Cvičení z matematické analýzy 3

Homogenní diferenciální rovnice, lineární diferenciální rovnice

16. 4. 2018

Náplň 7. cvičení

1. Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu
   - Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu
   - Příklady
   - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu
   - Příklady

Literatura

- Hájek, J., Dula, J.; *Cvičení z matematické analýzy - Obyčejné diferenciální rovnice*. MU Brno, 1998.
- Ráb, M.; *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*. MU Brno, 1998.

Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu

Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu

- Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu je diferenciální rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu

- Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu je diferenciální rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
- Při řešení takové rovnice

Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu

- Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu je diferenciální rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
- Při řešení takové rovnice
  - využijeme substitucí $u = \frac{y}{x}$,

Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu

- Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu je diferenciální rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
- Při řešení takové rovnice
  - využijeme substitucí $u = \frac{y}{x}$,
  - odvodíme $u' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}$

Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu

- Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu je diferenciální rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
- Při řešení takové rovnice
  - využijeme substitucí $u = \frac{y}{x}$,
  - odvodíme $u' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}$
  - po úpravě $y' = u'x + u$

- Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu je diferenciální rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
- Při řešení takové rovnice
  - využijeme substitucí $u = \frac{y}{x}$,
  - odvodíme $u' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}$
  - po úpravě $y' = u'x + u$
  - tím původní rovnici převedeme na rovnici $u'x + u = f(u)$

Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu

- Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu je diferenciální rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
- Při řešení takové rovnice
  - využijeme substitucí $u = \frac{y}{x}$,
  - odvodíme $u' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}$
  - po úpravě $y' = u'x + u$
  - tím původní rovnici převedeme na rovnici $u'x + u = f(u)$
  - můžeme separovat proměnné: $u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$

Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu

- Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu je diferenciální rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
- Při řešení takové rovnice
  - využijeme substitucí $u = \frac{y}{x}$,
  - odvodíme $u' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}$
  - po úpravě $y' = u'x + u$
  - tím původní rovnici převedeme na rovnici $u'x + u = f(u)$
  - můžeme separovat proměnné: $u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$
  - řešení $u = h(x)$ vyjádříme v původních proměnných: $y = g(x)$, případně $\overline{g}(x, y) = 0$

Příklady

Řešte diferenciální rovnice

Příklady

Řešte diferenciální rovnice

1. $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln \frac{y}{x}\right)$

Příklady

Řešte diferenciální rovnice

1. $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$ $\left[y = x \cdot \mathrm{e}^{kx}\right]$

Příklady

Řešte diferenciální rovnice

1. $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln \frac{y}{x}\right)$ $\left[y = x \cdot \mathrm{e}^{kx}\right]$
2. $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$

Řešte diferenciální rovnice

1. $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln \frac{y}{x}\right)$ $\qquad \left[y = x \cdot \mathrm{e}^{kx}\right]$
2. $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ $\qquad \left[\sin \frac{y}{x} - cx = 0\right]$

Příklady

Řešte diferenciální rovnice

1. $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$ $\left[y = x \cdot \mathrm{e}^{kx}\right]$
2. $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$ $\left[\sin\frac{y}{x} - cx = 0\right]$
3. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$

Příklady

Řešte diferenciální rovnice

1. $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$ $\left[y = x \cdot \mathrm{e}^{kx}\right]$
2. $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$ $\left[\sin\frac{y}{x} - cx = 0\right]$
3. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ $\left[y = \frac{2x+cx^4}{1-cx^3}\right]$

Příklady

Řešte diferenciální rovnice

1. $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$ $\left[y = x \cdot \mathrm{e}^{kx}\right]$
2. $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$ $\left[\sin\frac{y}{x} - cx = 0\right]$
3. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ $\left[y = \frac{2x+cx^4}{1-cx^3}\right]$
4. $x^2y' = (x+y)y$

Řešte diferenciální rovnice

1. $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$ $\qquad \left[y = x \cdot \mathrm{e}^{kx}\right]$
2. $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$ $\qquad \left[\sin\frac{y}{x} - cx = 0\right]$
3. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ $\qquad \left[y = \frac{2x+cx^4}{1-cx^3}\right]$
4. $x^2 y' = (x + y)y$ $\qquad \left[y = \frac{-x}{\ln|x|+c}\right]$

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

- LDR 1. řádu má tvar $y' + f(x)y = g(x)$.

