Cvičení z matematické analýzy 3

Obor konvergence funkčních řad, integrace, derivace řad

13. 3. 2018

Náplň cvičení

Literatura

- Hájek, J., Dula, J.; *Cvičení z matematické analýzy - Nekonečné řady*. MU Brno, 1994.
- Došlá, Z., Novák, V.; *Nekonečné řady*. MU Brno, 2013.

Obor konvergence funkčních řad

Základní pojmy

Základní pojmy

Bodová konvergence posloupnosti funkcí

- Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí na intervalu I a $c \in I$ je libovolné. Je-li číselná posloupnost $\{f_n(c)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, říkáme, že **posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní v bodě c.**
- Řekneme, Že **posloupnost funkcí bodově konverguje k funkci $f(x)$ na intervalu I**, jestliže konverguje v každém bodě $x \in I$, tj. ke každému $x \in I$ a každému $\epsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}, n \geq n$,platí $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Píšeme $\lim f_n(x) = f(x)$ pro $x \in I$ nebo $f_n \to f$ na I.
- Největší množinu, na níž posloupnost funkcí bodově konverguje, nazýváme **obor konvergence posloupnosti funkcí $\{f_n(x)\}$.**

Základní pojmy

Bodová konvergence řad funkcí

- Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu I. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nebo $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots$ nazýváme **nekonečná řada funkcí**.
- Posloupnost $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, kde $s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$, nazýváme **posloupností částečných součtů řady** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
- Jestliže posloupnost částečných součtů $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje pro všechna $x \in I$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ bodově konverguje na intervalu I a **funkci** $s(x) = \lim s_n(x)$ **nazýváme součtem řady** $\sum f_n(x)$.
- Největší množinu, na níž řada funkcí bodově konverguje, nazýváme **obor konvergence řady funkcí** $\sum f_n(x)$.

Zjišťování oboru konvergence řady funkcí

Postup při zjišťování oboru konvergence

proměnnou x považujeme za parametr, pro nějž zjišťujeme konvergenci číselné řady (pracujeme tedy s abs. hodnotami)

Zjišťování oboru konvergence řady funkcí

Postup při zjišťování oboru konvergence

proměnnou x považujeme za parametr, pro nějž zjišťujeme konvergenci číselné řady (pracujeme tedy s abs. hodnotami)

1. pomocí vhodného kritéria (zpravidla limitní podílové či odmocninové) zjistíme, pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje:

Zjišťování oboru konvergence řady funkcí

Postup při zjišťování oboru konvergence

proměnnou x považujeme za parametr, pro nějž zjišťujeme konvergenci číselné řady (pracujeme tedy s abs. hodnotami)

1. pomocí vhodného kritéria (zpravidla limitní podílové či odmocninové) zjistíme, pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje:
    1. vypočteme příslušnou limitu L(x) pro $n \to \infty$ (závislou na parametru x)

Zjišťování oboru konvergence řady funkcí

Postup při zjišťování oboru konvergence

proměnnou x považujeme za parametr, pro nějž zjišťujeme konvergenci číselné řady (pracujeme tedy s abs. hodnotami)

1. pomocí vhodného kritéria (zpravidla limitní podílové či odmocninové) zjistíme, pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje:
   1. vypočteme příslušnou limitu L(x) pro $n \to \infty$ (závislou na parametru x)
   2. vyřešíme nerovnici $L(x) < 1$

Zjišťování oboru konvergence řady funkcí

Postup při zjišťování oboru konvergence

proměnnou x považujeme za parametr, pro nějž zjišťujeme konvergenci číselné řady (pracujeme tedy s abs. hodnotami)

1. pomocí vhodného kritéria (zpravidla limitní podílové či odmocninové) zjistíme, pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje:
   1. vypočteme příslušnou limitu L(x) pro $n \to \infty$ (závislou na parametru x)
   2. vyřešíme nerovnici $L(x) < 1$
2. vyšetříme chování v krajních bodech případného intervalu konvergence (tj. dosadíme ta x, pro něž je $L(x) = \pm 1$)

Zjišťování oboru konvergence řady funkcí

Postup při zjišťování oboru konvergence

proměnnou x považujeme za parametr, pro nějž zjišťujeme konvergenci číselné řady (pracujeme tedy s abs. hodnotami)

1. pomocí vhodného kritéria (zpravidla limitní podílové či odmocninové) zjistíme, pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje:
   1. vypočteme příslušnou limitu L(x) pro $n \to \infty$ (závislou na parametru x)
   2. vyřešíme nerovnici $L(x) < 1$
2. vyšetříme chování v krajních bodech případného intervalu konvergence (tj. dosadíme ta x, pro něž je $L(x) = \pm 1$)

Poznámka: Vzpomenete si na Taylorovy polynomy (mat. analýza 1)? Mnohé o oboru konvergence řady funkcí naznačí tyto animace: `http://cgi.math.muni.cz/kriz/cz/`

Určete obor konvergence řady

Příklady

Určete obor konvergence řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

Příklady

Určete obor konvergence řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ [obor konvergence: $(-1, 1)$]

Příklady

Určete obor konvergence řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ [obor konvergence: $(-1, 1)$]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{n-1}}{(2n-1)^2 \sqrt{3^{n-1}}}$

Příklady

Určete obor konvergence řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ [obor konvergence: $(-1,1)$]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}}$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle\right]$

Určete obor konvergence řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ [obor konvergence: $(-1,1)$]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}}$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle \right]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$

Příklady

Určete obor konvergence řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ $\qquad$ [obor konvergence: $(-1, 1)$]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{n-1}}{(2n-1)^2 \sqrt{3^{n-1}}}$ $\qquad$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle\right]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$ $\qquad$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}} \right)\right]$

