

Cvičení z matematické analýzy 3

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

4. 5. 2018

- 1 Opakování z minulé hodiny
- 2 LDR s pravou stranou (nehomogenní)
 - Řešení metodou variace konstant
 - Příklady
 - Řešení metodou neznámých koeficientů

Literatura

- Hájek, J., Dula, J.; *Cvičení z matematické analýzy - Obyčejné diferenciální rovnice*. MU Brno, 1998.
- Kuben, J.; *Obyčejné diferenciální rovnice*. UP Olomouc, 1995.

- Při řešení homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty $ay'' + by' + cy = 0$ (*) postupujeme tak, že vyřešíme tzv. charakteristickou rovnici $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, tzn. najdeme kořeny λ_1, λ_2
 - jsou-li λ_1, λ_2 dva různé reálné kořeny, má obecné řešení homogenní rovnice (*) tvar $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
 - má-li charakteristická rovnice dvojnásobný kořen $\lambda_1 = \lambda_2$, má obecné řešení homogenní rovnice (*) tvar $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$
 - je-li $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, má obecné řešení homogenní rovnice (*) tvar $y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

LDR (2. řádu) s pravou stranou (nehomogenní)

Řešení metodou variace konstant

LDR (2. řádu) s pravou stranou (nehomogenní)

Řešení metodou variace konstant

- Platí: $O\check{R}NLDR = O\check{R}HLDR + P\check{R}NLDR$
(O – obecné, \check{R} – řešení, N – nehomogenní, H – homogenní)

LDR (2. řádu) s pravou stranou (nehomogenní)

Řešení metodou variace konstant

- Platí: $O\check{R}NLDR = O\check{R}HLDR + P\check{R}NLDR$
(O – obecné, \check{R} – řešení, N – nehomogenní, H – homogenní)
- Při řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty s pravou stranou $ay'' + by' + cy = f(x)$ postupujeme následovně:

LDR (2. řádu) s pravou stranou (nehomogenní)

Řešení metodou variace konstant

- Platí: OŘNLDR = OŘHLDR + PŘNLDR
(O – obecné, Ř – řešení, N – nehomogenní, H – homogenní)
- Při řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty s pravou stranou $ay'' + by' + cy = f(x)$ postupujeme následovně:
 - 1 najdeme OŘHLDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$

LDR (2. řádu) s pravou stranou (nehomogenní)

Řešení metodou variace konstant

- Platí: OŘNLDR = OŘHLDR + PŘNLDR
(O – obecné, Ř – řešení, N – nehomogenní, H – homogenní)
- Při řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty s pravou stranou $ay'' + by' + cy = f(x)$ postupujeme následovně:
 - 1 najdeme OŘHLDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$
 - 2 PŘNLDR hledejme ve tvaru $y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$

LDR (2. řádu) s pravou stranou (nehomogenní)

Řešení metodou variace konstant

- Platí: OŘNLDR = OŘHLDR + PŘNLDR
(O – obecné, Ř – řešení, N – nehomogenní, H – homogenní)
- Při řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty s pravou stranou $ay'' + by' + cy = f(x)$ postupujeme následovně:
 - 1 najdeme OŘHLDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$
 - 2 PŘNLDR hledejme ve tvaru $y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$
 - 3 vypočítáme $y_p' = C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_1' + C_2'(x)y_2 + C_2(x)y_2'$

Řešení metodou variace konstant

- Platí: OŘNLDR = OŘHLDR + PŘNLDR
(O – obecné, Ř – řešení, N – nehomogenní, H – homogenní)
- Při řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty s pravou stranou $ay'' + by' + cy = f(x)$ postupujeme následovně:
 - 1 najdeme OŘHLDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$
 - 2 PŘNLDR hledejme ve tvaru $y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$
 - 3 vypočítáme $y_p' = C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_1' + C_2'(x)y_2 + C_2(x)y_2'$
 - 4 klademe $C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$
(abychom v y_p'' nepracovali s druhou derivací neznámých funkcí)

