak na nakloněnou rovinu. Vynásobíme-li tuto sílu koeficientem tření f, dostaneme třecí sílu, která působí ve směru nakloněné roviny. Abychom dostali práci třecích sil, je ještě nutné vynásobit třecí sílu délkou nakloněné roviny, po které se těleso přesunuje, má-li se dostat z výšky h dolů. To je poslední člen – zlomek rovnice.

V poslední rovnici je jedinou neznámou hledaná výška h. Vidíte, že hmotnost m se vykrátí a po vyjádření h z rovnice a po dosazení byste měli obdržet výsledek $\underline{h = 24{,}2\text{ m}}$.

V tomto příkladu jsme uvažovali, že na soustavu působí vnější síly. Tělesu brání ve volném pádu odporová síla vzduchu. Pohybuje-li se těleso po nakloněné rovině, pak působí třecí síla atp. To prakticky znamená, že například při pohybu po nakloněné rovině se část celkové energie soustavy spotřebuje na práci třecích sil, případně na práci nutnou k překonání odporu vzduchu. **Dochází ke změně celkové mechanické energie soustavy** $\Delta E \neq 0$.

Změna mechanické energie soustavy je dána prací vnějších sil.

$$\Delta E = \int F_{ext}.\mathrm{d}r = W_{ext}. \qquad 1.4.\text{-}13$$



TO 1.4.-11 Částice hmotnosti 2 g je přitahována ke středu souřadnic silou $F = -6y$. *Určete průběh její potenciální energie.* $E_p =$

a) $3y^2 + C$, C je integrační konstanta

b) $20y$

c) 0.02 J

d) $6y^2 + C$

e) $-0.012y$

TO 1.4.-12 Těleso hmotnosti m bylo vrženo v gravitačním poli Země svisle vzhůru počáteční rychlostí v_o. *V nejvyšším bodě své dráhy má těleso:*

a) jen energii kinetickou

b) jen energii potenciální

c) jak kinetickou, tak potenciální energii.

TO 1.4.-13 Těleso hmotnosti m bylo vrženo v gravitačním poli Země šikmo vzhůru počáteční rychlostí v_o pod elevačním úhlem α. *V nejvyšším bodě své dráhy má těleso:*

a) jen energii kinetickou

b) jen energii potenciální

c) jak kinetickou, tak potenciální energii.

TO 1.4.-14 Ve vagónu, který jede po přímé trati rychlostí 6 m/s, bylo vrženo ve směru jízdy těleso o hmotnosti 2 kg rychlostí 4 m/s vzhledem k vagónu. *Jakou kinetickou energii má těleso vzhledem k vagónu?*

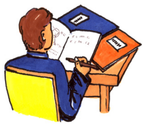
a) 32 J b) 16 J c) 8 J d) 4 J

TO 1.4.-15 Ve vagónu, který jede po přímé trati rychlostí 6 m/s, bylo vrženo ve směru jízdy těleso o hmotnosti 2 kg rychlostí 4 m/s vzhledem k vagónu. *Jakou kinetickou energii má těleso vzhledem k povrchu Země?*

a) 100 J b) 52 J c) 36 J d) 16 J

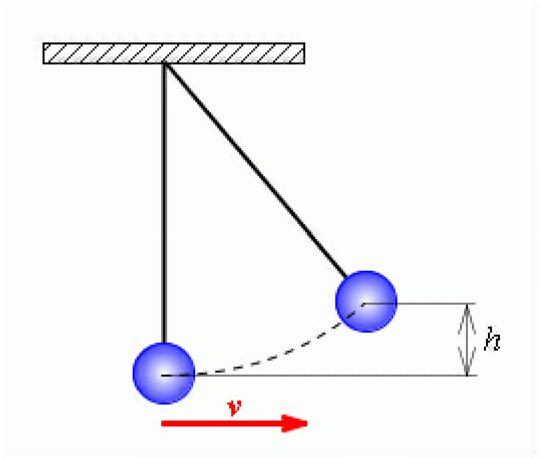
TO 1.4.-16 Vodorovná deska stolu je ve výšce 0,8 m nad podlahou místnosti. Na stole leží kulička o hmotnosti 0,2 kg. *Jakou tíhovou potenciální energii má kulička vzhledem k podlaze místnosti?* Počítejte s g = 10 m.s^{-2}.

a) 0,4 J b) 1,6 J d) 2 J d) 4 J



U 1.4.-12 Kámen tíhy 20 N byl vržen svisle vzhůru v gravitačním poli Země počáteční rychlostí 4 m/s. Odpor prostředí neuvažujeme. *Jak velkou energii má kámen* v nejvyšším bodě své dráhy?

