Cvičení z matematické analýzy 3

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

23. 4. 2018

Náplň 8. cvičení

1. Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty
   - Trocha teorie (pro připomenutí)
   - Příklady

Literatura

- Hájek, J., Dula, J.; *Cvičení z matematické analýzy - Obyčejné diferenciální rovnice*. MU Brno, 1998.

Trocha teorie pro připomenutí

Trocha teorie pro připomenutí

- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu** je rovnice tvaru $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$, funkce $a(x), b(x), c(x), d(x)$ jsou spojité v nějakém intervalu I.

Trocha teorie pro připomenutí

- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu** je rovnice tvaru $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$, funkce $a(x), b(x), c(x), d(x)$ jsou spojité v nějakém intervalu I.
- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty** je rovnice tvaru $ay'' + by' + cy = f(x)$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Trocha teorie pro připomenutí

- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu** je rovnice tvaru $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$, funkce $a(x), b(x), c(x), d(x)$ jsou spojité v nějakém intervalu I.
- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty** je rovnice tvaru $ay'' + by' + cy = f(x)$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.
- Je-li $f(x) = 0$, hovoříme o **homogenní** rovnici.

Trocha teorie pro připomenutí

- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu** je rovnice tvaru $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$, funkce $a(x), b(x), c(x), d(x)$ jsou spojité v nějakém intervalu I.
- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty** je rovnice tvaru $ay'' + by' + cy = f(x)$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.
- Je-li $f(x) = 0$, hovoříme o **homogenní** rovnici.
- Při řešení homogenní rovnice $ay'' + by' + cy = 0$ (*) postupujeme tak, že vyřešíme tzv. charakteristickou rovnici $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, tzn. najdeme kořeny λ_1, λ_2

Trocha teorie pro připomenutí

- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu** je rovnice tvaru $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$, funkce $a(x), b(x), c(x), d(x)$ jsou spojité v nějakém intervalu I.
- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty** je rovnice tvaru $ay'' + by' + cy = f(x)$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.
- Je-li $f(x) = 0$, hovoříme o **homogenní** rovnici.
- Při řešení homogenní rovnice $ay'' + by' + cy = 0$ (*) postupujeme tak, že vyřešíme tzv. charakteristickou rovnici $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, tzn. najdeme kořeny λ_1, λ_2
  - jsou-li λ_1, λ_2 dva různé reálné kořeny, má obecné řešení homogenní rovnice (*) tvar $y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$

Trocha teorie pro připomenutí

- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu** je rovnice tvaru $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$, funkce $a(x), b(x), c(x), d(x)$ jsou spojité v nějakém intervalu I.
- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty** je rovnice tvaru $ay'' + by' + cy = f(x)$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.
- Je-li $f(x) = 0$, hovoříme o **homogenní** rovnici.
- Při řešení homogenní rovnice $ay'' + by' + cy = 0$ (*) postupujeme tak, že vyřešíme tzv. charakteristickou rovnici $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, tzn. najdeme kořeny λ_1, λ_2
  - jsou-li λ_1, λ_2 dva různé reálné kořeny, má obecné řešení homogenní rovnice (*) tvar $y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$
  - má-li charakteristická rovnice dvojnásobný kořen $\lambda_1 = \lambda_2$, má obecné řešení homogenní rovnice (*) tvar $y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 x \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$

