

Cvičení z matematické analýzy 3

Diferenciální rovnice - úvod

9. 4. 2018

1 Diferenciální rovnice

- Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu
 - Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými
 - Příklady

Literatura

- Hájek, J., Dula, J.; *Cvičení z matematické analýzy 3 - Obyčejné diferenciální rovnice*. MU Brno, 1998.
- Ráb, M.; *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*. MU Brno, 1998.

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

- Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu je rovnice tvaru $F(x, y, y') = 0$, kde F je funkce tří proměnných, definovaná v $G \subset \mathbb{R}^3$.

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

- Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu je rovnice tvaru $F(x, y, y') = 0$, kde F je funkce tří proměnných, definovaná v $G \subset \mathbb{R}^3$.
- Řešením rovnice $F(x, y, y') = 0$ je funkce $y = h(x)$, pro niž platí
 - $[x, h(x), h'(x)] \in G$
 - $F(x, h(x), h'(x)) = 0$

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

- Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu je rovnice tvaru $F(x, y, y') = 0$, kde F je funkce tří proměnných, definovaná v $G \subset \mathbb{R}^3$.
- Řešením rovnice $F(x, y, y') = 0$ je funkce $y = h(x)$, pro niž platí
 - $[x, h(x), h'(x)] \in G$
 - $F(x, h(x), h'(x)) = 0$
- Vyřešit diferenciální rovnici znamená najít množinu všech řešení - tzv. **obecné řešení**, které závisí na konstantě C jako na parametru.

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

- Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu je rovnice tvaru $F(x, y, y') = 0$, kde F je funkce tří proměnných, definovaná v $G \subset \mathbb{R}^3$.
- Řešením rovnice $F(x, y, y') = 0$ je funkce $y = h(x)$, pro niž platí
 - $[x, h(x), h'(x)] \in G$
 - $F(x, h(x), h'(x)) = 0$
- Vyřešit diferenciální rovnici znamená najít množinu všech řešení - tzv. **obecné řešení**, které závisí na konstantě C jako na parametru.
- Dosazením konkrétní hodnoty za C získáme tzv. **partikulární řešení**.

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

- Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu je rovnice tvaru $F(x, y, y') = 0$, kde F je funkce tří proměnných, definovaná v $G \subset \mathbb{R}^3$.
- Řešením rovnice $F(x, y, y') = 0$ je funkce $y = h(x)$, pro niž platí
 - $[x, h(x), h'(x)] \in G$
 - $F(x, h(x), h'(x)) = 0$
- Vyřešit diferenciální rovnici znamená najít množinu všech řešení - tzv. **obecné řešení**, které závisí na konstantě C jako na parametru.
- Dosazením konkrétní hodnoty za C získáme tzv. **partikulární řešení**.
- Často chceme, aby platila tzv. **počáteční podmínka** $y(x_0) = y_0$.

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.
- Při řešení rovnice $y' = P(x) \cdot Q(y)$ postupujeme takto:

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.
- Při řešení rovnice $y' = P(x) \cdot Q(y)$ postupujeme takto:
 - y' nahradíme výrazem $\frac{dy}{dx}$ (vzpomeňte např. na definici derivace)

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.
- Při řešení rovnice $y' = P(x) \cdot Q(y)$ postupujeme takto:
 - y' nahradíme výrazem $\frac{dy}{dx}$ (vzpomeňte např. na definici derivace)
 - řešíme rovnici $\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot Q(y)$

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.
- Při řešení rovnice $y' = P(x) \cdot Q(y)$ postupujeme takto:
 - y' nahradíme výrazem $\frac{dy}{dx}$ (vzpomeňte např. na definici derivace)
 - řešíme rovnici $\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot Q(y)$
 - upravíme ji do tvaru $\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x) dx$

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.
- Při řešení rovnice $y' = P(x) \cdot Q(y)$ postupujeme takto:
 - y' nahradíme výrazem $\frac{dy}{dx}$ (vzpomeňte např. na definici derivace)
 - řešíme rovnici $\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot Q(y)$
 - upravíme ji do tvaru $\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x) dx$
 - vypočítáme příslušné integrály, nezapomeneme na konstantu

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.
- Při řešení rovnice $y' = P(x) \cdot Q(y)$ postupujeme takto:
 - y' nahradíme výrazem $\frac{dy}{dx}$ (vzpomeňte např. na definici derivace)
 - řešíme rovnici $\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot Q(y)$
 - upravíme ji do tvaru $\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x) dx$
 - vypočítáme příslušné integrály, nezapomeneme na konstantu
 - zohledníme případnou počáteční podmínku

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.
- Při řešení rovnice $y' = P(x) \cdot Q(y)$ postupujeme takto:
 - y' nahradíme výrazem $\frac{dy}{dx}$ (vzpomeňte např. na definici derivace)
 - řešíme rovnici $\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot Q(y)$
 - upravíme ji do tvaru $\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x) dx$
 - vypočítáme příslušné integrály, nezapomeneme na konstantu
 - zohledníme případnou počáteční podmínku
 - určíme i případná singulární řešení (která při použití předchozího postupu musíme vyloučit)

