1.5. Gravitační pole

Není třeba na úvod této kapitoly uvádět praktický příklad působení gravitace na hmotná tělesa. Každý jsme již upadli, nebo nám něco spadlo na zem.

Této problematiky jsme se již dotkli v dynamice, hlavně v kapitole tíhová síla a tíha tělesa. V následující kapitole se na příčinu našich „pádů“ podíváme podrobněji.

1. Osvojit si poznatek o vzájemném přitahování hmotných objektů.
2. Umět definovat gravitační pole
3. . Znát vztah pro velikost gravitační síly.
4. Umět vypočítat gravitační síly i jiných polí než v gravitačním poli Země.Formulovat Newtonův gravitační zákon ve vektorovém tvaru.
5. Definovat intenzitu a potenciál daného místa gravitačního pole.
6. Vysvětlit pojem ekvipotenciálních hladin.
7. Znát matematickou souvislost mezi intenzitou a potenciálem, vysvětlit fyzikální význam gradientu.
8. Vědět, že gravitační síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}$ uděluje tělesům v okolí Země zrychlení $\boldsymbol{a}_{\mathrm{g}}$.
9. Znát vztah pro velikost gravitačního zrychlení.
10. Znát přibližnou hodnotu gravitačního zrychlení na povrchu Země.
11. Umět vypočítat a_{g} a F_{g} v dané výšce h nad povrchem Země.
12. Rozlišit gravitační a tíhovou sílu, zdůvodnit čím se liší.
13. Vědět, že tíhová síla uděluje tělesům při povrchu Země zrychlení tíhové zrychlení $\boldsymbol{g}$.
14. Vědět, proč velikost tíhového zrychlení závisí na zeměpisné šířce a nadmořské výšce.
15. Osvojit si poznatek, že volný pád je pohyb v homogenním tíhovém poli Země s nulovou počáteční rychlostí.
16. Vědět, že vrhy těles jsou pohyby složené z rovnoměrného přímočarého pohybu rychlostí v_0 a volného pádu.
17. Rozlišit podle směru počáteční rychlosti vrh svislý vzhůru (dolů), vodorovný a šikmý.
18. Vědět, jak závisí tvar trajektorie satelitu na jeho počáteční rychlosti.
19. Umět vypočítat první kosmickou rychlost.
20. Znát slovní formulace tří Keplerových zákonů.

1.5.1. Newtonův gravitační zákon

Dříve, než si vyslovíme Newtonův gravitační zákon si musíme vysvětlit pojem gravitační síla a gravitační pole.

Z vlastní zkušenosti víme, že všechna hmotná tělesa jsou přitahována Zemí. Na tato tělesa působí Země **gravitační silou** $\boldsymbol{F_g}$**.** Prosím nezaměňovat s tíhovou silou $\boldsymbol{F}_G$, rozdíl si vysvětlíme dále. Důležité je, že gravitační síla působí na všechna hmotná tělesa na i nad povrchem Země. V okolí Země existuje gravitační pole.

Gravitační pole tělesa je prostor v jeho okolí, ve kterém se projevují účinky gravitační síly F_g na jiná hmotná tělesa.

Gravitační pole Země samozřejmě není jediným existujícím gravitačním polem. Své gravitační pole má Měsíc, Slunce, ale i člověk nebo dřevěná bedna zkrátka každé hmotné těleso.

Jsme-li v gravitačním poli Země, je současně i Země v našem gravitačním poli. Působí-li Země na nás gravitační silou, působíme i my na Zemi gravitační silou a to stejně velikou. (Newtonův zákon akce a reakce). **Gravitační silové působení mezi tělesy je vzájemné**.

Vzájemné gravitační působení se uskutečňuje pomocí hypotetických částic zvaných **gravitony**. Představa fyziků je taková, že každý hmotný objekt stále vysílá do svého okolí a tedy i k druhému hmotnému objektu gravitony a na druhé straně pohlcuje ty gravitony které přicházejí od druhého objektu.

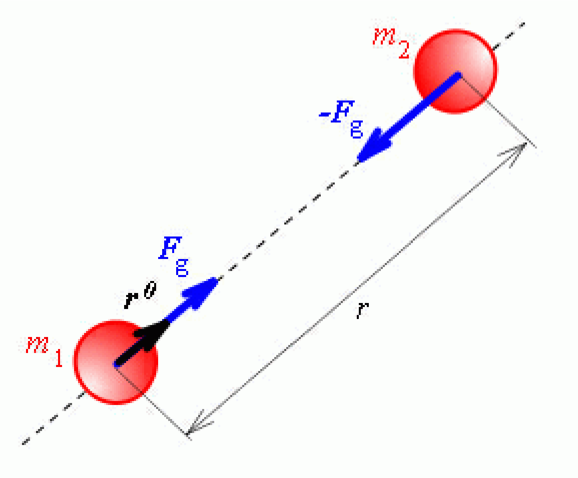
Takže jsme si řekli, co je to gravitační pole, co je gravitační síla a teď nezbývá než si velikost této síly vyjádřit. To už provedl před staletími Isaac Newton, když vyslovil **Newtonův gravitační zákon.**

Dvě tělesa se vzájemně přitahují gravitační silou F_g, jejíž velikost je přímo úměrná součinu jejich hmotností m_1, m_2 a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzdálenosti r.(Obr.1.5.-1)

$$F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad 1.5.\text{-}1$$

Konstanta úměrnosti κ (kappa) je **gravitační konstanta** a má hodnotu $\kappa = 6{,}67.10^{-11}\ \mathrm{N.m^2.kg^{-2}}$.

Gravitační konstanta je univerzální konstanta platná v celém Vesmíru. Tato konstanta nezávisí na prostředí v okolí tělesa, jehož působení sledujeme.



Obr.1.5.-1

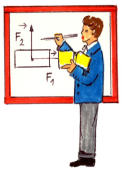
Vztah 1.5.-1 vyjadřuje pouze velikost gravitační síly. Ale i gravitační síla jako každá jiná má i svůj směr. To vystihuje **Newtonův gravitační zákon ve vektorovém tvaru**:

Směr si vyjádříme pomocí jednotkového vektoru $\boldsymbol{r}^o$ (Obr.1.5.-1), který má jednotkovou velikost a leží na spojnici obou na sebe působících hmotností:

$$\boldsymbol{F}_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}\boldsymbol{r}^o \qquad 1.5.\text{-}2$$

Gravitační síla F_g mezi dvěma tělesy se nezmění, i když v okolí obou těles budou jiné hmotné objekty. Stejná gravitační síla na nás působí venku na chodníku, ale i uvnitř uzavřeného masivního betonového bunkru.

A ještě jeden fakt si musíme zdůraznit. Ačkoliv Newtonův gravitační zákon platí přesně jen pro hmotné body, můžeme ho použít i na reálné předměty. Vzdáleností r je v tomto případě vzdálenost jejich středů.



Vypočítejte, *jakou gravitační silou se přitahují* a) dva lidé o hmotnostech 80 kg, b) Země a Měsíc.

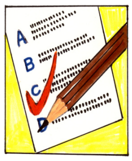
Ad a) Dosadíme do gravitačního zákona. Protože směr gravitační síly je zřejmý, použijeme skalárního zápisu – vztah 1.5.-1.

$F_g = \kappa \dfrac{m_1\ m_2}{r^2} = 6{,}67.10^{-11}\dfrac{80.80}{1^2} = 4{,}2.10^{-7}$ N. To je prakticky nezměřitelná síla.