Řešení metodou variace konstant

- Platí: OŘNLDR = OŘHLDR + PŘNLDR
(O – obecné, Ř – řešení, N – nehomogenní, H – homogenní)
- Při řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty s pravou stranou $ay'' + by' + cy = f(x)$ postupujeme následovně:
 - 1 najdeme OŘHLDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$
 - 2 PŘNLDR hledejme ve tvaru $y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$
 - 3 vypočítáme $y_p' = C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_1' + C_2'(x)y_2 + C_2(x)y_2'$
 - 4 klademe $C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$
(abychom v y_p'' nepracovali s druhou derivací neznámých funkcí)
 - 5 vypočítáme $y_p'' = C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' + C_2(x)y_2''$

Řešení metodou variace konstant

- 6 dosadíme-li do původní rovnice y_p, y_p' a y_p'' , dostaneme po úpravě
- $$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$$

Řešení metodou variace konstant

- 6 dosadíme-li do původní rovnice y_p, y_p' a y_p'' , dostaneme po úpravě
$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$$
- 7 pro $C_1'(x), C_2'(x)$ dostáváme soustavu

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$$

Řešení metodou variace konstant

- 6 dosadíme-li do původní rovnice y_p, y_p' a y_p'' , dostaneme po úpravě
$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$$
- 7 pro $C_1'(x), C_2'(x)$ dostáváme soustavu

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$$

odkud určíme $C_1'(x)$ a $C_2'(x)$

Řešení metodou variace konstant

6 dosadíme-li do původní rovnice y_p, y_p' a y_p'' , dostaneme po úpravě
$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$$

7 pro $C_1'(x), C_2'(x)$ dostáváme soustavu

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$$

odkud určíme $C_1'(x)$ a $C_2'(x)$

8 vypočítáme $C_1(x)$ a $C_2(x)$
(volíme nulové integrační konstanty)

Řešení metodou variace konstant

6 dosadíme-li do původní rovnice y_p, y_p' a y_p'' , dostaneme po úpravě $C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$

7 pro $C_1'(x), C_2'(x)$ dostáváme soustavu

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$$

odkud určíme $C_1'(x)$ a $C_2'(x)$

8 vypočítáme $C_1(x)$ a $C_2(x)$

(volíme nulové integrační konstanty)

9 OŘNLDR má tak tvar $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + y_p$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1 $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

$$1 \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$$

$$[y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x e^x \ln |x|]$$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1 $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

2 $y'' - 7y' + 12y = 5$

$$[y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x e^x \ln |x|]$$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1 $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

2 $y'' - 7y' + 12y = 5$

$$[y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x e^x \ln |x|]$$

$$[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12}]$$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1 $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

2 $y'' - 7y' + 12y = 5$

3 $y'' - 2y' + y = x^{-2}e^x$

$$[y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x e^x \ln |x|]$$

$$[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12}]$$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1 $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

$$[y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x e^x \ln |x|]$$

2 $y'' - 7y' + 12y = 5$

$$[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12}]$$

3 $y'' - 2y' + y = x^{-2} e^x$

$$[y = C_1 e^x + C_2 x e^x - e^x \ln |x| - e^x]$$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1 $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

$$[y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x e^x \ln |x|]$$

2 $y'' - 7y' + 12y = 5$

$$[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12}]$$

3 $y'' - 2y' + y = x^{-2} e^x$

$$[y = C_1 e^x + C_2 x e^x - e^x \ln |x| - e^x]$$

4 $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

$$1 \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad [y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x e^x \ln |x|]$$

$$2 \quad y'' - 7y' + 12y = 5 \quad [y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12}]$$

$$3 \quad y'' - 2y' + y = x^{-2} e^x \quad [y = C_1 e^x + C_2 x e^x - e^x \ln |x| - e^x]$$

$$4 \quad y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad [y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - x \cos x + \sin x \ln |\sin x|]$$

Řešení metodou neznámých koeficientů

- Metoda vychází z předchozí metody, jen partikulární řešení volíme konkrétněji, s ohledem na pravou stranu.

Řešení metodou neznámých koeficientů

- Metoda vychází z předchozí metody, jen partikulární řešení volíme konkrétněji, s ohledem na pravou stranu.

