Cvičení z matematické analýzy 3

Obor konvergence funkčních řad, integrace, derivace řad
Diferenciální rovnice - úvod

27. 3. 2018

Náplň cvičení

1. Mocninné řady
   - Příklady
2. Diferenciální rovnice
   - Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu
     - Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými
     - Příklady

Literatura

- Hájek, J., Dula, J.; *Cvičení z matematické analýzy - Obyčejné diferenciální rovnice*. MU Brno, 1998.
- Ráb, M.; *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*. MU Brno, 1998.

Mocninné řady

Pro připomenutí:

- Mocninnou řadou se středem v bodě x_0 a koeficienty a_n rozumíme řadu funkcí tvaru $\sum a_n(x - x_0)^n$.
- Každá mocninná řada konverguje ve svém středu x_0.
- Je-li $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = K$, nazýváme
  - číslo $r = \frac{1}{K}$ poloměr konvergence
  - interval $\left(x_0 - \frac{1}{K}, x_0 + \frac{1}{K}\right)$ interval konvergence
- Pro poloměr konvergence r rovněž platí:
  - Existuje-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, je $r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.
  - Existuje-li $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, je $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1, 1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \right]$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \right]$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \right]$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1,1\rangle\,, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1,1\rangle, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1, 1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1, 1\rangle\,, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $[I = \langle -1, 1\rangle\,, s(x) = \operatorname{arctg} x]$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1,1\rangle, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $[I = \langle -1,1\rangle, s(x) = \operatorname{arctg} x]$

Užitím derivování nebo integrování určete součet mocninné řady

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1, 1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1, 1\rangle\,, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $[I = \langle -1, 1\rangle\,, s(x) = \operatorname{arctg} x]$

Užitím derivování nebo integrování určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $\left[I = (-1, 1\rangle, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x \right]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $\left[I = \langle -1, 1\rangle, s(x) = \operatorname{arctg} x \right]$

Užitím derivování nebo integrování určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{(1-x)} \right]$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1, 1\rangle\,, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $[I = \langle -1, 1\rangle\,, s(x) = \operatorname{arctg} x]$

Užitím derivování nebo integrování určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{(1-x)}\right]$
2. $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \dots$

Příklady

Určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\right]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $[I = (-1,1\rangle\,, s(x) = (x+1)\ln(x+1) - x]$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $[I = \langle -1,1\rangle\,, s(x) = \operatorname{arctg} x]$

Užitím derivování nebo integrování určete součet mocninné řady

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $\left[I = (-1,1), s(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{(1-x)}\right]$
2. $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \dots$ $\left[I = (-1,1)\backslash\{0\}, s(x) = 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x)\right]$

Diferenciální rovnice

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

- Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu je rovnice tvaru $F(x, y, y') = 0$, kde F je funkce tří proměnných, definovaná v $G \subset \mathbb{R}^3$.

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

- Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu je rovnice tvaru $F(x, y, y') = 0$, kde F je funkce tří proměnných, definovaná v $G \subset \mathbb{R}^3$.
- Řešením rovnice $F(x, y, y') = 0$ je funkce $y = h(x)$, pro niž platí
  - $[x, h(x), h'(x)] \in G$
  - $F(x, h(x), h'(x)) = 0$

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

- Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu je rovnice tvaru $F(x, y, y') = 0$, kde F je funkce tří proměnných, definovaná v $G \subset \mathbb{R}^3$.
- Řešením rovnice $F(x, y, y') = 0$ je funkce $y = h(x)$, pro niž platí
  - $[x, h(x), h'(x)] \in G$
  - $F(x, h(x), h'(x)) = 0$
- Vyřešit diferenciální rovnici znamená najít množinu všech řešení - tzv. **obecné řešení**, které závisí na konstantě C jako na parametru.

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

- Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu je rovnice tvaru $F(x, y, y') = 0$, kde F je funkce tří proměnných, definovaná v $G \subset \mathbb{R}^3$.
- Řešením rovnice $F(x, y, y') = 0$ je funkce $y = h(x)$, pro niž platí
  - $[x, h(x), h'(x)] \in G$
  - $F(x, h(x), h'(x)) = 0$
- Vyřešit diferenciální rovnici znamená najít množinu všech řešení - tzv. **obecné řešení**, které závisí na konstantě C jako na parametru.
- Dosazením konkrétní hodnoty za C získáme tzv. **partikulární řešení**.

