Cvičení z matematické analýzy 3

2. vnitrosemestrální písemka, lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

14. 5. 2018

Náplň 10. cvičení

1. 2. vnitrosemestrální písemka
2. Opakování z minulé hodiny
   - Řešení metodou neznámých koeficientů
3. Další typy pravé strany
   - exponenciální funkce (případně exponenciální funkce a polynom)
   - goniometrické funkce

Literatura

- Hájek, J., Dula, J.; *Cvičení z matematické analýzy - Obyčejné diferenciální rovnice*. MU Brno, 1998.
- Kuben, J.; *Obyčejné diferenciální rovnice*. UP Olomouc, 1995.

2. vnitrosemestrální písemka, skupina A

Řešte diferenciální rovnici

1. $y^2 \cdot y' = \cos x,\ y(\frac{\pi}{2}) = 2$ $\quad \left[y = \sqrt[3]{3\sin x + 5}\right]$
2. $xy' = y - 3x$ $\quad [y = -3x \cdot \ln|Cx|,\ x \neq 0, C \neq 0]$
3. $y' - y = e^{2x}$ $\quad \left[y = e^{2x} + C \cdot e^{x}\right]$
4. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$ $\quad \left[y = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{3x} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}\right]$

2. vnitrosemestrální písemka, skupina B

Řešte diferenciální rovnici

1. $y^2 \cdot y' = 1 - 2x, \; y(2) = 3$ $\qquad \left[y = \sqrt[3]{3(-x^2 + x + 11)}\right]$
2. $xy' = y + 2x$ $\qquad [y = 2x \cdot \ln|Cx|, \; x \neq 0, C \neq 0]$
3. $y' + 2y = 4x$ $\qquad [y = e^{2x} \cdot (2x - 1) + C]$
4. $y'' - 3y' + 2y = x^2$ $\qquad \left[y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right]$

Řešení NLDR s KK metodou neznámých koeficientů

Řešení NLDR s KK metodou neznámých koeficientů

Pravá strana ve tvaru polynomu

- Rovnice s pravou stranou ve tvaru polynomu:
  $ay'' + by' + cy = P_n(x)$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n

1. najdeme OŘ**H**LDR: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$
2. PŘ**N**LDR hledáme ve tvaru
   - $y_p = Q_n(x)$, jestliže 0 není kořen charakteristické rovnice
   - $y_p = x^k Q_n(x)$, je-li 0 k-násobný kořen charakteristické rovnice

   kde $Q(x)$ je polynom stupně n s neznámými koeficienty
3. vypočítáme y_p' a y_p'', dosadíme y_p, y_p' a y_p'' do původní rovnice a upravíme
4. pokud jsme počítali správně, vyjde rovnice s polynomy na obou stranách - odtud dopočítáme koeficienty polynomu $Q_n(x)$
5. OŘNLDR má tvar $\quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + (x^k) Q_n(x)$

Řešení NLDR s KK metodou neznámých koeficientů

Pravá strana ve tvaru $e^{qx} \cdot P_n(x)$

Řešení NLDR s KK metodou neznámých koeficientů

Pravá strana ve tvaru $e^{qx} \cdot P_n(x)$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = e^{qx} \cdot P_n(x)$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n

Řešení NLDR s KK metodou neznámých koeficientů

Pravá strana ve tvaru $e^{qx} \cdot P_n(x)$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = e^{qx} \cdot P_n(x)$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n

1. najdeme OŘ**H**LDR: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

Řešení NLDR s KK metodou neznámých koeficientů

Pravá strana ve tvaru $e^{qx} \cdot P_n(x)$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = e^{qx} \cdot P_n(x)$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n

1. najdeme OŘ**H**LDR: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$
2. PŘ**N**LDR hledáme ve tvaru
   - $y_p = e^{qx}\, Q_n(x)$, jestliže q není kořen charakteristické rovnice
   - $y_p = x^k\, e^{qx}\, Q_n(x)$, je-li q k-násobný kořen charakteristické rovnice

   kde $Q_n(x)$ je polynom stupně n s neznámými koeficienty

Řešení NLDR s KK metodou neznámých koeficientů

Pravá strana ve tvaru $e^{qx} \cdot P_n(x)$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = e^{qx} \cdot P_n(x)$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n

1. najdeme OŘ**H**LDR: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$
2. PŘ**N**LDR hledáme ve tvaru
   - $y_p = e^{qx}\, Q_n(x)$, jestliže q není kořen charakteristické rovnice
   - $y_p = x^k\, e^{qx}\, Q_n(x)$, je-li q k-násobný kořen charakteristické rovnice

   kde $Q_n(x)$ je polynom stupně n s neznámými koeficienty
3. vypočítáme y_p' a y_p'', dosadíme y_p, y_p' a y_p'' do původní rovnice a upravíme

Řešení NLDR s KK metodou neznámých koeficientů

Pravá strana ve tvaru $e^{qx} \cdot P_n(x)$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = e^{qx} \cdot P_n(x)$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n

1. najdeme OŘ**H**LDR: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$
2. PŘ**N**LDR hledáme ve tvaru
   - $y_p = e^{qx} Q_n(x)$, jestliže q není kořen charakteristické rovnice
   - $y_p = x^k e^{qx} Q_n(x)$, je-li q k-násobný kořen charakteristické rovnice

   kde $Q_n(x)$ je polynom stupně n s neznámými koeficienty
3. vypočítáme y_p' a y_p'', dosadíme y_p, y_p' a y_p'' do původní rovnice a upravíme
4. pokud jsme počítali správně, vyjde po úpravě a vykrácení výrazem e^{qx} rovnice s polynomy na obou stranách, odkud dopočítáme neznáme koeficienty polynomu $Q_n(x)$