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

- LDR 1. řádu má tvar $y' + f(x)y = g(x)$.
- Je-li $g(x) = 0$, hovoříme o homogenní LDR (HLDR) 1. řádu

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

- LDR 1. řádu má tvar $y' + f(x)y = g(x)$.
- Je-li $g(x) = 0$, hovoříme o homogenní LDR (HLDR) 1. řádu
- LDR můžeme řešit např. **metodou variace konstanty**:

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

- LDR 1. řádu má tvar $y' + f(x)y = g(x)$.
- Je-li $g(x) = 0$, hovoříme o homogenní LDR (HLDR) 1. řádu
- LDR můžeme řešit např. **metodou variace konstanty**:
  - nejprve vyřešíme přidruženou HLDR $y' + f(x)y = 0$
    - DR se separovanými proměnnými a řešením $y = C \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

- LDR 1. řádu má tvar $y' + f(x)y = g(x)$.
- Je-li $g(x) = 0$, hovoříme o homogenní LDR (HLDR) 1. řádu
- LDR můžeme řešit např. **metodou variace konstanty**:
    - nejprve vyřešíme přidruženou HLDR $y' + f(x)y = 0$
      - DR se separovanými proměnnými a řešením $y = C \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
    - řešení původní LDR hledáme ve tvaru $y = C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

- LDR 1. řádu má tvar $y' + f(x)y = g(x)$.
- Je-li $g(x) = 0$, hovoříme o homogenní LDR (HLDR) 1. řádu
- LDR můžeme řešit např. **metodou variace konstanty**:
  - nejprve vyřešíme přidruženou HLDR $y' + f(x)y = 0$
    - DR se separovanými proměnnými a řešením $y = C \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - řešení původní LDR hledáme ve tvaru $y = C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - derivací dostáváme $y' = C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)f(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

- LDR 1. řádu má tvar $y' + f(x)y = g(x)$.
- Je-li $g(x) = 0$, hovoříme o homogenní LDR (HLDR) 1. řádu
- LDR můžeme řešit např. **metodou variace konstanty**:
  - nejprve vyřešíme přidruženou HLDR $y' + f(x)y = 0$
    - DR se separovanými proměnnými a řešením $y = C \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - řešení původní LDR hledáme ve tvaru $y = C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - derivací dostáváme $y' = C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)f(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - po dosazení do původní rovnice za y a y' dostáváme:

$$C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)f(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} + f(x)C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} = g(x)$$

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

- LDR 1. řádu má tvar $y' + f(x)y = g(x)$.
- Je-li $g(x) = 0$, hovoříme o homogenní LDR (HLDR) 1. řádu
- LDR můžeme řešit např. **metodou variace konstanty**:
  - nejprve vyřešíme přidruženou HLDR $y' + f(x)y = 0$
    - DR se separovanými proměnnými a řešením $y = C \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - řešení původní LDR hledáme ve tvaru $y = C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - derivací dostáváme $y' = C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)f(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - po dosazení do původní rovnice za y a y' dostáváme:
    $$C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)f(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} + f(x)C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} = g(x)$$
  - po úpravě tak řešíme $C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} = g(x)$

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

- LDR 1. řádu má tvar $y' + f(x)y = g(x)$.
- Je-li $g(x) = 0$, hovoříme o homogenní LDR (HLDR) 1. řádu
- LDR můžeme řešit např. **metodou variace konstanty**:
  - nejprve vyřešíme přidruženou HLDR $y' + f(x)y = 0$
    - DR se separovanými proměnnými a řešením $y = C \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - řešení původní LDR hledáme ve tvaru $y = C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - derivací dostáváme $y' = C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)f(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - po dosazení do původní rovnice za y a y' dostáváme:

    $$C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)f(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} + f(x)C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} = g(x)$$
  - po úpravě tak řešíme $C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} = g(x)$
  - řešením je $C(x) = \int g(x)\,\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C$

