Cvičení z matematické analýzy 3

Písemka, integrace, derivace mocninných řad

26. 3. 2018

1. zápočtová písemka

45 minut, maximum 13 bodů, požadavek: min. 6,5 bodu

Výsledky – skupina A

- **Příklad 1** [3 body]: Určete součet řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$. **Řešení:** $\frac{3}{4}$
- **Příklad 2** [2 body]: Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{2^{n-1}}$. **Řešení:** $\ln 4$
- **Příklad 3** [2 body]: Užitím vhodného kritéria rozhodněte o konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(3n+1)}$.

Řešení: diverguje

- **Příklad 4** [3 body]: Rozhodněte o (absolutní/relativní) konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3n-2}$.

Řešení: konverguje relativně

- **Příklad 5** [3 body]: Určete interval konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n-1}\cdot\sqrt{n}}$.

Řešení: $I = \langle -3, 3)$

Výsledky – skupina B

- **Příklad 1** [3 body]: Určete součet řady $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)}$. **Řešení:** $\frac{3}{4}$

- **Příklad 2** [2 body]: Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{3^{n-1}}$. **Řešení:** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

- **Příklad 3** [2 body]: Užitím vhodného kritéria rozhodněte o konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n(3n+1)}$.
Řešení: diverguje

- **Příklad 4** [3 body]: Rozhodněte o (absolutní/relativní) konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n^2+1}$.
Řešení: konverguje absolutně

- **Příklad 5** [3 body]: Určete interval konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n \cdot 5^n}$.
Řešení: $I = (-5, 5\rangle$

Integrace a derivace řad funkcí

Následující vlastnosti platí pro řady stejnoměrně konvergentní (viz přednáška).

Integrace a derivace řad funkcí

Následující vlastnosti platí pro řady stejnoměrně konvergentní (viz přednáška).

- Nechť řada funkcí $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má součet s. Jestliže všechny funkce f_n jsou integrovatelné na $\langle a, b\rangle$, je také funkce s integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b s(x)dx = \int_a^b \left(\sum f_n(x)dx\right) = \sum \left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$$

Integrace a derivace řad funkcí

Následující vlastnosti platí pro řady stejnoměrně konvergentní (viz přednáška).

- Nechť řada funkcí $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má součet s. Jestliže všechny funkce f_n jsou integrovatelné na $\langle a, b\rangle$, je také funkce s integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b s(x)dx = \int_a^b \left(\sum f_n(x)dx\right) = \sum \left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$$

- Buď $\{f_n\}$ posloupnost funkcí, které mají na otevřeném intervalu (a, b) derivaci. Nechť $\sum f_n$ konverguje na (a, b) a má součet s a dále nechť $\sum f_n'$ konverguje stejnoměrně na (a, b). Pak funkce s má na (a, b) derivaci a platí

$$s'(x) = \left(\sum f_n(x)\right)' = \sum f_n'(x)$$

Mocninné řady

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

Mocninné řady

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

- Mocninnou řadou se středem v bodě x_0 a koeficienty a_n rozumíme řadu funkcí tvaru $\sum a_n(x - x_0)^n$.

Mocninné řady

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

- Mocninnou řadou se středem v bodě x_0 a koeficienty a_n rozumíme řadu funkcí tvaru $\sum a_n(x - x_0)^n$.
- Každá mocninná řada konverguje ve svém středu x_0.

Mocninné řady

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

- Mocninnou řadou se středem v bodě x_0 a koeficienty a_n rozumíme řadu funkcí tvaru $\sum a_n(x - x_0)^n$.
- Každá mocninná řada konverguje ve svém středu x_0.
- Je-li $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = K$, nazýváme
  - číslo $r = \frac{1}{K}$ poloměr konvergence
  - interval $\left(x_0 - \frac{1}{K}, x_0 + \frac{1}{K}\right)$ interval konvergence

Mocninné řady

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

- Mocninnou řadou se středem v bodě x_0 a koeficienty a_n rozumíme řadu funkcí tvaru $\sum a_n(x-x_0)^n$.
- Každá mocninná řada konverguje ve svém středu x_0.
- Je-li $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = K$, nazýváme
  - číslo $r = \frac{1}{K}$ poloměr konvergence
  - interval $\left(x_0 - \frac{1}{K}, x_0 + \frac{1}{K}\right)$ interval konvergence
- Pro poloměr konvergence r rovněž platí:
  - Existuje-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, je $r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.
  - Existuje-li $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, je $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Příklady

Určete součet mocninné řady

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \right]$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\qquad \left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1,1\rangle\,, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $\left[I = (-1,1\rangle, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x\right]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1, 1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1, 1\rangle, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $[I = \langle -1, 1\rangle, s(x) = \operatorname{arctg} x]$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1, 1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1, 1\rangle, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $[I = \langle -1, 1\rangle, s(x) = \operatorname{arctg} x]$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1, 1\rangle\,, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $[I = \langle -1, 1\rangle\,, s(x) = \operatorname{arctg} x]$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{(1-x)}\right]$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1, 1\rangle\,, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $[I = \langle -1, 1\rangle\,, s(x) = \operatorname{arctg} x]$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{(1-x)}\right]$
5. $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \dots$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1,1\rangle, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $[I = \langle -1,1\rangle, s(x) = \operatorname{arctg} x]$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{(1-x)}\right]$
5. $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \dots$ $\left[I = (-1,1)\setminus\{0\}, s(x) = 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x)\right]$