

# Cvičení z matematické analýzy 3

## Kritéria konvergence

5. 3. 2018

- 1 Kritéria konvergence řad s kladnými členy
  - Základní pojmy
  - Příklady

## Literatura

- Hájek, J., Dula, J.; *Cvičení z matematické analýzy - Nekonečné řady*. MU Brno, 1994.
- Došlá, Z., Novák, V.; *Nekonečné řady*. MU Brno, 2013.

# Kritéria konvergence řad s kladnými členy

## Kritéria konvergence

## Kritéria konvergence

- **Nutná podmínka konvergence:** Jestliže řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje, pak platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Věta má tvar implikace, znamená to tedy, že

- je-li  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverguje;
- vlastnost  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  obecně není dostatečná pro to, aby řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergovala.

## Kritéria konvergence

- **Nutná podmínka konvergence:** Jestliže řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje, pak platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Věta má tvar implikace, znamená to tedy, že

- je-li  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverguje;
  - vlastnost  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  obecně není dostatečná pro to, aby řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergovala.
- **Srovnávací:** necht'  $a_n \leq b_n$  platí pro  $\forall n \in \mathbb{N}$ , pak
    - je-li  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergentní, je i  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergentní;
    - je-li  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergentní, je i  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergentní.

## Kritéria konvergence

- **Nutná podmínka konvergence:** Jestliže řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje, pak platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Věta má tvar implikace, znamená to tedy, že

- je-li  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverguje;
- vlastnost  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  obecně není dostatečná pro to, aby řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergovala.
- **Srovnávací:** necht'  $a_n \leq b_n$  platí pro  $\forall n \in \mathbb{N}$ , pak
  - je-li  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergentní, je i  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergentní;
  - je-li  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergentní, je i  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergentní.
- **Podílové:** necht' od jistého  $n_0 \in \mathbb{N}$  platí pro  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ 
  - $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , pak  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je konvergentní;
  - $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ , pak  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je divergentní.

## Kritéria konvergence - pokračování



## Kritéria konvergence - pokračování

- **Limitní podílové:** jestliže existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ , pak
  - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je konvergentní pro  $0 \leq q < 1$ ;
  - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je divergentní pro  $q > 1$ ;
  - je-li  $q = 1$ , nelze o konvergenci či divergenci podle tohoto kritéria rozhodnout.

## Kritéria konvergence - pokračování

- **Limitní podílové:** jestliže existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ , pak
  - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je konvergentní pro  $0 \leq q < 1$ ;
  - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je divergentní pro  $q > 1$ ;
  - je-li  $q = 1$ , nelze o konvergenci či divergenci podle tohoto kritéria rozhodnout.
- **Odmocninové:** necht' od jistého  $n_0 \in \mathbb{N}$  platí pro  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ 
  - $\sqrt[n]{a_n} < 1$ , pak  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je konvergentní;
  - $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ , pak  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je divergentní.

## Kritéria konvergence - pokračování

- **Limitní podílové:** jestliže existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ , pak
  - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je konvergentní pro  $0 \leq q < 1$ ;
  - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je divergentní pro  $q > 1$ ;
  - je-li  $q = 1$ , nelze o konvergenci či divergenci podle tohoto kritéria rozhodnout.
- **Odmocninové:** necht' od jistého  $n_0 \in \mathbb{N}$  platí pro  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ 
  - $\sqrt[n]{a_n} < 1$ , pak  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je konvergentní;
  - $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ , pak  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je divergentní.
- **Limitní odmocninové:** jestliže existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ , pak
  - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je konvergentní pro  $0 \leq q < 1$ ;
  - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je divergentní pro  $q > 1$ ;
  - je-li  $q = 1$ , nelze o konvergenci či divergenci podle tohoto kritéria rozhodnout.

## Kritéria konvergence - dokončení

## Kritéria konvergence - dokončení

- **Integrální kritérium:** Necht' pro řadu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  s kladnými členy existuje spojitá funkce  $f(x)$ , pro kterou platí:
  - $f(x)$  je nerostoucí na intervalu  $\langle K, \infty \rangle$  pro nějaké  $K \in \mathbb{R}$ ;
  - od jistého  $n_0 \in \mathbb{N}$  platí pro  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: f(n) = a_n$

Existuje-li vlastní limita  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_K^t f(x) dx$ , řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje.