Řešení NLDR s KK metodou neznámých koeficientů

Pravá strana ve tvaru $e^{qx} \cdot P_n(x)$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = e^{qx} \cdot P_n(x)$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n

1. najdeme OŘ**H**LDR: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$
2. PŘ**N**LDR hledáme ve tvaru
   - $y_p = e^{qx}\, Q_n(x)$, jestliže q není kořen charakteristické rovnice
   - $y_p = x^k\, e^{qx}\, Q_n(x)$, je-li q k-násobný kořen charakteristické rovnice

   kde $Q_n(x)$ je polynom stupně n s neznámými koeficienty
3. vypočítáme y_p' a y_p'', dosadíme y_p, y_p' a y_p'' do původní rovnice a upravíme
4. pokud jsme počítali správně, vyjde po úpravě a vykrácení výrazem e^{qx} rovnice s polynomy na obou stranách, odkud dopočítáme neznáme koeficienty polynomu $Q_n(x)$
5. OŘNLDR má tvar $\quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + (x^k)\, e^{qx}\, Q_n(x)$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1. $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{2x}$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$ $\quad\left[y = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^{2x}\right]$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1. $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{2x}$ $\left[y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 x \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}\right]$
2. $y'' + y' - 2y = 3x \mathrm{e}^x$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1. $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{2x}$ $\left[y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{2x}\right]$
2. $y'' + y' - 2y = 3x\,\mathrm{e}^{x}$ $\left[y = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x\right)\mathrm{e}^{x}\right]$

Řešení NLDR s KK metodou neznámých koeficientů

Pravá strana ve tvaru $m \cos px + n \sin px$, $m, n, p \in \mathbb{R}$

Řešení NLDR s KK metodou neznámých koeficientů

Pravá strana ve tvaru $m\cos px + n\sin px$, $m, n, p \in \mathbb{R}$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = m\cos kx + n\sin kx$

Řešení NLDR s KK metodou neznámých koeficientů

Pravá strana ve tvaru $m\cos px + n\sin px$, $m, n, p \in \mathbb{R}$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = m\cos kx + n\sin kx$

1. najdeme OŘ**H**LDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$

Řešení NLDR s KK metodou neznámých koeficientů

Pravá strana ve tvaru $m\cos px + n\sin px$, $m, n, p \in \mathbb{R}$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = m\cos kx + n\sin kx$

1. najdeme OŘ**H**LDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$
2. PŘ**N**LDR hledáme ve tvaru
   - $y_p = A\cos kx + B\sin kx$, jestliže $\pm ki$ nejsou kořeny char. rovnice
   - $y_p = x(A\cos kx + B\sin kx)$, jsou-li $\pm ki$ kořeny charakteristické rovnice

Řešení NLDR s KK metodou neznámých koeficientů

Pravá strana ve tvaru $m\cos px + n\sin px$, $m, n, p \in \mathbb{R}$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = m\cos kx + n\sin kx$

1. najdeme OŘ**H**LDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$
2. PŘ**N**LDR hledáme ve tvaru
   - $y_p = A\cos kx + B\sin kx$, jestliže $\pm ki$ nejsou kořeny char. rovnice
   - $y_p = x(A\cos kx + B\sin kx)$, jsou-li $\pm ki$ kořeny charakteristické rovnice
3. vypočítáme y_p' a y_p'', dosadíme y_p, y_p' a y_p'' do původní rovnice a upravíme

Řešení NLDR s KK metodou neznámých koeficientů

Pravá strana ve tvaru $m\cos px + n\sin px$, $m, n, p \in \mathbb{R}$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = m\cos kx + n\sin kx$

1. najdeme OŘ**H**LDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$
2. PŘ**N**LDR hledáme ve tvaru
   - $y_p = A\cos kx + B\sin kx$, jestliže $\pm ki$ nejsou kořeny char. rovnice
   - $y_p = x(A\cos kx + B\sin kx)$, jsou-li $\pm ki$ kořeny charakteristické rovnice
3. vypočítáme y_p' a y_p'', dosadíme y_p, y_p' a y_p'' do původní rovnice a upravíme
4. porovnáním obou stran rovnice dopočítáme koeficienty A, B

Řešení NLDR s KK metodou neznámých koeficientů

Pravá strana ve tvaru $m\cos px + n\sin px$, $m, n, p \in \mathbb{R}$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = m\cos kx + n\sin kx$

1. najdeme OŘ**H**LDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$
2. PŘ**N**LDR hledáme ve tvaru
   - $y_p = A\cos kx + B\sin kx$, jestliže $\pm ki$ nejsou kořeny char. rovnice
   - $y_p = x(A\cos kx + B\sin kx)$, jsou-li $\pm ki$ kořeny charakteristické rovnice
3. vypočítáme y'_p a y''_p, dosadíme y_p, y'_p a y''_p do původní rovnice a upravíme
4. porovnáním obou stran rovnice dopočítáme koeficienty A, B
5. OŘNLDR má tvar $\quad y = C_1y_1 + C_2y_2 + (x)(A\cos kx + B\sin kx)$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1. $y'' - 4y = 3\sin 2x$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1. $y'' - 4y = 3\sin 2x$ $\quad \left[y = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{3}{8}\sin 2x\right]$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1. $y'' - 4y = 3\sin 2x$ $\left[y = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{3}{8}\sin 2x\right]$
2. $y'' - 2y' + 10y = 37\cos 3x$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1. $y'' - 4y = 3\sin 2x$ $\left[y = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{3}{8}\sin 2x\right]$
2. $y'' - 2y' + 10y = 37\cos 3x$
   $[y = C_1\,\mathrm{e}^{x}\cos 3x + C_2\,\mathrm{e}^{x}\sin 3x + \cos 3x - 6\sin 3x]$

To je vše přátelé!