Cvičení z matematické analýzy 3

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými, homogenní diferenciální rovnice, lineární diferenciální rovnice

3. 4. 2018

Náplň 7. cvičení

1. Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu
   - Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými
   - Příklady
   - Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu
   - Příklady
   - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu
   - Příklady

Literatura

- Hájek, J., Dula, J.; *Cvičení z matematické analýzy - Obyčejné diferenciální rovnice*. MU Brno, 1998.
- Ráb, M.; *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*. MU Brno, 1998.

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.
- Při řešení rovnice $y' = P(x) \cdot Q(y)$ postupujeme takto:

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.
- Při řešení rovnice $y' = P(x) \cdot Q(y)$ postupujeme takto:
  - y' nahradíme výrazem $\frac{dy}{dx}$ (vzpomeňte např. na definici derivace)

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.
- Při řešení rovnice $y' = P(x) \cdot Q(y)$ postupujeme takto:
  - y' nahradíme výrazem $\frac{dy}{dx}$ (vzpomeňte např. na definici derivace)
  - řešíme rovnici $\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot Q(y)$

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.
- Při řešení rovnice $y' = P(x) \cdot Q(y)$ postupujeme takto:
  - y' nahradíme výrazem $\frac{dy}{dx}$ (vzpomeňte např. na definici derivace)
  - řešíme rovnici $\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot Q(y)$
  - upravíme ji do tvaru $\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx$

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.
- Při řešení rovnice $y' = P(x) \cdot Q(y)$ postupujeme takto:
  - y' nahradíme výrazem $\frac{dy}{dx}$ (vzpomeňte např. na definici derivace)
  - řešíme rovnici $\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot Q(y)$
  - upravíme ji do tvaru $\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx$
  - vypočítáme příslušné integrály, nezapomeneme na konstantu

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.
- Při řešení rovnice $y' = P(x) \cdot Q(y)$ postupujeme takto:
  - y' nahradíme výrazem $\frac{dy}{dx}$ (vzpomeňte např. na definici derivace)
  - řešíme rovnici $\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot Q(y)$
  - upravíme ji do tvaru $\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx$
  - vypočítáme příslušné integrály, nezapomeneme na konstantu
  - zohledníme případnou počáteční podmínku

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

- Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, případně $Q(y) \cdot y' = P(x)$.
- Při řešení rovnice $y' = P(x) \cdot Q(y)$ postupujeme takto:
  - y' nahradíme výrazem $\frac{dy}{dx}$ (vzpomeňte např. na definici derivace)
  - řešíme rovnici $\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot Q(y)$
  - upravíme ji do tvaru $\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx$
  - vypočítáme příslušné integrály, nezapomeneme na konstantu
  - zohledníme případnou počáteční podmínku
  - určíme i případná singulární řešení (která při použití předchozího postupu musíme vyloučit)

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

Příklady

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

1. $y - xy' = a(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1$

Příklady

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

1. $y - xy' = a(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1$ $\left[y = \frac{a+x}{ax+1}, a \neq -1\right]$

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

1. $y - xy' = a(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1$ $\qquad \left[y = \frac{a+x}{ax+1}, a \neq -1 \right]$
2. * $y' \sin x \cdot \sin y = \cos x \cdot \cos y, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

* ... D.Ú.

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

1. $y - xy' = a(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1$ $\quad \left[y = \frac{a+x}{ax+1}, a \neq -1 \right]$
2. * $y' \sin x \cdot \sin y = \cos x \cdot \cos y, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ $\quad \left[y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2 \sin x} \right]$

* ... D.Ú.

Příklady

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

1. $y - xy' = a(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1$ $\left[y = \frac{a+x}{ax+1}, a \neq -1\right]$
2. * $y' \sin x \cdot \sin y = \cos x \cdot \cos y, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ $\left[y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2 \sin x}\right]$
3. * $y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

* ... D.Ú.

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

1. $y - xy' = a(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1$ $\left[y = \frac{a+x}{ax+1}, a \neq -1\right]$
2. * $y' \sin x \cdot \sin y = \cos x \cdot \cos y, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ $\left[y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2 \sin x}\right]$
3. * $y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $[y = 1]$

* ... D.Ú.

Příklady

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

1. $y - xy' = a(1 + x^2y'), \quad y(1) = 1$ $\left[y = \frac{a+x}{ax+1}, a \neq -1\right]$
2. * $y' \sin x \cdot \sin y = \cos x \cdot \cos y, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ $\left[y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2 \sin x}\right]$
3. * $y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $[y = 1]$
4. $(1 + e^x)\, yy' = e^x, \quad y(0) = 1$

* ... D.Ú.