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

1 $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

$$1 \quad x^2 + 1 + y' \cos y = 0$$

$$\left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C \right]$$

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

1 $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$

$$\left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C \right]$$

2 $\frac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

1 $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$

$$\left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C \right]$$

2 $\frac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$

$$\left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C \right]$$

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

1 $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$

$$\left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C \right]$$

2 $\frac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$

$$\left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C \right]$$

3 $x^2 y' = 1 - y$

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

1 $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$

$$\left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C \right]$$

2 $\frac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$

$$\left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C \right]$$

3 $x^2 y' = 1 - y$

$$\left[y = 1 - C \cdot e^{\frac{1}{x}} \right]$$

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

$$1 \quad x^2 + 1 + y' \cos y = 0$$

$$\left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C \right]$$

$$2 \quad \frac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$\left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C \right]$$

$$3 \quad x^2 y' = 1 - y$$

$$\left[y = 1 - C \cdot e^{\frac{1}{x}} \right]$$

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

$$1 \quad x^2 + 1 + y' \cos y = 0 \quad \left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C \right]$$

$$2 \quad \frac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \quad \left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C \right]$$

$$3 \quad x^2 y' = 1 - y \quad \left[y = 1 - C \cdot e^{\frac{1}{x}} \right]$$

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

$$1 \quad y - xy' = a(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1$$

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

$$1 \quad x^2 + 1 + y' \cos y = 0 \quad \left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C \right]$$

$$2 \quad \frac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \quad \left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C \right]$$

$$3 \quad x^2 y' = 1 - y \quad \left[y = 1 - C \cdot e^{\frac{1}{x}} \right]$$

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

$$1 \quad y - xy' = a(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1 \quad \left[y = \frac{a+x}{ax+1}, a \neq -1 \right]$$

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

$$1 \quad x^2 + 1 + y' \cos y = 0 \quad \left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C \right]$$

$$2 \quad \frac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \quad \left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C \right]$$

$$3 \quad x^2 y' = 1 - y \quad \left[y = 1 - C \cdot e^{\frac{1}{x}} \right]$$

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

$$1 \quad y - xy' = a(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1 \quad \left[y = \frac{a+x}{ax+1}, a \neq -1 \right]$$

$$2 \quad y' \sin x \cdot \sin y = \cos x \cdot \cos y, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

$$1 \quad x^2 + 1 + y' \cos y = 0$$

$$\left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C \right]$$

$$2 \quad \frac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$\left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C \right]$$

$$3 \quad x^2 y' = 1 - y$$

$$\left[y = 1 - C \cdot e^{\frac{1}{x}} \right]$$

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

$$1 \quad y - xy' = a(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1$$

$$\left[y = \frac{a+x}{ax+1}, a \neq -1 \right]$$

$$2 \quad y' \sin x \cdot \sin y = \cos x \cdot \cos y, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\left[y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2 \sin x} \right]$$

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

$$1 \quad x^2 + 1 + y' \cos y = 0$$

$$\left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C \right]$$

$$2 \quad \frac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$\left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C \right]$$

$$3 \quad x^2 y' = 1 - y$$

$$\left[y = 1 - C \cdot e^{\frac{1}{x}} \right]$$

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

$$1 \quad y - xy' = a(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1$$

$$\left[y = \frac{a+x}{ax+1}, a \neq -1 \right]$$

$$2 \quad y' \sin x \cdot \sin y = \cos x \cdot \cos y, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\left[y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2 \sin x} \right]$$

$$3 \quad y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

$$1 \quad x^2 + 1 + y' \cos y = 0 \quad \left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C \right]$$

$$2 \quad \frac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \quad \left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C \right]$$

$$3 \quad x^2 y' = 1 - y \quad \left[y = 1 - C \cdot e^{\frac{1}{x}} \right]$$

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

$$1 \quad y - xy' = a(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1 \quad \left[y = \frac{a+x}{ax+1}, a \neq -1 \right]$$

$$2 \quad y' \sin x \cdot \sin y = \cos x \cdot \cos y, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \left[y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2 \sin x} \right]$$

$$3 \quad y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \left[y = 1 \right]$$

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

1 $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$

$$\left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C \right]$$

2 $\frac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$

$$\left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C \right]$$

3 $x^2 y' = 1 - y$

$$\left[y = 1 - C \cdot e^{\frac{1}{x}} \right]$$

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

1 $y - xy' = a(1 + x^2 y')$, $y(1) = 1$

$$\left[y = \frac{a+x}{ax+1}, a \neq -1 \right]$$

2 $y' \sin x \cdot \sin y = \cos x \cdot \cos y$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$$\left[y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2 \sin x} \right]$$

3 $y' \sin x = y \ln y$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$\left[y = 1 \right]$$

4 $(1 + e^x)yy' = e^x$, $y(0) = 1$

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

$$1 \quad x^2 + 1 + y' \cos y = 0 \quad \left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C \right]$$

$$2 \quad \frac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \quad \left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C \right]$$

$$3 \quad x^2 y' = 1 - y \quad \left[y = 1 - C \cdot e^{\frac{1}{x}} \right]$$

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

$$1 \quad y - xy' = a(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1 \quad \left[y = \frac{a+x}{ax+1}, a \neq -1 \right]$$

$$2 \quad y' \sin x \cdot \sin y = \cos x \cdot \cos y, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \left[y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2 \sin x} \right]$$

$$3 \quad y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \left[y = 1 \right]$$

$$4 \quad (1 + e^x) yy' = e^x, \quad y(0) = 1 \quad \left[y = \sqrt{2 \left(\ln(1 + e^x) + \frac{1}{2} - \ln 2 \right)} \right]$$