Cvičení z matematické analýzy 3

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

17. 4. 2018

Náplň 9. cvičení

1. Opakování z minulé hodiny
2. LDR s pravou stranou (nehomogenní)
   - Řešení metodou variace konstant
   - Příklady
   - Řešení metodou neznámých koeficientů

Literatura

- Hájek, J., Dula, J.; *Cvičení z matematické analýzy - Obyčejné diferenciální rovnice*. MU Brno, 1998.
- Kuben, J.; *Obyčejné diferenciální rovnice*. UP Olomouc, 1995.

Opakování z minulého cvičení

- Při řešení homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty $ay'' + by' + cy = 0$ (*) postupujeme tak, že vyřešíme tzv. charakteristickou rovnici $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, tzn. najdeme kořeny λ_1, λ_2
  - jsou-li λ_1, λ_2 dva různé reálné kořeny, má obecné řešení homogenní rovnice (*) tvar $y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$
  - má-li charakteristická rovnice dvojnásobný kořen $\lambda_1 = \lambda_2$, má obecné řešení homogenní rovnice (*) tvar $y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 x \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$
  - je-li $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, má obecné řešení homogenní rovnice (*) tvar $y = C_1 \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x$

LDR (2. řádu) s pravou stranou (nehomogenní)

Řešení metodou variace konstant

LDR (2. řádu) s pravou stranou (nehomogenní)

Řešení metodou variace konstant

- Platí: OŘNLDR = OŘHLDR + PŘNLDR

LDR (2. řádu) s pravou stranou (nehomogenní)

Řešení metodou variace konstant

- Platí: OŘNLDR = OŘHLDR + PŘNLDR
- Při řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty s pravou stranou $ay'' + by' + cy = f(x)$ postupujeme následovně:

LDR (2. řádu) s pravou stranou (nehomogenní)

Řešení metodou variace konstant

- Platí: OŘNLDR = OŘHLDR + PŘNLDR
- Při řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty s pravou stranou $ay'' + by' + cy = f(x)$ postupujeme následovně:

1. najdeme OŘ**H**LDR: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

LDR (2. řádu) s pravou stranou (nehomogenní)

Řešení metodou variace konstant

- Platí: OŘNLDR = OŘHLDR + PŘNLDR
- Při řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty s pravou stranou $ay'' + by' + cy = f(x)$ postupujeme následovně:

1. najdeme OŘ**H**LDR: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$
2. PŘ**N**LDR hledejme ve tvaru $y_p = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$

LDR (2. řádu) s pravou stranou (nehomogenní)

Řešení metodou variace konstant

- Platí: OŘNLDR = OŘHLDR + PŘNLDR
- Při řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty s pravou stranou $ay'' + by' + cy = f(x)$ postupujeme následovně:

1. najdeme OŘ**H**LDR: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$
2. PŘ**N**LDR hledejme ve tvaru $y_p = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$
3. vypočítáme $y_p' = C_1'(x) y_1 + C_1(x) y_1' + C_2'(x) y_2 + C_2(x) y_2'$

LDR (2. řádu) s pravou stranou (nehomogenní)

Řešení metodou variace konstant

- Platí: OŘNLDR = OŘHLDR + PŘNLDR
- Při řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty s pravou stranou $ay'' + by' + cy = f(x)$ postupujeme následovně:

1. najdeme OŘ**H**LDR: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$
2. PŘ**N**LDR hledejme ve tvaru $y_p = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$
3. vypočítáme $y_p' = C_1'(x) y_1 + C_1(x) y_1' + C_2'(x) y_2 + C_2(x) y_2'$
4. klademe $C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0$

   (abychom v y_p'' nepracovali s druhou derivací neznámých funkcí)

Řešení metodou variace konstant

- Platí: OŘNLDR = OŘHLDR + PŘNLDR
- Při řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty s pravou stranou $ay'' + by' + cy = f(x)$ postupujeme následovně:

1. najdeme OŘ**H**LDR: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$
2. PŘ**N**LDR hledejme ve tvaru $y_p = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$
3. vypočítáme $y_p' = C_1'(x) y_1 + C_1(x) y_1' + C_2'(x) y_2 + C_2(x) y_2'$
4. klademe $C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0$
   (abychom v y_p'' nepracovali s druhou derivací neznámých funkcí)
5. vypočítáme $y_p'' = C_1'(x) y_1' + C_1(x) y_1'' + C_2'(x) y_2' + C_2(x) y_2''$

LDR (2. řádu) s pravou stranou (nehomogenní)

Řešení metodou variace konstant

6. dosadíme-li do původní rovnice y_p, y_p' a y_p'', dostaneme po úpravě
$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$

LDR (2. řádu) s pravou stranou (nehomogenní)

Řešení metodou variace konstant

6. dosadíme-li do původní rovnice y_p, y_p' a y_p'', dostaneme po úpravě $C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$
7. pro $C_1'(x), C_2'(x)$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 &= 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' &= f(x) \end{aligned}$$

LDR (2. řádu) s pravou stranou (nehomogenní)

