Cvičení z matematické analýzy 3

Alternující řady, obor konvergence funkčních řad

6. 3. 2018

Náplň cvičení

1. Alternující řady
   - Základní pojmy
   - Absolutní konvergence
   - Příklady
2. Obor konvergence funkčních řad
   - Základní pojmy
   - Zjišťování oboru konvergence
   - Příklady

Literatura

- Hájek, J., Dula, J.; *Cvičení z matematické analýzy - Nekonečné řady*. MU Brno, 1994.
- Došlá, Z., Novák, V.; *Nekonečné řady*. MU Brno, 2013.

Alternující řady

Základní pojmy

Základní pojmy

Alternující řada

Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá **alternující**, jestliže pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$$

Základní pojmy

Alternující řada

Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá **alternující**, jestliže pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$$

Kritérium konvergence (Leibnizovo)

Nechť a_n je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Pak alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konverguje právě tehdy, když platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Věta má tvar ekvivalence, znamená to tedy (mimo jiné), že

- je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konverguje;
- vlastnost $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ je nutná i dostatečná podmínka konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$.

Absolutní konvergence číselných řad

Absolutní konvergence číselných řad

Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Absolutní konvergence číselných řad

Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Absolutní/neabsolutní konvergence

- Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje absolutně**, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
- Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje neabsolutně**, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje.

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ [konverguje neabsolutně]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ [konverguje absolutně]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{5n-2}$ [diverguje]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt[n]{n}}$ [diverguje]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{1+n}$ [konverguje neabsolutně]

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ [konverguje neabsolutně]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ [konverguje absolutně]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{5n-2}$ [diverguje]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt[n]{n}}$ [diverguje]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{1+n}$ [konverguje neabsolutně]
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n\sqrt{n}}$

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ [konverguje neabsolutně]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ [konverguje absolutně]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{5n-2}$ [diverguje]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt[n]{n}}$ [diverguje]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{1+n}$ [konverguje neabsolutně]
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n\sqrt{n}}$ [konverguje absolutně]

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ [konverguje neabsolutně]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ [konverguje absolutně]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{5n-2}$ [diverguje]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt[n]{n}}$ [diverguje]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{1+n}$ [konverguje neabsolutně]
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n\sqrt{n}}$ [konverguje absolutně]
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}\ln n}{n}$

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ [konverguje neabsolutně]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ [konverguje absolutně]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{5n-2}$ [diverguje]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt[n]{n}}$ [diverguje]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{1+n}$ [konverguje neabsolutně]
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n\sqrt{n}}$ [konverguje absolutně]
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} \ln n}{n}$ [konverguje neabsolutně]

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ [konverguje neabsolutně]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ [konverguje absolutně]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{5n-2}$ [diverguje]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt[n]{n}}$ [diverguje]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{1+n}$ [konverguje neabsolutně]
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n\sqrt{n}}$ [konverguje absolutně]
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} \ln n}{n}$ [konverguje neabsolutně]
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n-\ln n}$

Příklady

Rozhodněte o konvergenci (absolutní/neabsolutní) řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ [konverguje neabsolutně]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ [konverguje absolutně]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{5n-2}$ [diverguje]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt[n]{n}}$ [diverguje]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{1+n}$ [konverguje neabsolutně]
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n\sqrt{n}}$ [konverguje absolutně]
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}\ln n}{n}$ [konverguje neabsolutně]
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n-\ln n}$ [konverguje neabsolutně]

Obor konvergence funkčních řad

Základní pojmy

Základní pojmy

Bodová konvergence posloupnosti funkcí

- Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí na intervalu I a $c \in I$ je libovolné. Je-li číselná posloupnost $\{f_n(c)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, říkáme, že **posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní v bodě c.**
- Řekneme, Že **posloupnost funkcí bodově konverguje k funkci $f(x)$ na intervalu I**, jestliže konverguje v každém bodě $x \in I$, tj. ke každému $x \in I$ a každému $\epsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}, n \geq n$,platí $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Píšeme $\lim f_n(x) = f(x)$ pro $x \in I$ nebo $f_n \to f$ na I.
- Největší množinu, na níž posloupnost funkcí bodově konverguje, nazýváme **obor konvergence posloupnosti funkcí $\{f_n(x)\}$.**

Základní pojmy

Bodová konvergence řad funkcí

- Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu I. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nebo $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots$ nazýváme **nekonečná řada funkcí**.
- Posloupnost $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, kde $s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$, nazýváme **posloupností částečných součtů řady** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
- Jestliže posloupnost částečných součtů $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje pro všechna $x \in I$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ bodově konverguje na intervalu I a **funkci** $s(x) = \lim s_n(x)$ **nazýváme součtem řady** $\sum f_n(x)$.
- Největší množinu, na níž řada funkcí bodově konverguje, nazýváme **obor konvergence řady funkcí** $\sum f_n(x)$.