Ad b) Opět dosadíme do gravitačního zákona

$F_g = \kappa \dfrac{m_1\ m_2}{r^2} = 6{,}67.10^{-11}\dfrac{6.10^{24}.7{,}4.10^{22}}{\left(3{,}8.10^{8}\right)^2} = 2.10^{20}$ N. To odpovídá přibližně tíze 1000000000000 letadlových lodí o výtlaku 20 000 tun.

Řešeným příkladem jsme chtěli ukázat, že gravitační síla se prakticky projevuje pouze u těles velkých hmotností.



TO 1.5.-1 Dva hmotné body, z nichž každý má hmotnost *m*, se vzájemně přitahují ze vzdálenosti *r* silou 36 N. *Jak velkou silou se tyto body přitahují* ze vzdálenosti *r*/2 ?

TO 1.5.-2 Dva hmotné body, z nichž každý má hmotnost *m*, se vzájemně přitahují ze vzdálenosti *r* silou 36 N. *Jak velkou silou se tyto body přitahují*, změní-li se hmotnost každého z nich na 2 *m*?

U 1.5.-1 Satelit obíhá kolem Země po kruhové dráze o poloměru $6{,}6.10^3$ km měřeno od jejího středu. *Jakou musí mít rychlost* aby se na této dráze udržel? Počítejte s hmotností Země 6.10^{24} kg.

U 1.5.-2 *Jak velkou silou působí Měsíc* na 1 m^3 mořské vody o hustotě 1 030 $kg.m^{-3}$? *Které jevy* v důsledku tohoto působení Měsíce *pozorujeme*?

1.5.2. Intenzita a potenciál gravitačního pole

K popisu gravitačního pole slouží ještě další veličiny. Pomocí gravitační síly $\boldsymbol{F_g}$ můžeme definovat každý bod gravitačního pole, ale současně musíme uvést ještě jeden údaj a to velikost hmotnosti *m*, na kterou v dotyčném místě gravitační síla působí. Tak k úplnému definování pole v daném místě potřebujeme dva údaje.

Zavedeme si tedy novou veličinu **intenzitu gravitačního pole** jako gravitační sílu na jednotkovou hmotnost.

$$\boldsymbol{K} = \frac{\boldsymbol{F}_g}{m} \quad [N.kg^{-1} = m.s^{-2}] \qquad 1.5.\text{-}3$$

Pomocí této veličiny již definujeme gravitační pole jednoznačně. Směr intenzity gravitačního pole je stejný jako směr gravitační síly. To jsme pořád hovořili o **vektorovém popisu pole.**

Podobně je to také se **skalárním popisem pole**. Každý bod gravitačního pole můžeme definovat (popsat) pomocí skalární veličiny potenciální energie gravitačního pole E_{pg}. Ale máme tu zase stejný problém. Musíme uvést nejen velikost potenciální energie v daném místě, ale také říci, že se jedná o potenciální energii objektu hmotnosti *m*.

Řešení tohoto problému je stejné jako u vektorového popisu. Zavedeme si novou veličinu **potenciál gravitačního pole** jako potenciální energii jednotkové hmotnosti pomocí následujícího vztahu:

$$V_g = \frac{E_{pg}}{m} \quad [\mathrm{J.kg^{-1} = m^2.s^{-2}}] \qquad 1.5.\text{-}4$$

Mohu teď jednoznačně popsat gravitační pole pomocí skalární veličiny - potenciálu.

U gravitačního pole bude vztah pro změnu potenciálu velmi jednoduchý. Vzpomeňte si, vyjadřovali jsme si změnu potenciální energie tíhového pole výrazem $\Delta E_{pt} = mgh$. Pro gravitační pole – pole gravitačních sil $F_g = ma_g$ bude změna gravitační potenciální energie dána vztahem $\Delta E_{pg} = ma_g h$, kde a_g je gravitační zrychlení. Podělíme-li tento vztah hmotností, dostaneme pro změnu potenciálu gravitačního pole vztah

$\Delta V_g = a_g h.$

O gravitačním zrychlení a_g bude pojednáno v následující kapitole.

Vyjádříme si změnu potenciálu ještě jinak. Vztah 1.5.-4 si přepíšeme pro změnu potenciálu.

$$\Delta V_g = \frac{\Delta E_{pg}}{m}.$$

Dosaďme do tohoto vztahu z obecného vztahu pro změnu potenciální energie (vztah 1.4.-11):

$$\Delta V_g = \frac{-\int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F}_i . \mathrm{d}\boldsymbol{r}}{m}.$$

Ale podíl vnitřní síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{i}$, pořád hovoříme ještě o gravitačním poli – tedy síly gravitační $\boldsymbol{F}_\mathrm{g}$, a hmotnosti m je intenzita gravitačního pole $\boldsymbol{K}$. Vztah tedy přepíšeme do tvaru:

$$\Delta V_{\boldsymbol{g}} = \frac{-\int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F_g} . \mathrm{d}\boldsymbol{r}}{m} = -\int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{K} . \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$\Delta V_{\boldsymbol{g}} = -\int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{K} . \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \qquad 1.5.\text{-}5$$

Tento vztah ukazuje **souvislost mezi vektorovým popisem pole** pomocí intenzity pole $\boldsymbol{K}$ a **skalárním popisem** pomocí potenciálu pole V_g. Vztah platí pro jakékoliv pole (gravitační, elektrické, magnetické atp.).

Ještě vhodnější je zápis v diferenciálním tvaru:

$$\boxed{\mathrm{d}V_g = -\boldsymbol{K} . \mathrm{d}\boldsymbol{r}}. \qquad 1.5.\text{-}6$$

Máme-li tedy pole charakterizováno v každém bodě intenzitou pole, můžeme pomocí matematické operace získat popis pomocí skalární veličiny potenciálu.

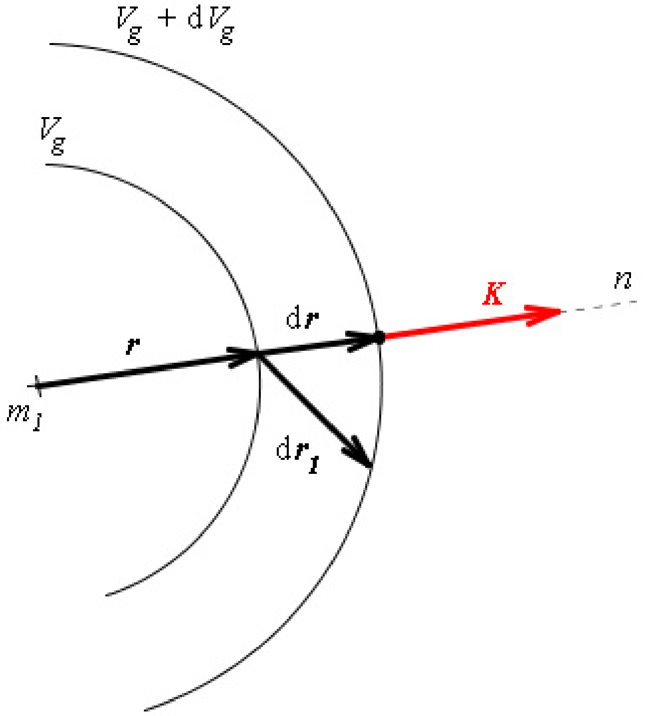
A teď bude nutné si troch osvěžit, co víte z matematiky. Nalistujte si pojem gradient skalární veličiny a zjistíte, že se dá krásně aplikovat na náš problém. Můžeme při znalosti průběhu skaláru (potenciálu) matematickou operací vypočítat průběh vektorové veličiny (intenzity).