Trocha teorie pro připomenutí

- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu** je rovnice tvaru $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$, funkce $a(x), b(x), c(x), d(x)$ jsou spojité v nějakém intervalu I.
- **Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty** je rovnice tvaru $ay'' + by' + cy = f(x)$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.
- Je-li $f(x) = 0$, hovoříme o **homogenní** rovnici.
- Při řešení homogenní rovnice $ay'' + by' + cy = 0$ (*) postupujeme tak, že vyřešíme tzv. charakteristickou rovnici $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, tzn. najdeme kořeny λ_1, λ_2
  - jsou-li λ_1, λ_2 dva různé reálné kořeny, má obecné řešení homogenní rovnice (*) tvar $y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$
  - má-li charakteristická rovnice dvojnásobný kořen $\lambda_1 = \lambda_2$, má obecné řešení homogenní rovnice (*) tvar $y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 x \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$
  - je-li $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, má obecné řešení homogenní rovnice (*) tvar $y = C_1 \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1. $y'' - 7y' + 12y = 0$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1. $y'' - 7y' + 12y = 0$ $\left[y = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 \mathrm{e}^{4x}\right]$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1. $y'' - 7y' + 12y = 0$ $\left[y = C_1\, \mathrm{e}^{3x} + C_2\, \mathrm{e}^{4x}\right]$
2. $y'' - y' - 6y = 0$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1. $y'' - 7y' + 12y = 0$ $\left[y = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x}\right]$
2. $y'' - y' - 6y = 0$ $\left[y = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{3x}\right]$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1. $y'' - 7y' + 12y = 0$ $\quad [y = C_1 \,\mathrm{e}^{3x} + C_2 \,\mathrm{e}^{4x}]$
2. $y'' - y' - 6y = 0$ $\quad [y = C_1 \,\mathrm{e}^{-2x} + C_2 \,\mathrm{e}^{3x}]$
3. $y'' + 5y' = 0$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1. $y'' - 7y' + 12y = 0$ $\left[y = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x}\right]$
2. $y'' - y' - 6y = 0$ $\left[y = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{3x}\right]$
3. $y'' + 5y' = 0$ $\left[y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-5x}\right]$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1. $y'' - 7y' + 12y = 0$ $\quad [y = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 \mathrm{e}^{4x}]$
2. $y'' - y' - 6y = 0$ $\quad [y = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2 \mathrm{e}^{3x}]$
3. $y'' + 5y' = 0$ $\quad [y = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-5x}]$
4. $4\frac{d^2x}{dt^2} - 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1. $y'' - 7y' + 12y = 0$ $\left[y = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x}\right]$
2. $y'' - y' - 6y = 0$ $\left[y = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{3x}\right]$
3. $y'' + 5y' = 0$ $\left[y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-5x}\right]$
4. $4\frac{d^2x}{dt^2} - 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0$ $\left[x = C_1\,\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t} + C_2\,t\,\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}\right]$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1. $y'' - 7y' + 12y = 0$ $\qquad \left[y = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x}\right]$
2. $y'' - y' - 6y = 0$ $\qquad \left[y = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{3x}\right]$
3. $y'' + 5y' = 0$ $\qquad \left[y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-5x}\right]$
4. $4\frac{d^2x}{dt^2} - 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0$ $\qquad \left[x = C_1\,\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t} + C_2 t\,\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}\right]$
5. $4y'' - 8y' + 5y = 0$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1. $y'' - 7y' + 12y = 0$ $\quad\left[y = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x}\right]$
2. $y'' - y' - 6y = 0$ $\quad\left[y = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{3x}\right]$
3. $y'' + 5y' = 0$ $\quad\left[y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-5x}\right]$
4. $4\frac{d^2x}{dt^2} - 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0$ $\quad\left[x = C_1\,\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t} + C_2 t\,\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}\right]$
5. $4y'' - 8y' + 5y = 0$ $\quad\left[y = \mathrm{e}^{x}\left(C_1 \cos\frac{x}{2} + C_2 \sin\frac{x}{2}\right)\right]$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1. $y'' - 7y' + 12y = 0$ $\qquad \left[y = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x}\right]$
2. $y'' - y' - 6y = 0$ $\qquad \left[y = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{3x}\right]$
3. $y'' + 5y' = 0$ $\qquad \left[y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-5x}\right]$
4. $4\frac{d^2x}{dt^2} - 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0$ $\qquad \left[x = C_1\,\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t} + C_2\,t\,\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}\right]$
5. $4y'' - 8y' + 5y = 0$ $\qquad \left[y = \mathrm{e}^{x}\left(C_1 \cos\frac{x}{2} + C_2 \sin\frac{x}{2}\right)\right]$
6. $y'' - 4y' + 13y = 0$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1. $y'' - 7y' + 12y = 0$ $\left[y = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x}\right]$
2. $y'' - y' - 6y = 0$ $\left[y = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{3x}\right]$
3. $y'' + 5y' = 0$ $\left[y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-5x}\right]$
4. $4\frac{d^2x}{dt^2} - 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0$ $\left[x = C_1\,\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t} + C_2\,t\,\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}\right]$
5. $4y'' - 8y' + 5y = 0$ $\left[y = \mathrm{e}^{x}\left(C_1 \cos\frac{x}{2} + C_2 \sin\frac{x}{2}\right)\right]$
6. $y'' - 4y' + 13y = 0$ $\left[y = \mathrm{e}^{2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right)\right]$

Příklady

Určete partikulární řešení diferenciální rovnice, které splňuje počáteční podmínky:

Příklady

Určete partikulární řešení diferenciální rovnice, které splňuje počáteční podmínky:

1. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0,\ y'(\frac{\pi}{2}) = 1$

Příklady

Určete partikulární řešení diferenciální rovnice, které splňuje počáteční podmínky:

1. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0,\ y'(\frac{\pi}{2}) = 1 \qquad \left[y = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x - \frac{\pi}{2}\sin 2x\right]$

Příklady

Určete partikulární řešení diferenciální rovnice, které splňuje počáteční podmínky:

1. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0,\ y'(\frac{\pi}{2}) = 1 \qquad \left[y = -\frac{1}{2}\,e^x - \frac{\pi}{2}\sin 2x\right]$
2. $y'' + 2hy' + h^2y = 0, \quad y(0) = a,\ y'(0) = C\,(a, C \in \mathbb{R})$

Příklady

Určete partikulární řešení diferenciální rovnice, které splňuje počáteční podmínky:

1. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0,\ y'(\frac{\pi}{2}) = 1 \qquad \left[y = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x - \frac{\pi}{2}\sin 2x\right]$
2. $y'' + 2hy' + h^2 y = 0, \quad y(0) = a,\ y'(0) = C (a, C \in \mathbb{R})$

   $\left[y = e^{-hx}(a + (C + ah)x)\right]$

Příklady

Určete partikulární řešení diferenciální rovnice, které splňuje počáteční podmínky:

1. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0,\ y'(\frac{\pi}{2}) = 1 \qquad \left[y = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x - \frac{\pi}{2}\sin 2x\right]$
2. $y'' + 2hy' + h^2 y = 0, \quad y(0) = a,\ y'(0) = C(a, C \in \mathbb{R})$

   $\left[y = e^{-hx}(a + (C + ah)x)\right]$
3. $\frac{d^2s}{dt^2} + 2a\frac{ds}{dt} + a^2 s = 0, \quad s(0) = a,\ s'(0) = 0$

Příklady

Určete partikulární řešení diferenciální rovnice, které splňuje počáteční podmínky:

1. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0,\ y'(\frac{\pi}{2}) = 1 \qquad \left[y = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x} - \frac{\pi}{2}\sin 2x\right]$
2. $y'' + 2hy' + h^2 y = 0, \quad y(0) = a,\ y'(0) = C (a, C \in \mathbb{R})$

   $\left[y = \mathrm{e}^{-hx}(a + (C + ah)x)\right]$
3. $\frac{d^2 s}{dt^2} + 2a\frac{ds}{dt} + a^2 s = 0, \quad s(0) = a,\ s'(0) = 0 \qquad \left[s = a\,\mathrm{e}^{-at} + a^2 t\,\mathrm{e}^{-at}\right]$

Příklady

Určete partikulární řešení diferenciální rovnice, které splňuje počáteční podmínky:

1. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0, \; y'(\frac{\pi}{2}) = 1 \qquad \left[y = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x} - \frac{\pi}{2}\sin 2x\right]$
2. $y'' + 2hy' + h^2 y = 0, \quad y(0) = a, \; y'(0) = C (a, C \in \mathbb{R})$

   $\left[y = \mathrm{e}^{-hx}(a + (C + ah)x)\right]$
3. $\frac{d^2 s}{dt^2} + 2a\frac{ds}{dt} + a^2 s = 0, \quad s(0) = a, \; s'(0) = 0 \qquad \left[s = a\,\mathrm{e}^{-at} + a^2 t\,\mathrm{e}^{-at}\right]$
4. $y'' - y = 0,$ integrální křivka se dotýká přímky $y = x$ v bodě $[0, 0]$

Příklady

Určete partikulární řešení diferenciální rovnice, které splňuje počáteční podmínky:

1. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0,\ y'(\frac{\pi}{2}) = 1 \qquad \left[y = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x - \frac{\pi}{2}\sin 2x\right]$
2. $y'' + 2hy' + h^2y = 0, \quad y(0) = a,\ y'(0) = C\,(a, C \in \mathbb{R})$

   $\left[y = \mathrm{e}^{-hx}(a + (C + ah)x)\right]$
3. $\frac{d^2s}{dt^2} + 2a\frac{ds}{dt} + a^2s = 0, \quad s(0) = a,\ s'(0) = 0 \qquad \left[s = a\,\mathrm{e}^{-at} + a^2t\,\mathrm{e}^{-at}\right]$
4. $y'' - y = 0$, integrální křivka se dotýká přímky $y = x$ v bodě $[0, 0]$

   $\left[y = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right]$