Příklady

Určete partikulární řešení DR, které splňuje danou podmínku

1. $y - xy' = a(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1$ $\quad \left[y = \frac{a+x}{ax+1}, a \neq -1\right]$
2. * $y' \sin x \cdot \sin y = \cos x \cdot \cos y, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ $\quad \left[y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2 \sin x}\right]$
3. * $y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $\quad [y = 1]$
4. $(1 + e^x)\, yy' = e^x, \quad y(0) = 1$ $\quad \left[y = \sqrt{2\left(\ln\left(1 + e^x\right) + \frac{1}{2} - \ln 2\right)}\right]$

* ... D.Ú.

Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu

Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu

- Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu je diferenciální rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu

- Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu je diferenciální rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
- Při řešení takové rovnice

Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu

- Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu je diferenciální rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
- Při řešení takové rovnice
  - využijeme substitucí $u = \frac{y}{x}$,

Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu

- Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu je diferenciální rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
- Při řešení takové rovnice
  - využijeme substitucí $u = \frac{y}{x}$,
  - odvodíme $u' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}$

Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu

- Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu je diferenciální rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
- Při řešení takové rovnice
  - využijeme substitucí $u = \frac{y}{x}$,
  - odvodíme $u' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}$
  - po úpravě $y' = u'x + u$

- Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu je diferenciální rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
- Při řešení takové rovnice
  - využijeme substitucí $u = \frac{y}{x}$,
  - odvodíme $u' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}$
  - po úpravě $y' = u'x + u$
  - tím původní rovnici převedeme na rovnici $u'x + u = f(u)$

Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu

- Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu je diferenciální rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
- Při řešení takové rovnice
  - využijeme substitucí $u = \frac{y}{x}$,
  - odvodíme $u' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}$
  - po úpravě $y' = u'x + u$
  - tím původní rovnici převedeme na rovnici $u'x + u = f(u)$
  - můžeme separovat proměnné: $u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$

Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu

- Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu je diferenciální rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
- Při řešení takové rovnice
  - využijeme substitucí $u = \frac{y}{x}$,
  - odvodíme $u' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}$
  - po úpravě $y' = u'x + u$
  - tím původní rovnici převedeme na rovnici $u'x + u = f(u)$
  - můžeme separovat proměnné: $u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$
  - řešení $u = h(x)$ vyjádříme v původních proměnných: $y = g(x)$, případně $\overline{g}(x, y) = 0$

Příklady

Řešte diferenciální rovnice

Příklady

Řešte diferenciální rovnice

1. $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln \frac{y}{x}\right)$

Příklady

Řešte diferenciální rovnice

1. $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$ $\left[y = x \cdot \mathrm{e}^{kx}\right]$

Příklady

Řešte diferenciální rovnice

1. $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$ $\left[y = x \cdot \mathrm{e}^{kx}\right]$
2. * $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$

* . . . D.Ú.

Příklady

Řešte diferenciální rovnice

1. $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$ $\left[y = x \cdot \mathrm{e}^{kx}\right]$
2. * $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$ $\left[\sin\frac{y}{x} - cx = 0\right]$

* ... D.Ú.

Řešte diferenciální rovnice

1. $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln \frac{y}{x}\right)$ $\left[y = x \cdot \mathrm{e}^{kx}\right]$
2. $*$ $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ $\left[\sin \frac{y}{x} - cx = 0\right]$
3. $*$ $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$

$*$ ... D.Ú.

Příklady

Řešte diferenciální rovnice

1. $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$ $\left[y = x \cdot e^{kx}\right]$
2. * $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$ $\left[\sin\frac{y}{x} - cx = 0\right]$
3. * $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ $\left[y = \frac{2x+cx^4}{1-cx^3}\right]$

* ... D.Ú.

Řešte diferenciální rovnice

1. $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$ $\left[y = x \cdot \mathrm{e}^{kx}\right]$
2. * $y' = \frac{y}{x} + \mathrm{tg}\,\frac{y}{x}$ $\left[\sin\frac{y}{x} - cx = 0\right]$
3. * $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ $\left[y = \frac{2x+cx^4}{1-cx^3}\right]$
4. $x^2y' = (x+y)y$

* ... D.Ú.