Pravá strana ve tvaru polynomu

Řešení metodou neznámých koeficientů

- Metoda vychází z předchozí metody, jen partikulární řešení volíme konkrétněji, s ohledem na pravou stranu.

Pravá strana ve tvaru polynomu

- nejprve se budeme věnovat rovnicím s pravou stranou ve tvaru polynomu: $ay'' + by' + cy = P(x)$, kde $P(x)$ je polynom stupně n

Řešení metodou neznámých koeficientů

- Metoda vychází z předchozí metody, jen partikulární řešení volíme konkrétněji, s ohledem na pravou stranu.

Pravá strana ve tvaru polynomu

- nejprve se budeme věnovat rovnicím s pravou stranou ve tvaru polynomu: $ay'' + by' + cy = P(x)$, kde $P(x)$ je polynom stupně n
- 1 najdeme OŘHLDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$

Řešení metodou neznámých koeficientů

- Metoda vychází z předchozí metody, jen partikulární řešení volíme konkrétněji, s ohledem na pravou stranu.

Pravá strana ve tvaru polynomu

- nejprve se budeme věnovat rovnicím s pravou stranou ve tvaru polynomu: $ay'' + by' + cy = P(x)$, kde $P(x)$ je polynom stupně n

1 najdeme OŘHLDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$

2 PŘNLDR hledejme ve tvaru

- $y_p = Q(x)$, jestliže 0 není kořen charakteristické rovnice
- $y_p = x^k Q(x)$, je-li 0 k -násobný kořen charakteristické rovnice

kde $Q(x)$ je polynom stupně n , avšak s neznámými koeficienty (např. $Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \dots$)

Řešení metodou neznámých koeficientů

- Metoda vychází z předchozí metody, jen partikulární řešení volíme konkrétněji, s ohledem na pravou stranu.

Pravá strana ve tvaru polynomu

- vypočítáme y'_p a y''_p

Řešení metodou neznámých koeficientů

- Metoda vychází z předchozí metody, jen partikulární řešení volíme konkrétněji, s ohledem na pravou stranu.

Pravá strana ve tvaru polynomu

- vypočítáme y_p' a y_p''
- dosadíme y_p, y_p' a y_p'' do původní rovnice a upravíme

Řešení metodou neznámých koeficientů

- Metoda vychází z předchozí metody, jen partikulární řešení volíme konkrétněji, s ohledem na pravou stranu.

Pravá strana ve tvaru polynomu

- 3 vypočítáme y_p' a y_p''
- 4 dosadíme y_p, y_p' a y_p'' do původní rovnice a upravíme
- 5 pokud jsme počítali správně, vyjde rovnice s polynomy na obou stranách

Řešení metodou neznámých koeficientů

- Metoda vychází z předchozí metody, jen partikulární řešení volíme konkrétněji, s ohledem na pravou stranu.

Pravá strana ve tvaru polynomu

- 3 vypočítáme y_p' a y_p''
- 4 dosadíme y_p, y_p' a y_p'' do původní rovnice a upravíme
- 5 pokud jsme počítali správně, vyjde rovnice s polynomy na obou stranách
- 6 víme, že dva polynomy se rovnají právě tehdy, když
 - jsou stejného stupně
 - koeficienty u stejných mocnin jsou stejné

Řešení metodou neznámých koeficientů

- Metoda vychází z předchozí metody, jen partikulární řešení volíme konkrétněji, s ohledem na pravou stranu.

Pravá strana ve tvaru polynomu

- vypočítáme y_p' a y_p''
- dosadíme y_p, y_p' a y_p'' do původní rovnice a upravíme
- pokud jsme počítali správně, vyjde rovnice s polynomy na obou stranách
- víme, že dva polynomy se rovnají právě tehdy, když
 - jsou stejného stupně
 - koeficienty u stejných mocnín jsou stejné
- OŘNLDR má tak tvar $y = C_1y_1 + C_2y_2 + Q(x)$
($Q(x)$ má již dopočítané konkrétní koeficienty)

