

Cvičení z matematické analýzy 3

2. vnitrosemestrální písemka, lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

24. 4. 2018

- 1 2. vnitroseměstrální písemka
- 2 Opakování z minulé hodiny
 - Řešení metodou neznámých koeficientů
- 3 Další typy pravé strany
 - exponenciální funkce (případně exponenciální funkce a polynom)
 - goniometrické funkce

Literatura

- Hájek, J., Dula, J.; *Cvičení z matematické analýzy - Obyčejné diferenciální rovnice*. MU Brno, 1998.
- Kuben, J.; *Obyčejné diferenciální rovnice*. UP Olomouc, 1995.

2. vnitroseměstrální písemka

Řešte diferenciální rovnici

1 $y' \cdot \sin x \cdot \sin y = \cos x \cos y$
s počáteční podmínkou $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$$\left[y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2 \sin x} \right]$$

2 $y'(1 + x^2) + 4xy = 0$

$$\left[y = \frac{x^3 + 3x + c}{(1 + x^2)^2} \right]$$

3 $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$

$$\left[y = \frac{2x + cx^4}{1 - cx^3} \right]$$

4 $y'' - 3y' + 2y = 7x + 2$

$$\left[y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{7}{2}x + \frac{25}{4} \right]$$

Řešení NLDR s KK metodou neznámých koeficientů

Pravá strana ve tvaru polynomu

- Rovnice s pravou stranou ve tvaru polynomu:

$$ay'' + by' + cy = P_n(x), \text{ kde } P_n(x) \text{ je polynom stupně } n$$

- 1 najdeme OŘHLDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$

- 2 PŘNLDR hledáme ve tvaru

- $y_p = Q_n(x)$, jestliže 0 není kořen charakteristické rovnice
- $y_p = x^k Q_n(x)$, je-li 0 k-násobný kořen charakteristické rovnice

kde $Q(x)$ je polynom stupně n s neznámými koeficienty

- 3 vypočítáme y'_p a y''_p , dosadíme y_p, y'_p a y''_p do původní rovnice a upravíme
- 4 pokud jsme počítali správně, vyjde rovnice s polynomy na obou stranách - odtud dopočítáme koeficienty polynomu $Q_n(x)$
- 5 OŘNLDR má tvar $y = C_1y_1 + C_2y_2 + (x^k)Q_n(x)$

Řešení NLDR s KK metodou neznámých koeficientů

Pravá strana ve tvaru $e^{qx} \cdot P_n(x)$

Pravá strana ve tvaru $e^{qx} \cdot P_n(x)$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = e^{qx} \cdot P_n(x)$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n

Pravá strana ve tvaru $e^{qx} \cdot P_n(x)$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = e^{qx} \cdot P_n(x)$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n
- 1 najdeme OŘHLDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$

Pravá strana ve tvaru $e^{qx} \cdot P_n(x)$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = e^{qx} \cdot P_n(x)$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n
- 1 najdeme OŘHLDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$
- 2 PŘNLDR hledáme ve tvaru
 - $y_p = e^{qx} Q_n(x)$, jestliže q není kořen charakteristické rovnice
 - $y_p = x^k e^{qx} Q_n(x)$, je-li q k -násobný kořen charakteristické rovnicekde $Q_n(x)$ je polynom stupně n s neznámými koeficienty

Pravá strana ve tvaru $e^{qx} \cdot P_n(x)$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = e^{qx} \cdot P_n(x)$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n
- 1 najdeme OŘHLDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$
 - 2 PŘNLDR hledáme ve tvaru
 - $y_p = e^{qx} Q_n(x)$, jestliže q není kořen charakteristické rovnice
 - $y_p = x^k e^{qx} Q_n(x)$, je-li q k -násobný kořen charakteristické rovnicekde $Q_n(x)$ je polynom stupně n s neznámými koeficienty
 - 3 vypočítáme y'_p a y''_p , dosadíme y_p, y'_p a y''_p do původní rovnice a upravíme

Pravá strana ve tvaru $e^{qx} \cdot P_n(x)$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = e^{qx} \cdot P_n(x)$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n
- 1 najdeme OŘHLDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$
- 2 PŘNLDR hledáme ve tvaru
 - $y_p = e^{qx} Q_n(x)$, jestliže q není kořen charakteristické rovnice
 - $y_p = x^k e^{qx} Q_n(x)$, je-li q k -násobný kořen charakteristické rovnicekde $Q_n(x)$ je polynom stupně n s neznámými koeficienty
- 3 vypočítáme y'_p a y''_p , dosadíme y_p, y'_p a y''_p do původní rovnice a upravíme
- 4 pokud jsme počítali správně, vyjde po úpravě a vykrácení výrazem e^{qx} rovnice s polynomy na obou stranách, odkud dopočítáme neznáme koeficienty polynomu $Q_n(x)$