Vyjdeme z přepisu vztahu 1.5.-6 do tvaru $\mathrm{d}V_g = -\boldsymbol{K}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} . \boldsymbol{r}^o$ a vyjádříme si z něj vektor intenzity

$$\boldsymbol{K} = \frac{\mathrm{d}V_g}{\mathrm{d}r}.\boldsymbol{r}^o$$

Tento vztah je zjednodušený vztah obecného zápisu

$$\boldsymbol{K} = -gradV_g \qquad 1.5.\text{-}7$$



Obr. 1.5.-2

Vztah mezi intenzitou a potenciálem lépe pochopíte z grafického vyjádření. Na Obr. 1.5.-2 máte nakresleny řezy místy stejného potenciálu V, kterým říkáme **ekvipotenciální hladiny**. Co bude ekvipotenciální hladinou v případě pole v okolí hmotného bodu hmotnosti m_1?

Vyjdeme z definičního vztahu pro potenciál a upravíme si jej pomocí Newtonova gravitačního zákona

$$V_g = \frac{-\int \boldsymbol{F}_g.\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{m} = \frac{-\int \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}\boldsymbol{r}^o.\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{m_2} = -\int \kappa \frac{m_1}{r^2}\boldsymbol{r}^o.\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\kappa \frac{m_1}{r} \qquad 1.5.\text{-}8$$

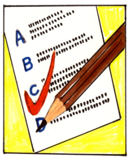
Velikost potenciálu bude záviset na konstantě κ, velikost hmotnost m_1, která gravitační pole vyvolává a na vzdálenost od zdroje pole r. Pro stejnou vzdálenost r bude potenciál stejný – ekvipotenciální plochou v tomto případě bude tedy povrch koule o poloměru r.

Důležitý je poznatek, že **při přemisťování jiné hmotnosti po ekvipotenciální hladině se nekoná práce.** Lehce si to zdůvodníte dosazením do vztahu pro práci 1.4.-2 $W_{1,2} = \int_1^2 \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ dosazením za sílu z Newtonova gravitačního zákona. V našem případě vektor změny d$\boldsymbol{r}$ a jednotkový vektor $\boldsymbol{r}^0$ jsou na sebe kolmé a skalární součin je tedy roven nule.

Ale vraťme se ještě k obrázku Obr. 1.5.-2. Přemisťujme tedy jednotkovou hmotnost nejdříve po ekvipotenciální hladině s velikostí potenciálu V_g. Protože se pohybujeme po ekvipotenciální hladině, práce se nekoná.

Teď přemisťujme jednotkovou hmotnost ve směru v obrázku označeném jako d$\boldsymbol{r}_1$. Vykonaná elementární práce bude dána vztahem $-\boldsymbol{K}.\ \boldsymbol{r} = \mathrm{d}V_g$. Místo síly $\boldsymbol{F}_g$ je zde intenzita $\boldsymbol{K}$ protože přemisťujeme jednotkovou hmotnost.

A teď přemisťujme zase jednotkovou hmotnost, opět z hladiny V_g na hladinu V_g +d V_g ale ve směru normály n (vektor d$\boldsymbol{r}$) – ve směru intenzity $\boldsymbol{K}$. Velikost vykonané práce bude stejná, ale účinnost bude maximální. To je význam funkce gradient aplikované v rovnici 1.5.-7.



TO 1.5.-3 Na těleso hmotnosti m působí gravitační pole silou $\boldsymbol{F}_g$. *Intenzita* tohoto gravitačního pole $\boldsymbol{K}$ v daném bodě prostoru *je vektor* $\boldsymbol{K}$ =

a) $\boldsymbol{F}_g/m$

b) $\boldsymbol{F}_g\, m$

c) $\boldsymbol{F}_g\, g$

d) $\kappa\, \boldsymbol{g}$

TO 1.5.-4 V gravitačním poli uvažujte dva body A,B. V bodě A působí na těleso hmotnosti 3 kg gravitační síla 30 N, v bodě B působí na těleso hmotnosti 2 kg gravitační síla 40 N. *Co platí o velikostech intenzit* K_A a K_B v bodech A a B ?

a) $K_A = K_B$

b) $K_A > K_B$

c) $K_A < K_B$

TO 1.5.-5 Víte, že intenzita gravitačního pole Země ve vzdálenosti r od jejího středu je $\boldsymbol{K}$ = $(-\,\kappa\, M_Z/r^2).\boldsymbol{r}^0$, kde M_Z je hmotnost Země. *Vypočítejte potenciál* v témže místě. V =

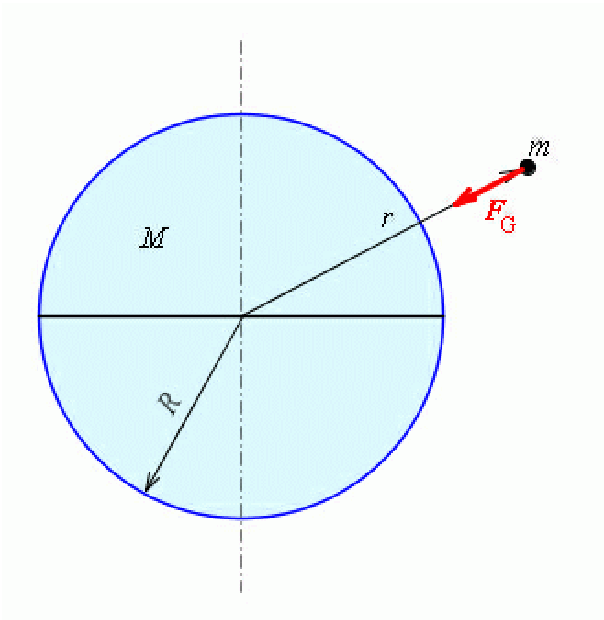
TO 1.5-6 Těleso hmotnosti 2 kg má v určitém bodě gravitačního pole potenciální energii 10 J. *Vypočítejte potenciál* tohoto gravitačního pole v daném bodě. V =

1.5.3. Gravitace v okolí Země

Zjednodušíme si situaci. Předpokládejme, že Země je homogenní koule o hmotnosti M a poloměru R = 6 371 km. Pak Newtonův gravitační zákon přepíšeme do tvaru :

$$F_g = \kappa \frac{M\, m}{r^2}. \qquad 1.5.\text{-}9$$

Tento vztah určuje gravitační sílu, kterou Země působí na těleso hmotnosti m ve vzdálenosti $r \geq R$ od středu Země viz Obr.1.5.-3.



. Obr.1.5.-3

Použijeme-li Newtonův zákon síly $F = ma$, můžeme napsat pro gravitační sílu vztah $F_g = m\, a_g$. Symbolem a_g jsme si označili **gravitační zrychlení.** Dosadíme-li do tohoto vztahu za gravitační sílu z gravitačního zákona, dostaneme pro gravitační zrychlení výraz:

$$a_g = \kappa \frac{M}{r^2} \,. \qquad 1.5.\text{-}10$$

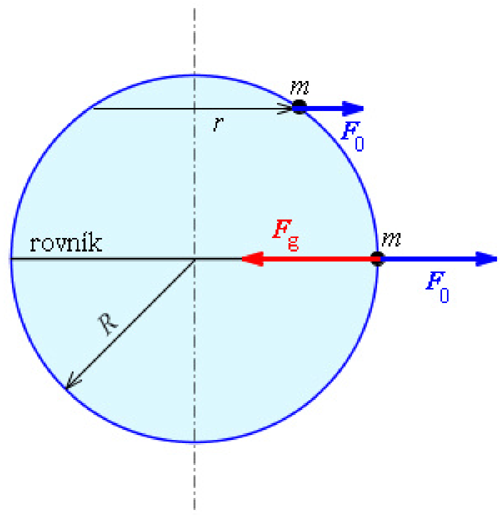
Jedná se vlastně vztah pro intenzitu gravitačního pole $\boldsymbol{K}$. Gravitační zrychlení podle tohoto vztahu bude záviset na výšce $h = r - R$ tělesa nad Zemí. V tabulce závislosti gravitačního zrychlení na výšce se můžete podívat, jak výrazně se mění gravitační zrychlení se vzdáleností od povrchu Země.