U 1.4.-13 Kyvadlo prochází rovnovážnou polohou rychlostí *v*. Odpor prostředí neuvažujeme. *Do jaké výšky h vystoupí?*, viz. Obr.1.4.-14.



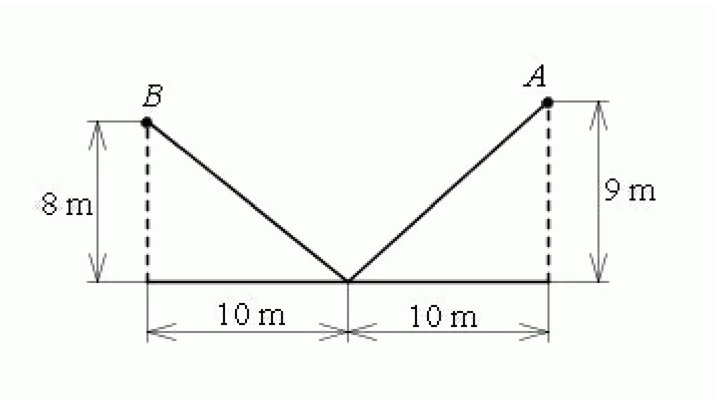
Obr.1.4.-14

U 1.4.-14 Kabina výtahu o hmotnosti 400 kg vyjede ze třetího do pátého poschodí. O jakou hodnotu se zvětší tíhová potenciální energie kabiny? Jakou užitečnou práci přitom vykoná motor výtahu? Výška jednoho poschodí je 5 m.

U 1.4.-15 Automobil jedoucí rychlostí 25 km/h zvětšil při výjezdu na dálnici rychlost na 75 km/h. *Kolikrát se zvětšila jeho kinetická energie?*

U 1.4.-16 Těleso o hmotnosti 10 kg je zvednuto do výšky 1 m nad stůl rovnoměrným pohybem po šikmé dráze, která svírá se svislým směrem úhel 60°. *Určete jakou polohovou energii těleso získá* vzhledem k vodorovné desce stolu.

U 1.4.-17 Těleso hmotnosti 100 kg je přeneseno z místa *A* do místa *B* po vyznačené dráze podle obrázku, viz. Obr.1.4.-15, neuvažujeme žádné odporové síly. *Jaká byla vykonána práce?*



Obr.1.4.-15

1. **Práce** vykonaná po dráze z bodu 1 do bodu 2 je dána určitým integrálem skalárního součinu síly $\boldsymbol{F}$ a diferenciálu polohového vektoru d$\boldsymbol{r}$ s mezemi danými body 1 a 2. Výsledkem skalárního součinu je skalár. $W_{1,2} = \int_1^2 \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Jednotkou práce je joule, J = kg.m^2.s^{-2}.

2. Mechanickou práci můžeme určovat graficky z diagramu F = f(s).

3. **Výkon** vyjadřuje „jak rychle se práce koná“.

4. Výkon P je podíl vykonané práce dW a doby dt , za kterou byla vykonána. $P = \dfrac{\mathrm{d}\,W}{\mathrm{d}\,t}$.
Jednotkou výkonu je watt, W = J/s = kg.m^2.s^{-2}.

5. **Okamžitý výkon** je možné vyjádřit pomocí působící síly F a získané rychlosti v. $P = F\,v$.

6. **Příkon** P_o je podíl dodané energie $\Delta\, E$ a doby $\Delta\, t$ po kterou energii dodáváme. $P_o = \dfrac{\Delta\, E}{\Delta\, t}$.