Příklady

Určete obor konvergence řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ [obor konvergence: $(-1,1)$]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}}$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle\right]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right)\right]$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2x}{x+4}\right)^n$

Příklady

Určete obor konvergence řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ [obor konvergence: $(-1,1)$]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}}$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle\right]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right)\right]$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2x}{x+4}\right)^n$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{4}{3}, 4 \right)\right]$

Určete obor konvergence řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ [obor konvergence: $(-1,1)$]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}}$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle\right]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)\right]$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2x}{x+4}\right)^n$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{4}{3}, 4\right)\right]$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$

Příklady

Určete obor konvergence řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ [obor konvergence: $(-1,1)$]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}}$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle\right]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right)\right]$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2x}{x+4}\right)^n$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{4}{3}, 4 \right)\right]$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$ $\left[\text{obor konvergence: } \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3} \right)\right]$

Integrace a derivace řad funkcí

Následující vlastnosti platí pro řady stejnoměrně konvergentní (viz přednáška).

Integrace a derivace řad funkcí

Následující vlastnosti platí pro řady stejnoměrně konvergentní (viz přednáška).

- Nechť řada funkcí $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má součet s. Jestliže všechny funkce f_n jsou integrovatelné na $\langle a, b\rangle$, je také funkce s integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b s(x)dx = \int_a^b \left(\sum f_n(x)dx\right) = \sum \left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$$

Integrace a derivace řad funkcí

Následující vlastnosti platí pro řady stejnoměrně konvergentní (viz přednáška).

- Nechť řada funkcí $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má součet s. Jestliže všechny funkce f_n jsou integrovatelné na $\langle a, b\rangle$, je také funkce s integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b s(x)dx = \int_a^b \left(\sum f_n(x)dx\right) = \sum \left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$$

- Buď $\{f_n\}$ posloupnost funkcí, které mají na otevřeném intervalu (a, b) derivaci. Nechť $\sum f_n$ konverguje na (a, b) a má součet s a dále nechť $\sum f_n'$ konverguje stejnoměrně na (a, b). Pak funkce s má na (a, b) derivaci a platí

$$s'(x) = \left(\sum f_n(x)\right)' = \sum f_n'(x)$$

Příklady

Určete součet číselné řady

Příklady

Určete součet číselné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$

Příklady

Určete součet číselné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ [ln 2]

Příklady

Určete součet číselné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ [ln 2]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

Příklady

Určete součet číselné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ $[\ln 2]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

Mocninné řady

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

Mocninné řady

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

- Mocninnou řadou se středem v bodě x_0 a koeficienty a_n rozumíme řadu funkcí tvaru $\sum a_n(x - x_0)^n$.

Mocninné řady

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

- Mocninnou řadou se středem v bodě x_0 a koeficienty a_n rozumíme řadu funkcí tvaru $\sum a_n(x - x_0)^n$.
- Každá mocninná řada konverguje ve svém středu x_0.

Mocninné řady

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

- Mocninnou řadou se středem v bodě x_0 a koeficienty a_n rozumíme řadu funkcí tvaru $\sum a_n(x-x_0)^n$.
- Každá mocninná řada konverguje ve svém středu x_0.
- Je-li $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = K$, nazýváme
  - číslo $r = \frac{1}{K}$ poloměr konvergence
  - interval $\left(x_0 - \frac{1}{K}, x_0 + \frac{1}{K}\right)$ interval konvergence

Mocninné řady

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

- Mocninnou řadou se středem v bodě x_0 a koeficienty a_n rozumíme řadu funkcí tvaru $\sum a_n(x - x_0)^n$.
- Každá mocninná řada konverguje ve svém středu x_0.
- Je-li $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = K$, nazýváme
  - číslo $r = \frac{1}{K}$ poloměr konvergence
  - interval $\left(x_0 - \frac{1}{K}, x_0 + \frac{1}{K}\right)$ interval konvergence
- Pro poloměr konvergence r rovněž platí:
  - Existuje-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, je $r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.
  - Existuje-li $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, je $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Příklady

Určete součet mocninné řady

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1, 1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \right]$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1, 1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1, 1\rangle, s(x) = (x+1) \ln (x+1) - x]$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1, 1\rangle\,, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1, 1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1, 1\rangle\,, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $[I = \langle -1, 1\rangle\,, s(x) = \operatorname{arctg} x]$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1, 1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1, 1\rangle, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $[I = \langle -1, 1\rangle, s(x) = \operatorname{arctg} x]$

Užitím derivování nebo integrování určete součet mocninné řady

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1, 1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1, 1\rangle\,, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $[I = \langle -1, 1\rangle\,, s(x) = \operatorname{arctg} x]$

Užitím derivování nebo integrování určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1,1\rangle\,, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $[I = \langle -1,1\rangle\,, s(x) = \operatorname{arctg} x]$

Užitím derivování nebo integrování určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{(1-x)}\right]$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1,1\rangle\,, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $[I = \langle -1,1\rangle\,, s(x) = \operatorname{arctg} x]$

Užitím derivování nebo integrování určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{(1-x)}\right]$
2. $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \dots$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1,1\rangle, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $[I = \langle -1,1\rangle, s(x) = \operatorname{arctg} x]$

Užitím derivování nebo integrování určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{(1-x)}\right]$
2. $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \dots$ $\left[I = (-1,1)\setminus\{0\}, s(x) = 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x)\right]$

Domácí úkol

Naučit se na 1. vnitrosemestrální písmku ;-)

Domácí úkol

Naučit se na 1. vnitrosemestrální písmku ;-)

Obsah:

- součet číselné řady
- stanovení konvergence/divergence číselné řady podle kritérií
  - u řad s kladnými členy
  - u řad alternujících
- stanovení oboru konvergence řady funkcí