Tabulka závislosti gravitačního zrychlení na výšce

Výška nad Zemí	h (km)	a_g (m.s^{-2})
Mořská hladina	0	9,83
Mount Everest	8,8	9,80
Nejvyšší výška výstupu balónu	36,6	9,71
Dráha raketoplánu	400	8,7
Komunikační družice	35 700	0,225

A teď si konečně vysvětlíme rozdíl mezi gravitačním zrychlením a_g a tíhovým zrychlením g. Zůstaňme na Zemi. Podle Newtonova gravitačního zákona na libovolné těleso na Zemi působí gravitační síla $F_g = m\, a_g$. Ve skutečnosti, ale **na těleso působí tíhová síla** $F_G = m\, g$. Velikosti tíhové a gravitační síly Země se liší a to z následujících důvodů:

- Gravitační síla závisí na vzdálenosti tělesa od středu Země. Ale země není dokonalá koule, je to elipsoid zploštěný na pólech. Tíhové zrychlení roste směrem od rovníku k pólu – mění se se zeměpisnou šířkou.
- Hustota Země se mění v jednotlivých oblastech pod povrchem Země. Proto také tíhové zrychlení je různé v různých místech Země.
- Největší vliv má ale rotace *Země*. Podíváme-li se na obrázek Obr.1.5.-4, vidíme, že na těleso na povrchu země působí gravitační síla F_g. Ale protože Země rotuje, působí na toto těleso i odstředivá síla $F_o = m\,\omega^2\, r$. Úhlová rychlost rotace Země je na všech zeměpisných šířkách stejná, ale poloměr otáčení $r < R$ se směrem od rovníku ($r = R$) zmenšuje. Výsledná tíhová síla působící na těleso je dána vektorovým součtem gravitační a odstředivé síly zanedbáme-li ostatní méně významné síly.



Obr.1.5.-4

$$\boldsymbol{F}_G = \boldsymbol{F}_g + \boldsymbol{F}_o \qquad 1.5.\text{-}11$$

Podělíme-li tento vztah hmotností m na kterou síly působí, dostaneme vztah souvislosti tíhového a gravitačního zrychlení

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{a}_g + \boldsymbol{a}_o \qquad 1.5.\text{-}12$$

Určete rozdíl mezi gravitačním a tíhovým zrychlením na rovníku. Uvažujte jen vliv rotace Země.

Uvažujme těleso hmotnosti m. Na rovníku je jeho gravitační zrychlení (tabulka závislosti gravitačního zrychlení na výšce) a_g = 9,83 m.s^{-2}. Velikost setrvačné odstředivé síly bude na rovníku $F_o = m\,\omega^2\,R = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$, kde T = 24 h je doba jednoho oběhu Země.

Tíhová síla bude rovna gravitační síle zmenšené o odstředivou sílu: $F_G = F_g - F_o = m\,a_g - m\left(\frac{2\pi}{T}\right) R = m\left(9{,}83 - \frac{2^2\pi^2}{(24.60.60)^2}\,6{,}371.10^6\right) = m\,.\,9{,}8\,\mathrm{N}$. Je tedy tíhové zrychlení na rovníku g = 9,8 m.s^{-2}.

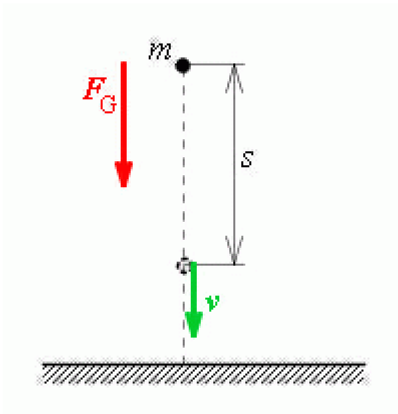
Z řešeného příkladu je vidět, že rozdíl mezi tíhovým a gravitačním zrychlením není velký. Na rovníku je tento rozdíl vlivem rotace 0,03 m.s^{-2}, postupně klesá k pólu, kde je nulový. Přihlédneme-li k jiným dříve popsaným vlivům, je ve skutečnosti naměřené tíhové zrychlení na rovníku 9,78 m.s^{-2}. Z toho všeho je vidět, že pro praktické orientační výpočty není třeba k těmto odchylkám přihlížet, běžně se počítá s hodnotou tíhového zrychlení g = 9,81 m.s^{-2}, případně 10 m.s^{-2}.

U 1.5.-3 *Určete hmotnost Marsu*, jestliže gravitační zrychlení na *Marsu* při jeho povrchu má velikost 3,63 N.kg^{-1} a jeho poloměr je 3 400 km.

1.5.4 Pohyb těles v blízkosti povrchu Země

V této kapitole si budeme všímat pohybu těles v tíhovém poli Země. Omezíme se na pohyby, jejichž dráha je krátká vzhledem k rozměrům Země. Půjde tedy například o výkop balónu na hřišti, již zmiňovaný pád květináče z okna, ale ne o vystřelenou orbitální raketu.

Postupně podle jednoduchosti se budeme zabývat volným pádem, vrhem svislým vzhůru a šikmým vrhem. Všechny případy budeme řešit za zjednodušených podmínek. Budeme uvažovat pouze působení jediné síly tj. tíhové síly a zanedbávat odporové síly (odpor vzduchu apod.).



Obr. 1.5.-5

- ***Volný pád***

O volném pádu jsme již hovořili v kinematice v kapitole 1.2.3.5 Volný pád, a tak si teď pouze zopakujeme závěry této kapitoly.

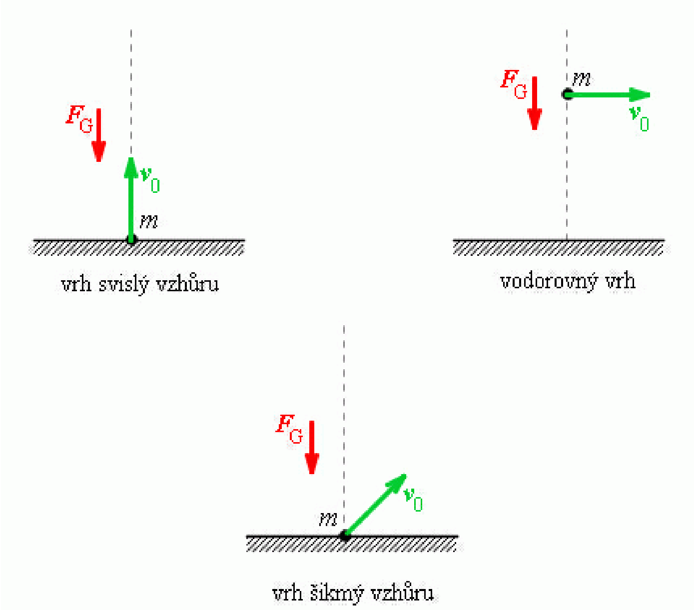
Na těleso padající volným pádem působí tíhová síla $F_G = mg$ jak je vidět na Obr. 1.5.-5. Volný pád je pohyb rovnoměrně zrychlený charakterizovaný tíhovým zrychlením g. Rychlost a dráha volného pádu jsou popsány rovnicemi:

$v = g\,t, \quad s = \frac{1}{2}\,g\,t^2.$

Všimněte si, že rychlost ani dráha nezávisí na hmotnosti tělesa. To bude platit i pro následující vrhy.