Řešte diferenciální rovnice

1. $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$ $\left[y = x \cdot e^{kx}\right]$
2. * $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$ $\left[\sin\frac{y}{x} - cx = 0\right]$
3. * $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ $\left[y = \frac{2x + cx^4}{1 - cx^3}\right]$
4. $x^2 y' = (x + y)y$ $\left[y = \frac{x}{c - \ln x}\right]$

* ... D.Ú.

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

- LDR 1. řádu má tvar $y' + f(x)y = g(x)$.

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

- LDR 1. řádu má tvar $y' + f(x)y = g(x)$.
- Je-li $g(x) = 0$, hovoříme o homogenní LDR (HLDR) 1. řádu

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

- LDR 1. řádu má tvar $y' + f(x)y = g(x)$.
- Je-li $g(x) = 0$, hovoříme o homogenní LDR (HLDR) 1. řádu
- LDR můžeme řešit např. **metodou variace konstanty**:

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

- LDR 1. řádu má tvar $y' + f(x)y = g(x)$.
- Je-li $g(x) = 0$, hovoříme o homogenní LDR (HLDR) 1. řádu
- LDR můžeme řešit např. **metodou variace konstanty**:
  - nejprve vyřešíme přidruženou HLDR $y' + f(x)y = 0$
    - DR se separovanými proměnnými a řešením $y = C \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

- LDR 1. řádu má tvar $y' + f(x)y = g(x)$.
- Je-li $g(x) = 0$, hovoříme o homogenní LDR (HLDR) 1. řádu
- LDR můžeme řešit např. **metodou variace konstanty**:
  - nejprve vyřešíme přidruženou HLDR $y' + f(x)y = 0$
    - DR se separovanými proměnnými a řešením $y = C \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - řešení původní LDR hledáme ve tvaru $y = C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

- LDR 1. řádu má tvar $y' + f(x)y = g(x)$.
- Je-li $g(x) = 0$, hovoříme o homogenní LDR (HLDR) 1. řádu
- LDR můžeme řešit např. **metodou variace konstanty**:
  - nejprve vyřešíme přidruženou HLDR $y' + f(x)y = 0$
    - DR se separovanými proměnnými a řešením $y = C \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - řešení původní LDR hledáme ve tvaru $y = C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - derivací dostáváme $y' = C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)f(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

- LDR 1. řádu má tvar $y' + f(x)y = g(x)$.
- Je-li $g(x) = 0$, hovoříme o homogenní LDR (HLDR) 1. řádu
- LDR můžeme řešit např. **metodou variace konstanty**:
  - nejprve vyřešíme přidruženou HLDR $y' + f(x)y = 0$
    - DR se separovanými proměnnými a řešením $y = C \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - řešení původní LDR hledáme ve tvaru $y = C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - derivací dostáváme $y' = C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)f(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - po dosazení do původní rovnice za y a y' dostáváme:

$$C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)f(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} + f(x)C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} = g(x)$$

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

- LDR 1. řádu má tvar $y' + f(x)y = g(x)$.
- Je-li $g(x) = 0$, hovoříme o homogenní LDR (HLDR) 1. řádu
- LDR můžeme řešit např. **metodou variace konstanty**:
  - nejprve vyřešíme přidruženou HLDR $y' + f(x)y = 0$
    - DR se separovanými proměnnými a řešením $y = C \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - řešení původní LDR hledáme ve tvaru $y = C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - derivací dostáváme $y' = C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)f(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - po dosazení do původní rovnice za y a y' dostáváme:
    $$C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)f(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} + f(x)C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} = g(x)$$
  - po úpravě tak řešíme $C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} = g(x)$

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

- LDR 1. řádu má tvar $y' + f(x)y = g(x)$.
- Je-li $g(x) = 0$, hovoříme o homogenní LDR (HLDR) 1. řádu
- LDR můžeme řešit např. **metodou variace konstanty**:
  - nejprve vyřešíme přidruženou HLDR $y' + f(x)y = 0$
    - DR se separovanými proměnnými a řešením $y = C \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - řešení původní LDR hledáme ve tvaru $y = C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - derivací dostáváme $y' = C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)f(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - po dosazení do původní rovnice za y a y' dostáváme:
    $$C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)f(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} + f(x)C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} = g(x)$$
  - po úpravě tak řešíme $C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} = g(x)$
  - řešením je $C(x) = \int g(x)\,\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C$