Je-li  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_K^t f(x) dx = \infty$ , řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverguje.

Rozhodněte o konvergenci řady

## Rozhodněte o konvergenci řady

1  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

## Rozhodněte o konvergenci řady

1  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

[diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]



## Rozhodněte o konvergenci řady

1  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

[diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

2  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

## Rozhodněte o konvergenci řady

1  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

[diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

2  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

[konverguje (podle srov. krit. s řadou  $\frac{1}{2^n}$ )]

## Rozhodněte o konvergenci řady

1  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

[diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

2  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

[konverguje (podle srov. krit. s řadou  $\frac{1}{2^n}$ )]

3  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

## Rozhodněte o konvergenci řady

1  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

[diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

2  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

[konverguje (podle srov. krit. s řadou  $\frac{1}{2^n}$ )]

3  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

[diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

## Rozhodněte o konvergenci řady

1  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

2  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$  [konverguje (podle srov. krit. s řadou  $\frac{1}{2^n}$ )]

3  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$  [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

4  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$

## Rozhodněte o konvergenci řady

1  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

2  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$  [konverguje (podle srov. krit. s řadou  $\frac{1}{2^n}$ )]

3  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$  [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

4  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$  [konverguje (podle srov. krit. s řadou  $\sum \frac{1}{3^n}$ )]

## Rozhodněte o konvergenci řady

1  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

2  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$  [konverguje (podle srov. krit. s řadou  $\frac{1}{2^n}$ )]

3  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$  [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

4  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$  [konverguje (podle srov. krit. s řadou  $\sum \frac{1}{3^n}$ )]

5  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$

## Rozhodněte o konvergenci řady

1  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

2  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$  [konverguje (podle srov. krit. s řadou  $\frac{1}{2^n}$ )]

3  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$  [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

4  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$  [konverguje (podle srov. krit. s řadou  $\sum \frac{1}{3^n}$ )]

5  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$  [konverguje (podle podílového krit.)]



## Rozhodněte o konvergenci řady

1  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

2  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$  [konverguje (podle srov. krit. s řadou  $\frac{1}{2^n}$ )]

3  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$  [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

4  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$  [konverguje (podle srov. krit. s řadou  $\sum \frac{1}{3^n}$ )]

5  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$  [konverguje (podle podílového krit.)]

6  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$

## Rozhodněte o konvergenci řady

1  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

2  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$  [konverguje (podle srov. krit. s řadou  $\frac{1}{2^n}$ )]

3  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$  [diverguje (podle srov. krit. s harmonickou řadou)]

4  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$  [konverguje (podle srov. krit. s řadou  $\sum \frac{1}{3^n}$ )]

5  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$  [konverguje (podle podílového krit.)]

6  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$  [diverguje (podle podílového krit.)]

Rozhodněte o konvergenci řady

## Rozhodněte o konvergenci řady

1  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n$

## Rozhodněte o konvergenci řady

1  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

[konverguje (podle odm. krit.)]

## Rozhodněte o konvergenci řady

1  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

[konverguje (podle odm. krit.)]

2  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(3 + \frac{1}{n^2}\right)^n}$

## Rozhodněte o konvergenci řady

1  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$  [konverguje (podle odm. krit.)]

2  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(3+\frac{1}{n^2}\right)^n}$  [konverguje (podle odm. krit.)]

## Rozhodněte o konvergenci řady

1  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$  [konverguje (podle odm. krit.)]

2  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(3+\frac{1}{n^2}\right)^n}$  [konverguje (podle odm. krit.)]

3  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$



## Rozhodněte o konvergenci řady

1  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$  [konverguje (podle odm. krit.)]

2  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(3+\frac{1}{n^2}\right)^n}$  [konverguje (podle odm. krit.)]

3  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  [diverguje (podle srovn. resp. integr. krit.)]

## Rozhodněte o konvergenci řady

1  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$  [konverguje (podle odm. krit.)]

2  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(3+\frac{1}{n^2}\right)^n}$  [konverguje (podle odm. krit.)]

3  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  [diverguje (podle srovn. resp. integr. krit.)]

4  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^4-9}$

## Rozhodněte o konvergenci řady

1  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$  [konverguje (podle odm. krit.)]

2  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(3+\frac{1}{n^2}\right)^n}$  [konverguje (podle odm. krit.)]

3  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  [diverguje (podle srovn. resp. integr. krit.)]

4  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^4-9}$  [konverguje (podle srovn. krit.)]