- ***Vrh svislý vzhůru***

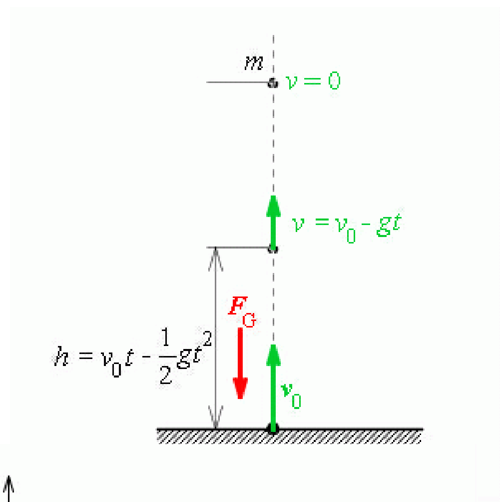
Řekneme-li „vrh“, rozumíme tím, že se jedná o pohyb, který si můžeme představit složený z více pohybů. Prvním pohybem je pohyb, kdy tělesu udělíme počáteční rychlost $\boldsymbol{v_o}$. Těleso by se pohybovalo rovnoměrně přímočarým pohybem ve směru rychlosti. Druhým pohybem je pohyb pod vlivem tíhové síly, tedy volný pád. O jaký vrh konkrétně půjde záleží na vzájemné orientaci počáteční rychlosti a orientaci tíhové síly. Jednotlivé druhy vrhů si můžete



prohlédnout na Obr.1.5.-6.

Obr.1.5.-6

Pro svislý vrh vzhůru je charakteristické, že počáteční rychlost a tíhová síla jsou opačně orientované jak je patrné z Obr.1.5.-7 . Výsledný pohyb je pohyb rovnoměrně zpomalený s počáteční rychlostí v_o a zrychlením ($-g$).



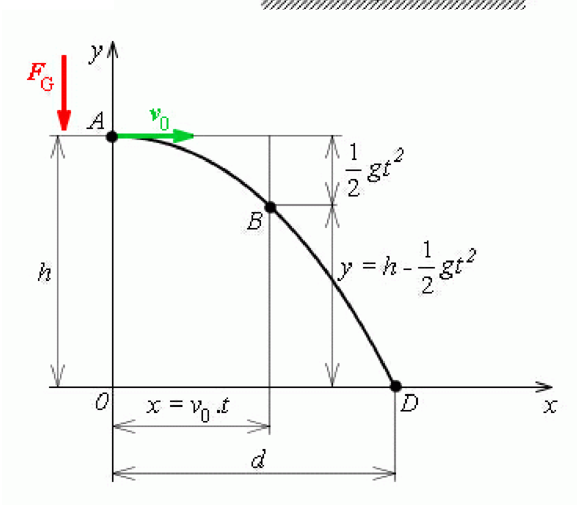
Použijeme-li vztahů pro rychlost a dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu z kinematiky, dostaneme pro rychlost a výšku tělesa v čase t rovnice:

$v = v_o - g\,t\,,\ \ h = v_o\,t - ½\,g\,t^2$.

Obr.1.5.-7

- ***Vodorovný vrh***

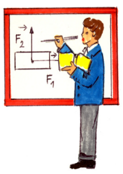
U vodorovného vrhu je počáteční rychlost orientována vodorovně (ve směru osy x) a tíha působí ve směru svislém (- y) jak je znázorněno na Obr.1.5.-8. Složením rovnoměrného přímočarého pohybu ve směru x a volného pádu ve směru y vznikne křivočarý pohyb. Trajektorií tohoto pohybu je část paraboly s vrcholem v místě vrhu A.



Obr.1.5.-8

Pokud nás zajímá, kde bude vržené těleso za čas t (bod B), pak si stanovíme jeho souřadnice. Souřadnice x bude dráhou pohybu rovnoměrného s počáteční rychlostí v_o, jeho souřadnice y je dána dráhou volného pádu za čas t.

$x = v_o\, t,\ \ y = h - ½\, g\, t^2.$



Určete, *kam až dohodíte kámen* hmotnosti 0,5 kg z věže vysoké 20 m? Počáteční rychlost vašeho vrhu bude 5 m.s^{-1}.

Hledáme vzdálenost d bodu D z obrázku Obr.1.5.-8. Této vzdálenosti se říká **délka vrhu**. Co vlastně známe? V prvé řadě máme zadanou počáteční rychlost v_o = 5 m.s^{-1}. Tu použijeme pro výpočet vzdálenost d, vlastně x-ové souřadnice hledaného bodu, $d = v_o\, t$.

Neznáme však čas, za který kámen do bodu D dopadne. Ten získáme z rovnice pro y-ovou souřadnici bodu D. Tato souřadnice je rovna nule. Protože víme z jaké výšky h byl kámen hozen, máme v rovnici pro y pouze jednu neznámou a to hledaný čas t. V našem případě platí $0 = h - ½\, g\, t^2$.

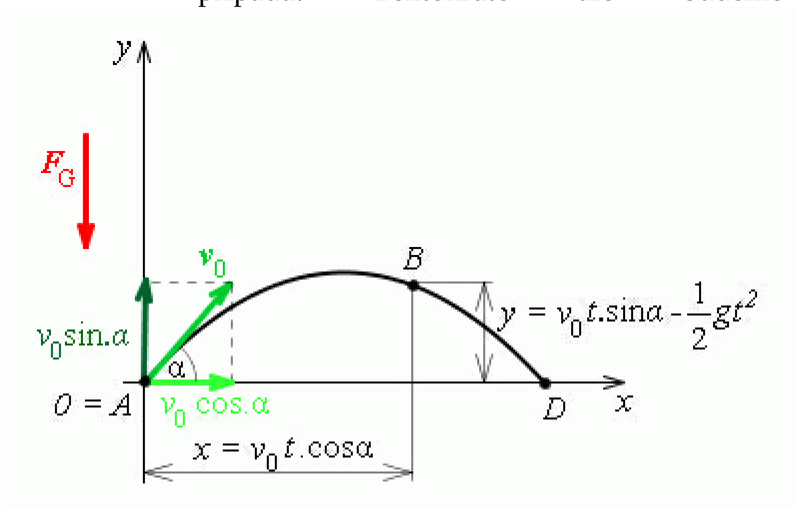
Z poslední rovnice vyjádříme čas t a ten dosadíme do rovnice pro hledanou délku vrhu. Dostaneme vztah

$$d = v_o\sqrt{\frac{2h}{g}} = 5\sqrt{\frac{2.20}{10}} = 10\,\mathrm{m}.$$

Kámen dopadne do vzdálenosti 10 m od paty věže.

- ***Vrh šikmý vzhůru***

Tento vrh se liší od předešlého tím, že počáteční rychlost nesměřuje vodorovně, ale pod úhlem α šikmo vzhůru – Obr.1.5.-9. Tomuto úhlu říkáme **elevační úhel**. Jinak ale budeme postupovat téměř stejně jako v předešlém případu. Tentokráte ale budeme skládat pohyby tři.



Obr.1.5.-9

Prvním pohybem bude rovnoměrný pohyb ve směru osy x. Proti vodorovnému vrhu se ale uplatní pouze složka počáteční rychlosti $v_x = v_o \cos\alpha$. Souřadnice x libovolného bodu dráhy B bude

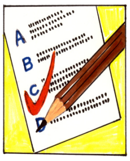
$x = v_o\, t \cos\alpha.$

Ve směru osy y se těleso bude pohybovat vrhem svislým vzhůru. Tento pohyb je složen z přímočarého rovnoměrného pohybu s počáteční rychlostí danou y-ovou složkou počáteční rychlosti $v_y = v_o \sin\alpha$ a z volného pádu. Souřadnice bodu *B* ve směru osy *y* v čase *t* tedy bude dána vztahem

$y = v_o\, t \sin\alpha - \frac{1}{2}\, g\, t^2$.