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Teorii je třeba načerpat z přednášek, zde jen stručný přehled.

- Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu je rovnice tvaru $F(x, y, y') = 0$, kde F je funkce tří proměnných, definovaná v $G \subset \mathbb{R}^3$.
- Řešením rovnice $F(x, y, y') = 0$ je funkce $y = h(x)$, pro niž platí
  - $[x, h(x), h'(x)] \in G$
  - $F(x, h(x), h'(x)) = 0$
- Vyřešit diferenciální rovnici znamená najít množinu všech řešení - tzv. **obecné řešení**, které závisí na konstantě C jako na parametru.
- Dosazením konkrétní hodnoty za C získáme tzv. **partikulární řešení**.
- Často chceme, aby platila tzv. **počáteční podmínka** $y(x_0) = y_0$.

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.
- Při řešení rovnice $y' = P(x) \cdot Q(y)$ postupujeme takto:

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.
- Při řešení rovnice $y' = P(x) \cdot Q(y)$ postupujeme takto:
  - y' nahradíme výrazem $\frac{dy}{dx}$ (vzpomeňte např. na definici derivace)

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.
- Při řešení rovnice $y' = P(x) \cdot Q(y)$ postupujeme takto:
  - y' nahradíme výrazem $\frac{dy}{dx}$ (vzpomeňte např. na definici derivace)
  - řešíme rovnici $\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot Q(y)$

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.
- Při řešení rovnice $y' = P(x) \cdot Q(y)$ postupujeme takto:
  - y' nahradíme výrazem $\frac{dy}{dx}$ (vzpomeňte např. na definici derivace)
  - řešíme rovnici $\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot Q(y)$
  - upravíme ji do tvaru $\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx$

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.
- Při řešení rovnice $y' = P(x) \cdot Q(y)$ postupujeme takto:
  - y' nahradíme výrazem $\frac{dy}{dx}$ (vzpomeňte např. na definici derivace)
  - řešíme rovnici $\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot Q(y)$
  - upravíme ji do tvaru $\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx$
  - vypočítáme příslušné integrály, nezapomeneme na konstantu

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.
- Při řešení rovnice $y' = P(x) \cdot Q(y)$ postupujeme takto:
  - y' nahradíme výrazem $\frac{dy}{dx}$ (vzpomeňte např. na definici derivace)
  - řešíme rovnici $\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot Q(y)$
  - upravíme ji do tvaru $\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx$
  - vypočítáme příslušné integrály, nezapomeneme na konstantu
  - zohledníme případnou počáteční podmínku

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.
- Při řešení rovnice $y' = P(x) \cdot Q(y)$ postupujeme takto:
  - y' nahradíme výrazem $\frac{dy}{dx}$ (vzpomeňte např. na definici derivace)
  - řešíme rovnici $\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot Q(y)$
  - upravíme ji do tvaru $\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx$
  - vypočítáme příslušné integrály, nezapomeneme na konstantu
  - zohledníme případnou počáteční podmínku
  - určíme i případná singulární řešení (která při použití předchozího postupu musíme vyloučit)

Příklady

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

Příklady

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

1. $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$

Příklady

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

1. $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$ $\left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C\right]$

Příklady

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

1. $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$ $\quad\left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C\right]$
2. $\dfrac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$

Příklady

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

1. $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$ $\left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C\right]$
2. $\dfrac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ $\left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C\right]$

Příklady

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

1. $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$ $\qquad \left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C\right]$
2. $\dfrac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ $\qquad \left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C\right]$
3. $x^2 y' = 1 - y$

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

1. $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$ $\left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C\right]$
2. $\dfrac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ $\left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C\right]$
3. $x^2 y' = 1 - y$ $\left[y = 1 - C \cdot e^{\frac{1}{x}}\right]$

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

1. $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$ $\left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C\right]$
2. $\dfrac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ $\left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C\right]$
3. $x^2 y' = 1 - y$ $\left[y = 1 - C \cdot e^{\frac{1}{x}}\right]$