7. **Účinnost** η je podíl výkonu P a příkonu P_o. $\eta = \dfrac{P}{P_o}$ **.** Účinnost je bezrozměrná veličina**.**

8. **Kinetická energie** E_k tělesa je přímo úměrná jeho hmotnosti m a druhé mocnině jeho rychlosti v. $E_k = \dfrac{1}{2} m\, v^2$**.** Jednotkou je joule.

9. **Tíhová potenciální energie** E_p tělesa hmotnosti m ve výšce h nad povrchem Země je přímo úměrná jeho hmotnosti, tíhovému zrychlení g a výšce h. $E_p = m\, g\, h$. Jednotkou je joule.

10. Tíhová potenciální energie tělesa **závisí na volbě vodorovné roviny**, vůči které ji stanovujeme.

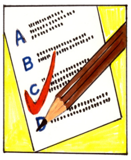
11. **Potenciální energie pružnosti** je dána tuhostí pružiny k a čtvercem deformační dráhy s. $E_p = \dfrac{1}{2} k\, s^2$**.**

12. **Změna potenciální energie** <u>**obecně**</u> je dána záporně vzatým dráhovým integrálem vnitřních sil. $\Delta E_p = -\int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F_i}.\mathrm{d}\boldsymbol{r}$

13. Při všech mechanických dějích se mění potenciální energie v kinetickou energii a naopak. **Celková mechanická energie v izolované soustavě se zachovává.** $E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} =$ konst.

14. **Změna mechanické energie soustavy je dána prací vnějších sil.** $\Delta E = F_{ext}\, s = W_{ext}$.

Klíč



TO 1.4.-1 a) $\cos 0^{o} = 1$

TO 1.4.-2 c) $\cos 90^{o} = 0$

TO 1.4.-3 b), d)

TO 1.4.-4 50N

TO 1.4.-5 8J

TO 1.4.-6 8J

TO 1.4.-7 b), c). Je to vlastně joule. W = J/s → J = W.s

TO 1.4.-8 b) .

TO 1.4.-9 b)

TO 1.4.-10 a)

TO 1.4.-11 a)

TO 1.4.-12 b). V nejvyšším bodě dráhy se těleso zastaví (v = 0) než začne padat.

TO 1.4.-13 c). Těleso bude jednak na nejvyšším bodě své dráhy, tedy bude mít potenciální energii. Bude se také pohybovat vpřed, tedy bude mít energii kinetickou

TO 1.4.-14 b). Počítáme ze vztahu pro kinetickou energii, rychlostí je rychlost tělesa vzhledem k vagónu.

TO 1.4.-15 a) . Počítáme ze vztahu pro kinetickou energii, rychlostí je součet rychlostí tělesa vzhledem k vagónu a pohybu vagónu.

TO 1.4.-16 b). Počítáme ze vztahu $E_p = m\,g\,h$

TO 1.4.-17 Po nakloněné rovině s úhlem α se začne pohybovat těleso směrem dolů

s počáteční rychlostí v_0. Součinitel smykového tření je f. Aby se počáteční kinetická energie tělesa rovnala jeho kinetické energii v koncovém bodě, tj. po uražení dráhy s, musí platit :

a) $1/2\, v_0^{2} = s\, g\, f \cos\alpha$

U 1.4.-1 $kg.m^{2}.s^{-2}$. Vyjdeme ze vztahu $W = F\, s \cos\alpha$

U 1.4.-2 a) 78,5 N. Síla musí překonat po dráze 1 m tíhovou sílu $m\,g$.

