Soubor cvičení 19

4. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$

obecné řešení HLDR

- přidružená rovnice: $y'' + y = 0 \Rightarrow \boxed{y_0 = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x}$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm i \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 1$

- $y_p = C_1(x) \cdot \cos x + C_2(x) \cdot \sin x$ ... partikulární řešení NLDR

$y_p' = \underbrace{C_1'(x) \cdot \cos x} - C_1(x) \cdot \sin x + \underbrace{C_2'(x) \cdot \sin x} + C_2(x) \cdot \cos x$

Volíme podmínku (*): $C_1'(x) \cdot \cos x + C_2'(x) \cdot \sin x = 0$

$y_p' = -C_1(x) \cdot \sin x + C_2(x) \cdot \cos x$

- $y_p'' = -C_1'(x) \cdot \sin x - C_1(x) \cdot \cos x + C_2'(x) \cos x - C_2(x) \cdot \sin x$

- Dosadíme do původní rovnice:

$-C_1'(x) \sin x - \cancel{C_1(x) \cos x} + C_2'(x) \cos x - \cancel{C_2(x) \sin x} + \cancel{C_1(x) \cos x} + \cancel{C_2(x) \sin x} = \frac{1}{\sin x}$

$-C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\sin x} \quad / \cdot (-\sin x)$

(*) $C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \quad / \cdot \cos x$

$C_1'(x) \sin^2 x + C_1'(x) \cos^2 x = -1$

$C_1'(x) = -1$

$\underline{C_1(x) = -x}$ → dosadíme zpátky do (*)

(*): $-\cos x + C_2'(x) \sin x = 0$

$C_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

$C_2(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \\ dx = \frac{dt}{\cos x} \end{array} \right.$

$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|\sin x|$

Celkem: $y = y_0 + y_p = \underline{C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x - x \cdot \cos x + \sin x \cdot \ln|\sin x|}$