Délku vrhu stanovíme stejným postupem jako v případě vodorovného vrhu.

Souřadnice *x* a *y* zadávají parabolickou trajektorii. Uvažujeme-li působení odporové síly (odpor vzduchu) pak parabola je mírně deformovaná, hovoříme o **balistické křivce**.



V následujících kontrolních otázkách a úlohách počítejte s gravitačním zrychlením $\underline{g = 10}$ m.s^{-2}

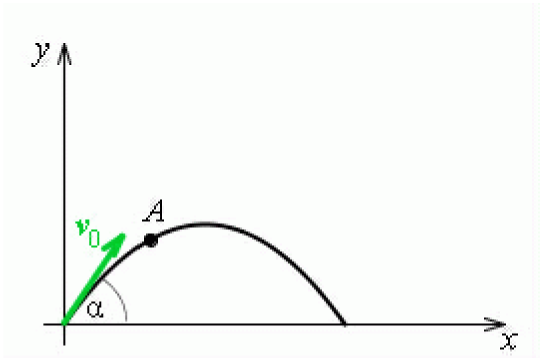
TO 1.5.-7 Těleso padá volným pádem z výšky 40 m. Odpor prostředí neuvažujte. *Určete jeho okamžitou rychlost na konci druhé sekundy od začátku pohybu.*

TO 1.5.-8 Těleso padá volným pádem z výšky 40 m. Odpor prostředí neuvažujte. *Určete čas, za který těleso dopadne na podložku.*

TO 1.5.-9 Těleso padá volným pádem z výšky 50 m. Odpor prostředí neuvažujte. *Určete dráhu, kterou těleso urazí za první tři sekundy svého pohybu.*

TO 1.5.-10 Těleso je vrženo v tíhovém poli Země svisle vzhůru a vystoupí do výše 10 m, odpor prostředí neuvažujte. *Jakou počáteční rychlostí bylo těleso vrženo?*

TO 1.5.-11 Těleso je vrženo v tíhovém poli Země svisle vzhůru počáteční rychlostí v_o, odpor prostřední neuvažujte. *Do jaké výšky těleso vystoupí?*



Obr.1.5.-10

TO 1.5.-12 Těleso je vrženo v tíhovém poli Země počáteční rychlostí v_o pod elevačním úhlem α, odpor prostředí neuvažujte (Obr.1.5.-10). *Souřadnice rychlosti tělesa v libovolném bodě A jeho dráhy jsou:*

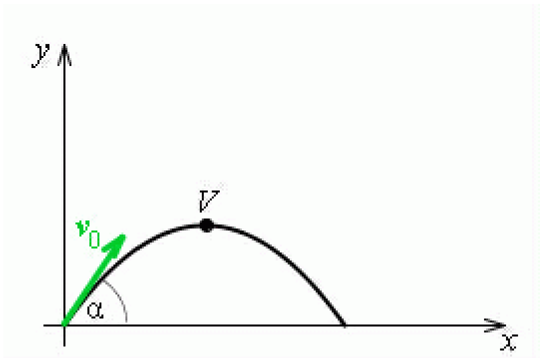
a) $v_x = v_o \sin\alpha$ $\quad v_y = v_o \cos\alpha - g\,t$

b) $v_x = v_o \cos\alpha$ $\quad v_y = v_o \sin\alpha - g\,t$

c) $v_x = v_o \cos\alpha$ $\quad v_y = v_o \sin\alpha$

d) $v_x = v_o \sin\alpha - g\,t$ $\quad v_y = v_o \cos\alpha$

TO 1.5.-13 Těleso je vrženo v tíhovém poli Země počáteční rychlostí v_o pod elevačním úhlem α, odpor prostředí neuvažujte (Obr.1.5.-11). *Souřadnice rychlosti tělesa ve vrcholu V jeho dráhy jsou*:



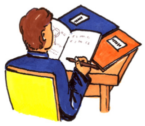
a) $v_x = 0$ $\quad v_y = v_o \sin\alpha$

b) $v_x = 0$ $\quad v_y = v_o \cos\alpha$

c) $v_x = v_o \cos\alpha$ $\quad v_y = 0$

d) $v_x = v_o \sin\alpha$ $\quad v_y = 0$

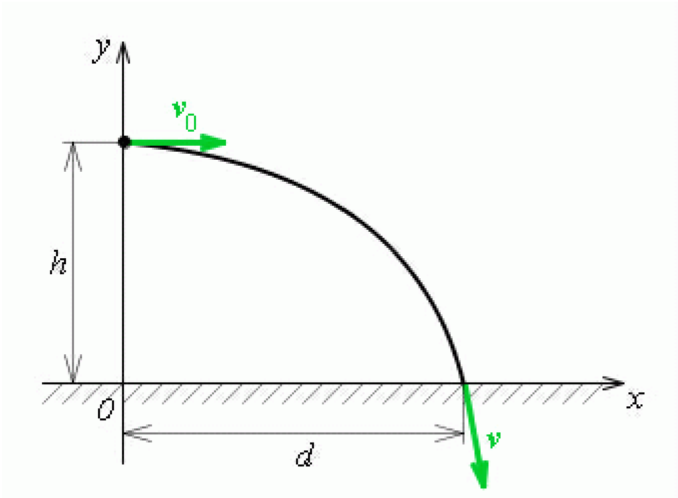
Obr.1.5.-11



U 1.5.-4 Těleso bylo vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí 30 m/s. *Určete a) okamžitou rychlost tělesa* za dobu 3 s od okamžiku vrhu, b) *výšku tělesa nad místem vrhu* v tomto čase.

U 1.5.-5 . Určete, *jakou rychlostí* byl vystřelen prakem kámen svisle vzhůru, jestliže se vrátil za 8 sekund. Vypočítejte, *jaké maximální výšky* kámen dosáhl.

U 1.5.-6 Kámen vržený vodorovným směrem dopadl na vodorovný povrch Země ve vzdálenosti d = 15 m od místa vrhu za dobu 0,6 s od okamžiku vrhu (Obr.1.5.-12) a) *Jak velká byla počáteční rychlost kamene a s jak velkou rychlostí dopadl kámen na Zem?* b) *Z jaké výšky h byl kámen vržen?*



Obr.1.5.-12

U 1.5.-7 Z vrcholu věže 80 m vysoké je vrženo těleso vodorovným směrem počáteční rychlostí 15 m/s. *Za jakou dobu a v jaké vzdálenosti od paty věže dopadne těleso na vodorovný povrch Země?*

U 1.5.-8 Hasiči stříkají vodu pod úhlem 60° do vzdálenosti 100 m. *Jak velkou rychlostí tryská voda z hadice?*

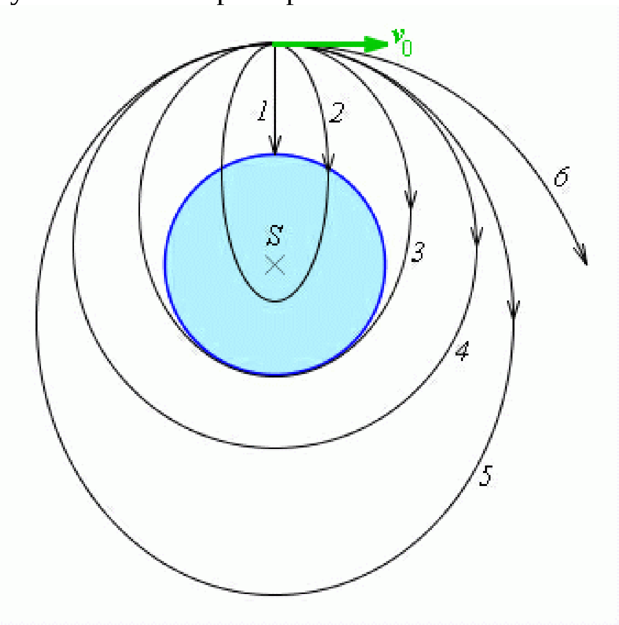
1.5.5. Pohyb těles ve velkých výškách od povrchu Země

Budeme se teď zajímat o výšky, ve kterých se pohybují různé družice, raketoplány, kosmické sondy, planety apod. Otázka zní, proč některá tělesa, například balistické rakety se vrátí z velkých výšek na Zemi. Jiná jako komunikační družice obíhají kolem ní na stabilních drahách a kosmické sondy se od Země pořád vzdalují bez možnosti návratu.