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

- LDR 1. řádu má tvar $y' + f(x)y = g(x)$.
- Je-li $g(x) = 0$, hovoříme o homogenní LDR (HLDR) 1. řádu
- LDR můžeme řešit např. **metodou variace konstanty**:
  - nejprve vyřešíme přidruženou HLDR $y' + f(x)y = 0$
    - DR se separovanými proměnnými a řešením $y = C \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - řešení původní LDR hledáme ve tvaru $y = C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - derivací dostáváme $y' = C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)f(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - po dosazení do původní rovnice za y a y' dostáváme:
  $$C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)f(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} + f(x)C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} = g(x)$$
  - po úpravě tak řešíme $C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} = g(x)$
  - řešením je $C(x) = \int g(x)\,\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C$
  - toto řešení dosadíme do původní LDR

Lineární diferenciální rovnice (LDR) 1. řádu

- LDR 1. řádu má tvar $y' + f(x)y = g(x)$.
- Je-li $g(x) = 0$, hovoříme o homogenní LDR (HLDR) 1. řádu
- LDR můžeme řešit např. **metodou variace konstanty**:
  - nejprve vyřešíme přidruženou HLDR $y' + f(x)y = 0$
    - DR se separovanými proměnnými a řešením $y = C \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - řešení původní LDR hledáme ve tvaru $y = C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - derivací dostáváme $y' = C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)f(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
  - po dosazení do původní rovnice za y a y' dostáváme:

    $$C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)f(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} + f(x)C(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} = g(x)$$
  - po úpravě tak řešíme $C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x} = g(x)$
  - řešením je $C(x) = \int g(x)\,\mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C$
  - toto řešení dosadíme do původní LDR
  - Jestli jsme to zvládli až sem, odměníme se nějakou dobrotou ;-)

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice metodou variace konstanty

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice metodou variace konstanty

1. $\left(1+x^2\right)y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice metodou variace konstanty

1. $\left(1+x^2\right)y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2$ $\qquad \left[y = (C+x)\left(1+x^2\right)\right]$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice metodou variace konstanty

1. $\left(1+x^2\right) y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2$ $\qquad \left[y = (C+x)\left(1+x^2\right)\right]$
2. $\left(1+x^2\right) y' + 4xy = 3$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice metodou variace konstanty

1. $\left(1+x^2\right)y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2$ $\quad \left[y = (C+x)\left(1+x^2\right)\right]$
2. $\left(1+x^2\right)y' + 4xy = 3$ $\quad \left[y = \frac{x^3+3x+C}{(1+x^2)^2}\right]$

Určete obecné řešení diferenciální rovnice metodou variace konstanty

1. $\left(1+x^2\right)y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2$ $\quad\left[y = (C+x)\left(1+x^2\right)\right]$
2. $\left(1+x^2\right)y' + 4xy = 3$ $\quad\left[y = \frac{x^3+3x+C}{(1+x^2)^2}\right]$
3. $*\ y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$

$*$ ... D.Ú.

Určete obecné řešení diferenciální rovnice metodou variace konstanty

1. $\left(1+x^2\right)y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2$ $\left[y = (C+x)\left(1+x^2\right)\right]$
2. $\left(1+x^2\right)y' + 4xy = 3$ $\left[y = \frac{x^3+3x+C}{(1+x^2)^2}\right]$
3. * $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$ $\left[y = Cx^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x^2\right]$

* ... D.Ú.

Určete obecné řešení diferenciální rovnice metodou variace konstanty

1. $\left(1+x^2\right)y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2$ $\qquad \left[y = (C+x)\left(1+x^2\right)\right]$
2. $\left(1+x^2\right)y' + 4xy = 3$ $\qquad \left[y = \frac{x^3+3x+C}{(1+x^2)^2}\right]$
3. * $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$ $\qquad \left[y = Cx^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x^2\right]$
4. * $y' + 2xy = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$

* ... D.Ú.

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice metodou variace konstanty

1. $\left(1+x^2\right)y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2$ $\qquad\left[y = (C+x)\left(1+x^2\right)\right]$
2. $\left(1+x^2\right)y' + 4xy = 3$ $\qquad\left[y = \frac{x^3+3x+C}{(1+x^2)^2}\right]$
3. $* \; y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$ $\qquad\left[y = Cx^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x^2\right]$
4. $* \; y' + 2xy = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ $\qquad\left[y = C\,\mathrm{e}^{-x^2} + \frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}\right]$

* . . . D.Ú.

Děkuji za pozornost

Děkuji za pozornost

i po velikonočním pondělí ;-)