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

Příklady

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

1. $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$ $\left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C\right]$
2. $\dfrac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ $\left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C\right]$
3. $x^2 y' = 1 - y$ $\left[y = 1 - C \cdot e^{\frac{1}{x}}\right]$

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

1. $y - xy' = a(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1$

Příklady

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

1. $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$ $\left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C\right]$
2. $\dfrac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ $\left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C\right]$
3. $x^2 y' = 1 - y$ $\left[y = 1 - C \cdot e^{\frac{1}{x}}\right]$

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

1. $y - xy' = a(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1$ $\left[y = \frac{a+x}{ax+1}, a \neq -1\right]$

Příklady

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

1. $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$ $\left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C\right]$
2. $$\frac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$ $\left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C\right]$
3. $x^2 y' = 1 - y$ $\left[y = 1 - C \cdot e^{\frac{1}{x}}\right]$

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

1. $y - xy' = a(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1$ $\left[y = \frac{a+x}{ax+1}, a \neq -1\right]$
2. $y' \sin x \cdot \sin y = \cos x \cdot \cos y, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

1. $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$ $\qquad \left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C\right]$
2. $\dfrac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ $\qquad \left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C\right]$
3. $x^2 y' = 1 - y$ $\qquad \left[y = 1 - C \cdot e^{\frac{1}{x}}\right]$

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

1. $y - xy' = a(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1$ $\qquad \left[y = \frac{a+x}{ax+1}, a \neq -1\right]$
2. $y' \sin x \cdot \sin y = \cos x \cdot \cos y, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ $\qquad \left[y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2 \sin x}\right]$

Příklady

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

1. $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$ $\left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C\right]$
2. $\dfrac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ $\left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C\right]$
3. $x^2 y' = 1 - y$ $\left[y = 1 - C \cdot e^{\frac{1}{x}}\right]$

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

1. $y - xy' = a(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1$ $\left[y = \frac{a+x}{ax+1}, a \neq -1\right]$
2. $y' \sin x \cdot \sin y = \cos x \cdot \cos y, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ $\left[y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2 \sin x}\right]$
3. $y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Příklady

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

1. $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$ $\left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C\right]$
2. $\dfrac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ $\left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C\right]$
3. $x^2 y' = 1 - y$ $\left[y = 1 - C \cdot e^{\frac{1}{x}}\right]$

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

1. $y - xy' = a(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1$ $\left[y = \frac{a+x}{ax+1}, a \neq -1\right]$
2. $y' \sin x \cdot \sin y = \cos x \cdot \cos y, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ $\left[y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2 \sin x}\right]$
3. $y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $[y = 1]$

Příklady

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

1. $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$ $\left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C\right]$
2. $\dfrac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ $\left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C\right]$
3. $x^2 y' = 1 - y$ $\left[y = 1 - C \cdot e^{\frac{1}{x}}\right]$

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

1. $y - xy' = a(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1$ $\left[y = \frac{a+x}{ax+1}, a \neq -1\right]$
2. $y' \sin x \cdot \sin y = \cos x \cdot \cos y, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ $\left[y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2 \sin x}\right]$
3. $y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $[y = 1]$
4. $(1 + e^x)\, yy' = e^x, \quad y(0) = 1$

Příklady

Separací proměnných určete obecné řešení rovnice

1. $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$ $\left[\sin y = -\frac{x^3}{3} - x + C\right]$
2. $\dfrac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ $\left[\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C\right]$
3. $x^2 y' = 1 - y$ $\left[y = 1 - C \cdot e^{\frac{1}{x}}\right]$

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

1. $y - xy' = a(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1$ $\left[y = \frac{a+x}{ax+1}, a \neq -1\right]$
2. $y' \sin x \cdot \sin y = \cos x \cdot \cos y, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ $\left[y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2 \sin x}\right]$
3. $y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $[y = 1]$
4. $(1 + e^x)\, yy' = e^x, \quad y(0) = 1$ $\left[y = \sqrt{2\left(\ln\left(1 + e^x\right) + \frac{1}{2} - \ln 2\right)}\right]$