Musíme si uvědomit, za jakých podmínek se tyto objekty pohybují. Zaprvé, ve velkých výškách (řádově stovky a tisíce kilometru) jsou gravitační síly Země poměrně malé (tabulka závislosti gravitačního zrychlení na výšce). Zadruhé, v těchto výškách je prakticky vakuum a proti pohybu nepůsobí odporové síly.

Omezíme si výpočty na minimum, výpočty drah kosmických sond zabírají super výkonným počítačům NASA stovky hodin.

Představte si, že raketoplán vynesl kosmické těleso hmotnosti m do velké výšky, řekněme 400 km (Obr.1.5-13). Raketoplán teď těleso vypustí ve směru tečném k povrchu Země s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$. Jak se bude kosmický objekt chovat závisí právě na této rychlosti. Budeme tuto rychlost postupně zvětšovat. Je-li *počáteční rychlost*:



Obr.1.5-13

- *Nulová*,satelit spadne na Zem (trajektorie 1).
- *Malá*, satelit s bude pohybovat po eliptické trajektorii a časem spadne na Zem (trajektorie 2).
- „*Kritická*“, satelit se bude zase pohybovat po eliptické trajektorii, ale na Zem již nespadne (trajektorie 3).
- „*Kruhová*“, satelit se bude pohybovat po kruhové trajektorii kolem Země (trajektorie 4).
- „*Eliptická*“, satelit se bude pohybovat opět po eliptické trajektorii (trajektorie 5), Země leží v jejím ohnisku.
- „*Úniková*“, satelit se odpoutá od gravitačního pole Země (trajektorie 6).

Fyzika by nebyla fyzikou bez nějakých výpočtů. Tak aspoň jeden. Vypočítáme si orientačně velikost kruhové rychlosti v_k. Aby se satelit pohyboval po kruhové dráze, musí být v rovnováze síly, které na něj působí. Gravitační síla musí být stejně veliká jako setrvačná síla odstředivá

$\kappa \dfrac{M\ m}{r^2} = \dfrac{m\ v_k^2}{r}$ a odtud $v_k = \sqrt{\dfrac{\kappa M}{r}}$.

Pokud bude družice obíhat nízko nad Zemí ($r \approx R$), bude velikost kruhové rychlosti

$v_1 = \sqrt{\dfrac{\kappa M}{R}} \approx 7{,}9\,\mathrm{km.s^{-1}}$. Této rychlosti se říká **první kosmická rychlost.**

Důležitá je i rychlost úniková. Na obrázku je trajektorie 6 parabolická. Aby kosmické těleso bylo navedeno na tuto dráhu, musí získat tzv. parabolickou rychlost $v_p = \sqrt{2}\ v_k$. Pokud bude kosmická sonda startovat z oběžné dráhy nízko nad Zemí ($r \approx R$), pak parabolická rychlost bude

$v_2 = \sqrt{2}\ v_1 = 11{,}2\,\mathrm{km.s^{-1}}$. To je tzv. **druhá kosmická rychlost.**

U 1.5.-9 *Vypočítejte*:

a) *rychlost pohybu* Měsíce kolem Země. Předpokládejte kruhovou oběžnou dráhu.

b) *dobu oběhu* Měsíce kolem Země.

1.5.6. Keplerovy zákony

Když už se zabýváme pohybem v kosmické oblasti, podívejme se ještě na pohyb planet. Astronomové již od starověku zkoumali naši sluneční soustavu a sledovali pohyby planet. Skutečně seriozně se tímto problémem zabýval v 17. století Johannes Kepler. Ze svých pozorování vyvodil své tři slavné zákony, nyní známé jako **Keplerovy zákony.**

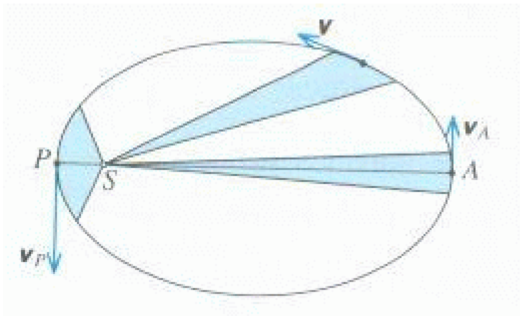
***1. Keplerův zákon.* Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce.**

Kepler sice formuloval své zákony pro planety obíhající kolem Slunce, ale tyto zákony platí i pro umělé družice a jiné objekty obíhající kolem Země.

Protože planety obíhají po elipsách, nebude jejich pohyb rovnoměrný. I na to myslel Kepler a zformuloval svůj další zákon.

***2. Keplerův zákon.* Obsahy ploch opsaných průvodičem planety za stejnou dobu jsou stejné.**

Pro vysvětlení tohoto zákona se obrátíme k obrázku (Obr.1.5.-14). Nejdříve co je to průvodič? Je to úsečka spojující planetu se Sluncem. Jak se planeta otáčí kolem Slunce, mění se délka průvodiče. V obrázku je modře vyznačena plocha, kterou opíše průvodič za jednotku času. Z kinematiky víte, že bod urazí za jednotku času dráhu rovnající se velikosti rychlosti (tak je vlastně rychlost definována). V našem obrázku tedy dráha *s* uzavírající podbarvené plochy je rovna velikosti rychlosti. Z obrázku je vidět, že planeta se nejrychleji pohybuje v blízkosti Slunce (periheliu - přísluní) a nejpomaleji v největší vzdálenosti od něj (aféliu – odsluní).



Obr.1.5.-14

Pro Keplera již nebylo obtížné (jednoduchá matematika) vypočítat také jak závisí oběžná doba planety na vzdálenosti od Slunce.

***3. Keplerův zákon.* Poměr druhých mocnin oběžných dob *T* dvou planet se rovná poměru třetích mocnin délek hlavních poloos *a* jejich trajektorií.**

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

U 1.5.-10 Vzdálenost Země od Slunce je 1 AU. *Jaká je oběžná doba Saturna*, je-li jeho vzdálenost od Slunce $1{,}42.10^9$ km?

1. **Gravitační pole tělesa** je prostor v jeho okolí, ve kterém se projevují účinky gravitační síly na jiná hmotná tělesa. Gravitační silové působení mezi tělesy je **vzájemné**.

2. **Newtonův gravitační zákon** říká, že dvě tělesa se vzájemně přitahují gravitační silou $\boldsymbol{F}_g$, jejíž velikost je přímo úměrná součinu jejich hmotností m_1, m_2 a nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti jejich středů r. $\boldsymbol{F}_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \boldsymbol{r}^o$, κ je gravitační konstanta.