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

- LDR 1. řádu má tvar $y' + f(x)y = g(x)$.
- Je-li $g(x) = 0$, hovoříme o homogenní LDR (HLDR) 1. řádu
- LDR můžeme řešit např. **metodou variace konstanty**:
  - nejprve vyřešíme přidruženou HLDR $y' + f(x)y = 0$
    - DR se separovanými proměnnými a řešením $y = C \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - řešení původní LDR hledáme ve tvaru $y = C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - derivací dostáváme $y' = C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)f(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - po dosazení do původní rovnice za y a y' dostáváme:
    $$C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)f(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} + f(x)C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} = g(x)$$
  - po úpravě tak řešíme $C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} = g(x)$
  - řešením je $C(x) = \int g(x)\,\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C$
  - toto řešení dosadíme do původní LDR

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

- LDR 1. řádu má tvar $y' + f(x)y = g(x)$.
- Je-li $g(x) = 0$, hovoříme o homogenní LDR (HLDR) 1. řádu
- LDR můžeme řešit např. **metodou variace konstanty**:
  - nejprve vyřešíme přidruženou HLDR $y' + f(x)y = 0$
    - DR se separovanými proměnnými a řešením $y = C \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - řešení původní LDR hledáme ve tvaru $y = C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - derivací dostáváme $y' = C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)f(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - po dosazení do původní rovnice za y a y' dostáváme:
    $$C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)f(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} + f(x)C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} = g(x)$$
  - po úpravě tak řešíme $C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} = g(x)$
  - řešením je $C(x) = \int g(x)\,\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C$
  - toto řešení dosadíme do původní LDR
  - Jestli jsme to zvládli až sem, odměníme se nějakou dobrotou ;-)

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice metodou variace konstanty

Určete obecné řešení diferenciální rovnice metodou variace konstanty

1. $\left(1+x^2\right)y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice metodou variace konstanty

1. $\left(1+x^2\right)y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2$ $\left[y = (C+x)\left(1+x^2\right)\right]$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice metodou variace konstanty

1. $\left(1+x^2\right)y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2$ $\left[y = (C+x)\left(1+x^2\right)\right]$
2. $\left(1+x^2\right)y' + 4xy = 3$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice metodou variace konstanty

1. $\left(1+x^2\right)y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2$ $\qquad\left[y = (C+x)\left(1+x^2\right)\right]$
2. $\left(1+x^2\right)y' + 4xy = 3$ $\qquad\left[y = \frac{x^3+3x+C}{(1+x^2)^2}\right]$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice metodou variace konstanty

1. $\left(1+x^2\right)y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2$ $\quad\left[y = (C+x)\left(1+x^2\right)\right]$
2. $\left(1+x^2\right)y' + 4xy = 3$ $\quad\left[y = \frac{x^3+3x+C}{(1+x^2)^2}\right]$
3. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice metodou variace konstanty

1. $\left(1+x^2\right)y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2$ $\qquad \left[y = (C+x)\left(1+x^2\right)\right]$
2. $\left(1+x^2\right)y' + 4xy = 3$ $\qquad \left[y = \frac{x^3+3x+C}{(1+x^2)^2}\right]$
3. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$ $\qquad \left[y = Cx^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x^2\right]$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice metodou variace konstanty

1. $\left(1+x^2\right)y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2$ $\qquad\left[y = (C+x)\left(1+x^2\right)\right]$
2. $\left(1+x^2\right)y' + 4xy = 3$ $\qquad\left[y = \frac{x^3+3x+C}{(1+x^2)^2}\right]$
3. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$ $\qquad\left[y = Cx^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x^2\right]$
4. $y' + 2xy = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice metodou variace konstanty

1. $\left(1+x^2\right)y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2$ $\quad \left[y = (C+x)\left(1+x^2\right)\right]$
2. $\left(1+x^2\right)y' + 4xy = 3$ $\quad \left[y = \frac{x^3+3x+C}{(1+x^2)^2}\right]$
3. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$ $\quad \left[y = Cx^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x^2\right]$
4. $y' + 2xy = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ $\quad \left[y = C\,\mathrm{e}^{-x^2} + \frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}\right]$