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1 $y'' - 7y' + 12y = 5$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

$$1 \quad y'' - 7y' + 12y = 5$$

$$\left[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12} \right]$$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1 $y'' - 7y' + 12y = 5$

$$\left[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12} \right]$$

2 $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

$$1 \quad y'' - 7y' + 12y = 5 \quad \left[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12} \right]$$

$$2 \quad y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5 \quad \left[y = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x + x^2 - 8x + 7 \right]$$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1 $y'' - 7y' + 12y = 5$ $[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12}]$

2 $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$
 $[y = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x + x^2 - 8x + 7]$

3 $y'' + y' - 2y = 6x^2$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

$$1 \quad y'' - 7y' + 12y = 5 \quad \left[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12} \right]$$

$$2 \quad y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5 \quad \left[y = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x + x^2 - 8x + 7 \right]$$

$$3 \quad y'' + y' - 2y = 6x^2 \quad \left[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - 3x^2 - 3x - \frac{9}{2} \right]$$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

$$1 \quad y'' - 7y' + 12y = 5 \quad \left[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12} \right]$$

$$2 \quad y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5 \quad \left[y = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x + x^2 - 8x + 7 \right]$$

$$3 \quad y'' + y' - 2y = 6x^2 \quad \left[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - 3x^2 - 3x - \frac{9}{2} \right]$$

$$4 \quad y'' + 3y' = 9x$$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

$$1 \quad y'' - 7y' + 12y = 5 \quad \left[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12} \right]$$

$$2 \quad y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5 \quad \left[y = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x + x^2 - 8x + 7 \right]$$

$$3 \quad y'' + y' - 2y = 6x^2 \quad \left[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - 3x^2 - 3x - \frac{9}{2} \right]$$

$$4 \quad y'' + 3y' = 9x \quad \left[y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x \right]$$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

$$1 \quad y'' - 7y' + 12y = 5 \quad \left[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12} \right]$$

$$2 \quad y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5 \quad \left[y = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x + x^2 - 8x + 7 \right]$$

$$3 \quad y'' + y' - 2y = 6x^2 \quad \left[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - 3x^2 - 3x - \frac{9}{2} \right]$$

$$4 \quad y'' + 3y' = 9x \quad \left[y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x \right]$$

$$5 \quad y'' + 4y' - 5y = 1$$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

$$1 \quad y'' - 7y' + 12y = 5 \quad \left[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12} \right]$$

$$2 \quad y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5 \quad \left[y = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x + x^2 - 8x + 7 \right]$$

$$3 \quad y'' + y' - 2y = 6x^2 \quad \left[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - 3x^2 - 3x - \frac{9}{2} \right]$$

$$4 \quad y'' + 3y' = 9x \quad \left[y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x \right]$$

$$5 \quad y'' + 4y' - 5y = 1 \quad \left[y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^x - \frac{1}{5} \right]$$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

$$1 \quad y'' - 7y' + 12y = 5 \quad \left[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12} \right]$$

$$2 \quad y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5 \quad \left[y = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x + x^2 - 8x + 7 \right]$$

$$3 \quad y'' + y' - 2y = 6x^2 \quad \left[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - 3x^2 - 3x - \frac{9}{2} \right]$$

$$4 \quad y'' + 3y' = 9x \quad \left[y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x \right]$$

$$5 \quad y'' + 4y' - 5y = 1 \quad \left[y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^x - \frac{1}{5} \right]$$

$$6 \quad y'' + y = 2x^3 - x + 2$$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

$$1 \quad y'' - 7y' + 12y = 5 \quad \left[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12} \right]$$

$$2 \quad y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5 \quad \left[y = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x + x^2 - 8x + 7 \right]$$

$$3 \quad y'' + y' - 2y = 6x^2 \quad \left[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - 3x^2 - 3x - \frac{9}{2} \right]$$

$$4 \quad y'' + 3y' = 9x \quad \left[y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x \right]$$

$$5 \quad y'' + 4y' - 5y = 1 \quad \left[y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^x - \frac{1}{5} \right]$$

$$6 \quad y'' + y = 2x^3 - x + 2 \quad \left[y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x^3 - 13x + 2 \right]$$