3. **Intenzita gravitačního pole $\boldsymbol{K}$** je definována jak gravitační síla jednotkové hmotnosti $\boldsymbol{K} = \frac{\boldsymbol{F}_g}{m}$.

4. **Potenciál gravitačního pole** Vg je potenciální energie gravitačního pole jednotkové hmotnosti $V_g = \frac{E_{pg}}{m}$

5. Potenciál gravitačního pole souvisí s intenzitou gravitačního pole podle vztahů: $\Delta V_{\boldsymbol{g}} = -\int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{K}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ respektive $\boldsymbol{K} = -gradV_g$.

6. **Ekvipotenciální hladiny** jsou geometrická místa bodů o stejném potenciálu.

7. Gravitační zrychlení a_g v gravitačním poli Země ve výšce h nad povrchem je úměrné hmotnosti Země M a nepřímo úměrné druhé mocnině vzdálenosti od středu Země $r = R + h$. $a_g = \kappa \frac{M}{r^2}$.

8. Tíhová síla F_G působící na těleso je odlišná od gravitační síly F_g. Tíhová síla je dána součinem hmotnosti m tělesa a **tíhového zrychlení.** $F_G = m\, g$, $g \approx 9{,}81$ m.s^{-2} .

9. **Volný pád** je pohyb rovnoměrně zrychlený charakterizovaný tíhovým zrychlením g. Rychlost a dráha volného pádu jsou popsány kinematickými rovnicemi.

10. **Vrh svislý vzhůru** je pohyb složený z rovnoměrného přímočarého pohybu s počáteční rychlostí v_o směřujícího vzhůru a z volného pádu. Rychlost a výška tohoto jsou popsány kinematickými rovnicemi.

11. Vodorovný vrh je pohyb složený z volného pádu a z rovnoměrného přímočarého pohybu s počáteční rychlostí v_o ve směru kolmém na směr pádu. Trajektorií pohybu je část paraboly, souřadnice jejich bodů jsou dány kinematickými rovnicemi.

12. Vrh šikmý vzhůru je pohyb složený z volného pádu a z rovnoměrného přímočarého pohybu s počáteční rychlostí v_o pod úhlem α. Trajektorií pohybu je část paraboly, souřadnice jejich bodů jsou dány kinematickými rovnicemi.

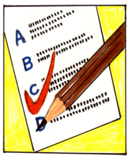
13. Trajektorie satelitu závisí na jeho počáteční rychlosti. Rozlišujeme eliptické, kruhové a parabolické trajektorie.

10. 1. Keplerův zákon. Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce.

11. 2. Keplerův zákon. Obsah ploch opsaných průvodičem planety za stejnou dobu jsou stejné.

12. **3. Keplerův zákon**. Poměr druhých mocnin oběžných dob T dvou planet se rovná poměru třetích mocnin délek hlavních poloos a jejich trajektorií. $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$

Klíč



TO 1.5.-1 144 N

TO 1.5.-2 144 N

TO 1.5.-3 a)

TO 1.5.-4 c)

TO 1.5.-5 $-\kappa M_Z/r$

TO 1.5-6 5 J/kg

TO 1.5.-7 20 m.s^{-1}. $v = g\,t$

TO 1.5.-8 2,83 s. Vyjdeme ze vztahu pro dráhu volného pádu. $h = ½\, g\, t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} =$

TO 1.5.-9 45 m. $s = ½\, g\, t^2$

TO 1.5.-10 14,1 m.s^{-1}. Vyjdeme z rovnice pro rychlost $v = v_o - g\, t$, která je v nejvyšším bodě nulová. Z této rovnice stanovíme dobu výstupu. Tento čas dosadíme do rovnice pro dráhu $h = v_o\, t - ½\, g\, t^2$ a z ní vypočítáme počáteční rychlost.

TO 1.5.-11 $\frac{v_o^2}{2g}$. Vyjdeme z rovnice pro rychlost $v = v_o - g$, která je v nejvyšším bodě nulová. Z této rovnice stanovíme dobu výstupu. Tento čas dosadíme do rovnice pro hledanou dráhu $h = v_o\, t - ½\, g\, t^2$

TO 1.5.-12 b

TO 1.5.-13 c

U 1.5.-1 7,8.10^3 m.s^{-1}. Vycházíme z toho, že aby se satelit udržel na své kruhové dráze, musí na něj působit dvě stejně velké síly opačného směru. Silami jsou síla odstředivá $F_o = m_s\, .\, v^2/r$ a gravitační síla $F_g = \kappa.(m_s\, .\, m_Z)/r^2$. Z rovnost obou sil vypočítáme v.

U 1.5.-2 0,03 N. Vznikají slapové jevy – příliv a odliv.

U 1.5.-3 6,29.10^{23} kg. Hmotnost Marsu je asi 10 krát menší než Země.

U 1.5.-4 0 m.s^{-1}, 45 m. Vyjdeme z rovnice pro rychlost $v = v_o - g$ do které dosadíme zadaný čas. Vyjde nám nulová rychlost. Z toho vyplývá, že těleso se dostalo do nejvyššího bodu své dráhy. Pak začne padat dolů. Tento čas tedy dosadíme do rovnice pro dráhu $h = v_o\, t - ½\, g\, t^2$

– výšku tělesa v tomto čase.

U 1.5.-5 40 m.s^{-1}, 80 m. Označíme si dobu výstupu t_1, dobu pádu t_2. Řešíme rovnice pro rychlost a výšku vrhu svislého vzhůru v čase t_1 a pro dráhu volného pádu za čas t_2. Zjistíme, že oba časy t_1 a t_2 jsou stejné. Z doby výstupu vypočítáme počáteční rychlost a nejvyšší bod dráhy.

U 1.5.-6 25 m.s^{-1}, 25,26 m.s^{-1}, 1,8 m. Jedná se o pohyb složený z rovnoměrného přímočarého pohybu ve směru osy x a volného pádu ve směru osy y. Vzdálenost dopadu je souřadnice x v daném čase, použijeme tedy rovnici $x = v_o\, t$ pro ni.

Hledáme-li rychlost v bodě dopadu, musíme si uvědomit, že rychlost bude mít dvě složky. Prvou bude x-ová složka rovna počáteční rychlosti. Druhou složkou bude rychlost volného pádu $v = g\, t$ za daný čas $v_y = g\, t$. Obě složky vektorově sečteme.

Výšku stanovíme z dráhy volného pádu $s = ½\, g\, t^2 - h = ½\, g\, t^2$.

U 1.5.-7 4 s, 60 m. Zase jde o pohyb složený z přímočarého rovnoměrného v ose x a z volného pádu. Hledaný čas si stanovíme z dráhy volného pádu $s = ½\, g\, t^2$. Místo dopadu pak z dráhy rovnoměrného pohybu $x = v_o\, t$ v ose x.

U 1.5.-8 34 m.s^{-1}. Vyjdeme z rovnice pro x-ovou a y-ovou složku místa dopadu vody.

U 1.5.-9 1 km.s^{-1}, 27 dní 11 hodin. Rychlost vypočítáme z rovnosti gravitační a setrvačné odstředivé síly: $\frac{m_M\ v_M^2}{r} = \kappa \frac{M\ m_M}{r^2}$. Oběžnou dobu stanovíme jako podíl dráhy měsíce a jeho rychlosti: $T = \frac{2\,\pi\, r}{v_M}$.

U 1.5.-10 29,7 roku. Počítáme ze třetího Keplerova zákona. Jedna AU (astronomická jednotka) je rovna průměrné vzdálenosti Země – Slunce. 1 AU = 149,6.10^6 km.