Pravá strana ve tvaru $e^{qx} \cdot P_n(x)$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = e^{qx} \cdot P_n(x)$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n
- 1 najdeme OŘHLDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$
- 2 PŘNLDR hledáme ve tvaru
 - $y_p = e^{qx} Q_n(x)$, jestliže q není kořen charakteristické rovnice
 - $y_p = x^k e^{qx} Q_n(x)$, je-li q k -násobný kořen charakteristické rovnicekde $Q_n(x)$ je polynom stupně n s neznámými koeficienty
- 3 vypočítáme y'_p a y''_p , dosadíme y_p, y'_p a y''_p do původní rovnice a upravíme
- 4 pokud jsme počítali správně, vyjde po úpravě a vykrácení výrazem e^{qx} rovnice s polynomy na obou stranách, odkud dopočítáme neznáme koeficienty polynomu $Q_n(x)$
- 5 OŘNLDR má tvar $y = C_1y_1 + C_2y_2 + (x^k) e^{qx} Q_n(x)$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1 $y'' - 2y' + y = e^{2x}$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

$$1 \quad y'' - 2y' + y = e^{2x}$$

$$[y = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^{2x}]$$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1 $y'' - 2y' + y = e^{2x}$

$$[y = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^{2x}]$$

2 $y'' + y' - 2y = 3x e^x$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1 $y'' - 2y' + y = e^{2x}$ $[y = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^{2x}]$

2 $y'' + y' - 2y = 3x e^x$ $[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x) e^x]$

Pravá strana ve tvaru $m \cos px + n \sin px$, $m, n, p \in \mathbb{R}$

Pravá strana ve tvaru $m \cos px + n \sin px$, $m, n, p \in \mathbb{R}$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = m \cos kx + n \sin kx$

Pravá strana ve tvaru $m \cos px + n \sin px$, $m, n, p \in \mathbb{R}$

■ Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = m \cos kx + n \sin kx$

1 najdeme OŘHLDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$

Pravá strana ve tvaru $m \cos px + n \sin px$, $m, n, p \in \mathbb{R}$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = m \cos kx + n \sin kx$
- 1 najdeme OŘHLDR: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$
- 2 PŘNLDR hledáme ve tvaru
 - $y_p = A \cos kx + B \sin kx$, jestliže $\pm ki$ nejsou kořeny char. rovnice
 - $y_p = x(A \cos kx + B \sin kx)$, jsou-li $\pm ki$ kořeny charakteristické rovnice

Pravá strana ve tvaru $m \cos px + n \sin px$, $m, n, p \in \mathbb{R}$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = m \cos kx + n \sin kx$
- 1 najdeme OŘHLDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$
- 2 PŘNLDR hledáme ve tvaru
 - $y_p = A \cos kx + B \sin kx$, jestliže $\pm ki$ nejsou kořeny char. rovnice
 - $y_p = x(A \cos kx + B \sin kx)$, jsou-li $\pm ki$ kořeny charakteristické rovnice
- 3 vypočítáme y'_p a y''_p , dosadíme y_p, y'_p a y''_p do původní rovnice a upravíme

Pravá strana ve tvaru $m \cos px + n \sin px$, $m, n, p \in \mathbb{R}$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = m \cos kx + n \sin kx$
- 1 najdeme OŘHLDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$
- 2 PŘNLDR hledáme ve tvaru
 - $y_p = A \cos kx + B \sin kx$, jestliže $\pm ki$ nejsou kořeny char. rovnice
 - $y_p = x(A \cos kx + B \sin kx)$, jsou-li $\pm ki$ kořeny charakteristické rovnice
- 3 vypočítáme y'_p a y''_p , dosadíme y_p, y'_p a y''_p do původní rovnice a upravíme
- 4 porovnáním obou stran rovnice dopočítáme koeficienty A, B

Pravá strana ve tvaru $m \cos px + n \sin px$, $m, n, p \in \mathbb{R}$

- Rovnice ve tvaru $ay'' + by' + cy = m \cos kx + n \sin kx$
- 1 najdeme OŘHLDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$
- 2 PŘNLDR hledáme ve tvaru
 - $y_p = A \cos kx + B \sin kx$, jestliže $\pm ki$ nejsou kořeny char. rovnice
 - $y_p = x(A \cos kx + B \sin kx)$, jsou-li $\pm ki$ kořeny charakteristické rovnice
- 3 vypočítáme y'_p a y''_p , dosadíme y_p, y'_p a y''_p do původní rovnice a upravíme
- 4 porovnáním obou stran rovnice dopočítáme koeficienty A, B
- 5 OŘNLDR má tvar $y = C_1y_1 + C_2y_2 + (x)(A \cos kx + B \sin kx)$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1 $y'' - 4y = 3 \sin 2x$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1 $y'' - 4y = 3 \sin 2x$

$$\left[y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{2x} - \frac{3}{8} \sin 2x \right]$$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1 $y'' - 4y = 3 \sin 2x$

$$\left[y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{2x} - \frac{3}{8} \sin 2x \right]$$

2 $y'' - 2y' + 10y = 37 \cos 3x$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1 $y'' - 4y = 3 \sin 2x$ $[y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{2x} - \frac{3}{8} \sin 2x]$

2 $y'' - 2y' + 10y = 37 \cos 3x$
 $[y = C_1 e^x \cos 3x + C_2 e^x \sin 3x + \cos 3x - 6 \sin 3x]$

To je vše přátelé!

