Cvičení z matematické analýzy 3

Zápočtový test, obor konvergence funkčních řad, integrace, derivace řad

20. 3. 2018

Náplň cvičení

Literatura

- Hájek, J., Dula, J.; *Cvičení z matematické analýzy - Nekonečné řady*. MU Brno, 1994.
- Došlá, Z., Novák, V.; *Nekonečné řady*. MU Brno, 2013.

1. zápočtový test

1. zápočtový test

1. zápočtový test

Zadání

1. Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$
2. Užitím vhodného kriteria rozhodněte o konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
3. Rozhodněte o (absolutní/neabsolutní) konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$
4. Určete interval konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3 2^n} x^n$

1. zápočtový test

Řešení

1. Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$
2. Užitím vhodného kriteria rozhodněte o konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
3. Rozhodněte o (absolutní/neabsolutní) konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$
4. Určete interval konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3 2^n} x^n$

1. zápočtový test

Řešení

1. Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

2. Užitím vhodného kriteria rozhodněte o konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

3. Rozhodněte o (absolutní/neabsolutní) konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$

4. Určete interval konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3 2^n} x^n$

1. zápočtový test

Řešení

1. Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$
2. Užitím vhodného kriteria rozhodněte o konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ [řada konverguje]
3. Rozhodněte o (absolutní/neabsolutní) konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$
4. Určete interval konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3 2^n} x^n$

Řešení

1. Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$
2. Užitím vhodného kriteria rozhodněte o konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ [řada konverguje]
3. Rozhodněte o (absolutní/neabsolutní) konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$ [řada konverguje neabsolutně]
4. Určete interval konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3 2^n} x^n$

1. zápočtový test

Řešení

1. Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$
2. Užitím vhodného kriteria rozhodněte o konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ [řada konverguje]
3. Rozhodněte o (absolutní/neabsolutní) konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$ [řada konverguje neabsolutně]
4. Určete interval konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3 2^n} x^n$ $[\langle -2, 2)]$

Integrace a derivace řad funkcí

Následující vlastnosti platí pro řady stejnoměrně konvergentní
(viz přednáška).

Integrace a derivace řad funkcí

Následující vlastnosti platí pro řady stejnoměrně konvergentní (viz přednáška).

- Nechť řada funkcí $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má součet s. Jestliže všechny funkce f_n jsou integrovatelné na $\langle a, b\rangle$, je také funkce s integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b s(x)dx = \int_a^b \left(\sum f_n(x)dx\right) = \sum \left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$$

Integrace a derivace řad funkcí

Následující vlastnosti platí pro řady stejnoměrně konvergentní (viz přednáška).

- Nechť řada funkcí $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má součet s. Jestliže všechny funkce f_n jsou integrovatelné na $\langle a, b\rangle$, je také funkce s integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b s(x)dx = \int_a^b \left(\sum f_n(x)dx\right) = \sum \left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$$

- Buď $\{f_n\}$ posloupnost funkcí, které mají na otevřeném intervalu (a, b) derivaci. Nechť $\sum f_n$ konverguje na (a, b) a má součet s a dále nechť $\sum f_n'$ konverguje stejnoměrně na (a, b). Pak funkce s má na (a, b) derivaci a platí

$$s'(x) = \left(\sum f_n(x)\right)' = \sum f_n'(x)$$

Mocninné řady

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

- Mocninnou řadou se středem v bodě x_0 a koeficienty a_n rozumíme řadu funkcí tvaru $\sum a_n(x-x_0)^n$.

Mocninné řady

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

- Mocninnou řadou se středem v bodě x_0 a koeficienty a_n rozumíme řadu funkcí tvaru $\sum a_n(x - x_0)^n$.
- Každá mocninná řada konverguje ve svém středu x_0.

Mocninné řady

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

- Mocninnou řadou se středem v bodě x_0 a koeficienty a_n rozumíme řadu funkcí tvaru $\sum a_n(x - x_0)^n$.
- Každá mocninná řada konverguje ve svém středu x_0.
- Je-li $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = K$, nazýváme
  - číslo $r = \frac{1}{K}$ poloměr konvergence
  - interval $\left(x_0 - \frac{1}{K}, x_0 + \frac{1}{K}\right)$ interval konvergence

Mocninné řady

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

- Mocninnou řadou se středem v bodě x_0 a koeficienty a_n rozumíme řadu funkcí tvaru $\sum a_n(x-x_0)^n$.
- Každá mocninná řada konverguje ve svém středu x_0.
- Je-li $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = K$, nazýváme
  - číslo $r = \frac{1}{K}$ poloměr konvergence
  - interval $\left(x_0 - \frac{1}{K}, x_0 + \frac{1}{K}\right)$ interval konvergence
- Pro poloměr konvergence r rovněž platí:
  - Existuje-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, je $r = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.
  - Existuje-li $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, je $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Určete součet mocninné řady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1, 1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1, 1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \right]$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1, 1\rangle\,, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1, 1\rangle\,, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1,1\rangle\,, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $[I = \langle -1,1\rangle\,, s(x) = \operatorname{arctg} x]$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1,1\rangle\,, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $[I = \langle -1,1\rangle\,, s(x) = \operatorname{arctg} x]$

Užitím derivování nebo integrování určete součet mocninné řady

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1, 1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1, 1\rangle, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $[I = \langle -1, 1\rangle, s(x) = \operatorname{arctg} x]$

Užitím derivování nebo integrování určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1,1\rangle\,, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $[I = \langle -1,1\rangle\,, s(x) = \operatorname{arctg} x]$

Užitím derivování nebo integrování určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{(1-x)}\right]$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1,1\rangle, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $[I = \langle -1,1\rangle, s(x) = \operatorname{arctg} x]$

Užitím derivování nebo integrování určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{(1-x)}\right]$
2. $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \dots$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1,1\rangle, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $[I = \langle -1,1\rangle, s(x) = \operatorname{arctg} x]$

Užitím derivování nebo integrování určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{(1-x)}\right]$
2. $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \dots$ $\left[I = (-1,1)\setminus\{0\}, s(x) = 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x)\right]$