Zjišťování oboru konvergence řady funkcí

Postup při zjišťování oboru konvergence

proměnnou x považujeme za parametr, pro nějž zjišťujeme konvergenci číselné řady (pracujeme tedy s abs. hodnotami)

Zjišťování oboru konvergence řady funkcí

Postup při zjišťování oboru konvergence

proměnnou x považujeme za parametr, pro nějž zjišťujeme konvergenci číselné řady (pracujeme tedy s abs. hodnotami)

1. pomocí vhodného kritéria (zpravidla limitní podílové či odmocninové) zjistíme, pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje:

Zjišťování oboru konvergence řady funkcí

Postup při zjišťování oboru konvergence

proměnnou x považujeme za parametr, pro nějž zjišťujeme konvergenci číselné řady (pracujeme tedy s abs. hodnotami)

1. pomocí vhodného kritéria (zpravidla limitní podílové či odmocninové) zjistíme, pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje:
   1. vypočteme příslušnou limitu L(x) pro $n \to \infty$ (závislou na parametru x)

Zjišťování oboru konvergence řady funkcí

Postup při zjišťování oboru konvergence

proměnnou x považujeme za parametr, pro nějž zjišťujeme konvergenci číselné řady (pracujeme tedy s abs. hodnotami)

1. pomocí vhodného kritéria (zpravidla limitní podílové či odmocninové) zjistíme, pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje:
   1. vypočteme příslušnou limitu L(x) pro $n \to \infty$ (závislou na parametru x)
   2. vyřešíme nerovnici $L(x) < 1$

Zjišťování oboru konvergence řady funkcí

Postup při zjišťování oboru konvergence

proměnnou x považujeme za parametr, pro nějž zjišťujeme konvergenci číselné řady (pracujeme tedy s abs. hodnotami)

1. pomocí vhodného kritéria (zpravidla limitní podílové či odmocninové) zjistíme, pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje:
   1. vypočteme příslušnou limitu L(x) pro $n \to \infty$ (závislou na parametru x)
   2. vyřešíme nerovnici $L(x) < 1$
2. vyšetříme chování v krajních bodech případného intervalu konvergence (tj. dosadíme ta x, pro něž je $L(x) = \pm 1$)

Zjišťování oboru konvergence řady funkcí

Postup při zjišťování oboru konvergence

proměnnou x považujeme za parametr, pro nějž zjišťujeme konvergenci číselné řady (pracujeme tedy s abs. hodnotami)

1. pomocí vhodného kritéria (zpravidla limitní podílové či odmocninové) zjistíme, pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje:
   1. vypočteme příslušnou limitu L(x) pro $n \to \infty$ (závislou na parametru x)
   2. vyřešíme nerovnici $L(x) < 1$
2. vyšetříme chování v krajních bodech případného intervalu konvergence (tj. dosadíme ta x, pro něž je $L(x) = \pm 1$)

Poznámka: Vzpomenete si na Taylorovy polynomy (mat. analýza 1)? Mnohé o oboru konvergence řady funkcí naznačí tyto animace: `http://cgi.math.muni.cz/kriz/cz/`

Příklady

Určete obor konvergence řady

Příklady

Určete obor konvergence řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

Příklady

Určete obor konvergence řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ [obor konvergence: $(-1, 1)$]

Příklady

Určete obor konvergence řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ [obor konvergence: $(-1,1)$]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}}$

Příklady

Určete obor konvergence řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ [obor konvergence: $(-1, 1)$]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{n-1}}{(2n-1)^2 \sqrt{3^{n-1}}}$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle\right]$

Příklady

Určete obor konvergence řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ [obor konvergence: $(-1, 1)$]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{n-1}}{(2n-1)^2 \sqrt{3^{n-1}}}$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle\right]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$

Příklady

Určete obor konvergence řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ $\quad$ [obor konvergence: $(-1,1)$]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}}$ $\quad$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle\right]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$ $\quad$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right)\right]$

Příklady

Určete obor konvergence řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ [obor konvergence: $(-1, 1)$]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}}$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle\right]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right)\right]$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2x}{x+4} \right)^n$

Určete obor konvergence řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ $\quad$ [obor konvergence: $(-1, 1)$]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}}$ $\quad$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle\right]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$ $\quad$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right)\right]$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2x}{x+4}\right)^n$ $\quad$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{4}{3}, 4 \right)\right]$

Určete obor konvergence řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ [obor konvergence: $(-1,1)$]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}}$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle\right]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right)\right]$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2x}{x+4}\right)^n$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{4}{3}, 4 \right)\right]$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$

Příklady

Určete obor konvergence řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ [obor konvergence: $(-1,1)$]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}}$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle\right]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right)\right]$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2x}{x+4}\right)^n$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{4}{3}, 4 \right)\right]$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3} \right)\right]$

Domácí úkol

Do příští hodiny si zopakujte veškerou probranou látku a přichystejte si příklady, kterým jste (v předchozích cvičeních či při samostatné práci) nerozuměli. Na začátku 4. cvičení se jim budeme (po omezenou dobu) věnovat.