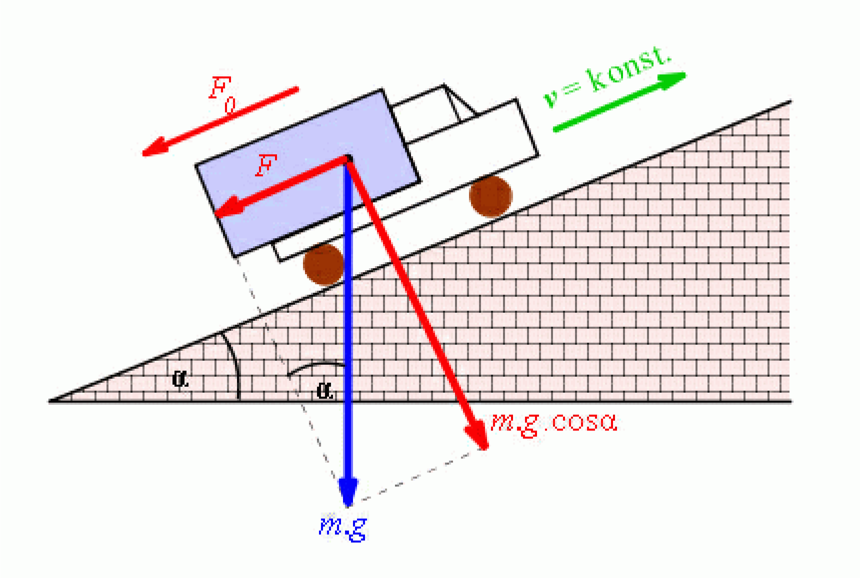
b) 0 N. Síla nepůsobí po dráze.

c) 0 N. Zanedbáme-li odpor prostředí nepůsobí nám ve směru pohybu žádná síla.

U 1.4.-3 a) 60 kJ, b) 30 kJ

U 1.4.-4 7,06 MJ. Nejdříve vypočítáme sílu motoru, která udržuje rovnoměrný pohyb automobilu. Ta musí být právě tak veliká, ale opačného směru než je síla odporu $F_o = f\,m\,g$

cosα a složka tíhy působící proti pohybu $F = m\,g\,\sin\alpha$. Pak vynásobíme dráhou.(Obr.1.4.-7)



Obr.1.4.-7

U 1.4.-5 a) 500 N.m^{-1}. Vycházíme ze vztahu $F = kd$

b) OJ. Práce se nekoná, nepůsobíme silou po dráze.

U 1.4.-6 1,37 kW. $\dfrac{m\,g\,h}{t}$

U 1.4.-7 26 min. Počítáme z práce, která je rovna změně potenciální energie vody po vyčerpání $\Delta W = S\,d\,\rho\,g\,h$,z definice účinnosti $\eta = \dfrac{\Delta W}{P}$ a definice výkonu $P = \dfrac{\Delta W}{t}$.

U 1.4.-8 0,83, tj. 83%. Vyjdeme z definice účinnosti: $\eta = \dfrac{P}{P_o} = \dfrac{\frac{W}{t}}{P_o}$.

U 1.4.-9 3,6 MJ. 1 kWh = 10^3. 3600 = $3{,}6.10^6$ J = 3,6 MJ

U 1.4.-10 6 W . $P = F\,v$

U 1.4.-11 7,5.10^5 J, Vycházíme z definice práce

$$W = \int F\,\mathrm{d}r = \int m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}r = \int m\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\frac{G}{g}m\Delta v^2$$

U 1.4.-12 15,3 N. Vycházíme ze zákona zachování mechanické energie. Kinetická energie vrženého kamene ½ $G/g\ v^2$ se bude rovnat hledané energii potenciální v horním bodě jeho dráhy. V tomto bodě bude jeho kinetická energie nulová

U 1.4.-13 $v^2/2g$. Vycházíme ze zákona zachování mechanické energie. ½ $m\,v^2 = m\,g\,h$.

U 1.4.-14 39,2 kJ, 39,2 kJ. Počítáme ze vztahu $\Delta E_p = m\,g\,\Delta h$. Změna potenciální energie je rovna vykonané práci motorem.

U 1.4.-15 9 krát. Rychlost se zvětšila 3 krát. Protože rychlost je ve vztahu pro kinetickou energii na druhou, pak za jinak stejných podmínek se musela kinetická energie zvětšit $3^2 = 9$.

U 1.4.-16 98,1 J. Počítáme ze vztahu $\Delta E_p = m\ g\ \Delta h$. Nezáleží na tom, po jaké dráze jsme se pohybovali, podstatný je rozdíl výšek.

U 1.4.-17 981 J. Práce musela být vynaložena pouze na překonání výškového rozdílu 1 m.