Řešení metodou variace konstant

6. dosadíme-li do původní rovnice y_p, y_p' a y_p'', dostaneme po úpravě $C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$
7. pro $C_1'(x), C_2'(x)$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 &= 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' &= f(x) \end{aligned}$$

odkud určíme $C_1'(x)$ a $C_2'(x)$

LDR (2. řádu) s pravou stranou (nehomogenní)

Řešení metodou variace konstant

6. dosadíme-li do původní rovnice y_p, y_p' a y_p'', dostaneme po úpravě
   $C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$
7. pro $C_1'(x), C_2'(x)$ dostáváme soustavu
   $$\begin{aligned} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 &= 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' &= f(x) \end{aligned}$$
   odkud určíme $C_1'(x)$ a $C_2'(x)$
8. vypočítáme $C_1(x)$ a $C_2(x)$
   (volíme nulové integrační konstanty)

LDR (2. řádu) s pravou stranou (nehomogenní)

Řešení metodou variace konstant

6. dosadíme-li do původní rovnice y_p, y_p' a y_p'', dostaneme po úpravě $C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$
7. pro $C_1'(x), C_2'(x)$ dostáváme soustavu
$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 &= 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' &= f(x) \end{aligned}$$
odkud určíme $C_1'(x)$ a $C_2'(x)$
8. vypočítáme $C_1(x)$ a $C_2(x)$
(volíme nulové integrační konstanty)
9. OŘNLDR má tak tvar $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + y_p$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ $\quad [y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x e^x \ln|x|]$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ $\qquad [y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x e^x \ln|x|]$
2. $y'' - 7y' + 12y = 5$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ $\qquad [y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x e^x \ln|x|]$
2. $y'' - 7y' + 12y = 5$ $\qquad \left[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12}\right]$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ $[y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x e^x \ln|x|]$
2. $y'' - 7y' + 12y = 5$ $\left[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12}\right]$
3. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice

1. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ $\quad [y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x e^x \ln|x|]$
2. $y'' - 7y' + 12y = 5$ $\quad \left[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12}\right]$
3. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ $\quad [y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - x \cos x + \sin x \ln|\sin x|]$

Řešení metodou neznámých koeficientů

- Metoda vychází z předchozí metody, jen partikulární řešení volíme konkrétněji, s ohledem na pravou stranu.

Řešení metodou neznámých koeficientů

- Metoda vychází z předchozí metody, jen partikulární řešení volíme konkrétněji, s ohledem na pravou stranu.

Pravá strana ve tvaru polynomu

Řešení metodou neznámých koeficientů

- Metoda vychází z předchozí metody, jen partikulární řešení volíme konkrétněji, s ohledem na pravou stranu.

Pravá strana ve tvaru polynomu

- nejprve se budeme věnovat rovnicím s pravou stranou ve tvaru polynomu: $ay'' + by' + cy = P(x)$, kde P(x) je polynom stupně n

Řešení metodou neznámých koeficientů

- Metoda vychází z předchozí metody, jen partikulární řešení volíme konkrétněji, s ohledem na pravou stranu.

Pravá strana ve tvaru polynomu

- nejprve se budeme věnovat rovnicím s pravou stranou ve tvaru polynomu: $ay'' + by' + cy = P(x)$, kde P(x) je polynom stupně n

1. najdeme OŘ**H**LDR: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

Řešení metodou neznámých koeficientů

- Metoda vychází z předchozí metody, jen partikulární řešení volíme konkrétněji, s ohledem na pravou stranu.

Pravá strana ve tvaru polynomu

- nejprve se budeme věnovat rovnicím s pravou stranou ve tvaru polynomu: $ay'' + by' + cy = P(x)$, kde P(x) je polynom stupně n

1. najdeme OŘ**H**LDR: $y = C_1y_1 + C_2y_2$
2. PŘ**N**LDR hledejme ve tvaru
   - $y_p = Q(x)$, jestliže 0 není kořen charakteristické rovnice
   - $y_p = x^kQ(x)$, je-li 0 k-násobný kořen charakteristické rovnice

kde $Q(x)$ je polynom stupně n, avšak s neznámými koeficienty (např. $Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \dots$)

Řešení metodou neznámých koeficientů

- Metoda vychází z předchozí metody, jen partikulární řešení volíme konkrétněji, s ohledem na pravou stranu.

Pravá strana ve tvaru polynomu

3. vypočítáme y_p' a y_p''

Řešení metodou neznámých koeficientů

- Metoda vychází z předchozí metody, jen partikulární řešení volíme konkrétněji, s ohledem na pravou stranu.

Pravá strana ve tvaru polynomu

3. vypočítáme y_p' a y_p''
4. dosadíme y_p, y_p' a y_p'' do původní rovnice a upravíme

Řešení metodou neznámých koeficientů

- Metoda vychází z předchozí metody, jen partikulární řešení volíme konkrétněji, s ohledem na pravou stranu.

Pravá strana ve tvaru polynomu

3. vypočítáme y_p' a y_p''
4. dosadíme y_p, y_p' a y_p'' do původní rovnice a upravíme
5. pokud jsme počítali správně, vyjde rovnice s polynomy na obou stranách

Řešení metodou neznámých koeficientů

- Metoda vychází z předchozí metody, jen partikulární řešení volíme konkrétněji, s ohledem na pravou stranu.

Pravá strana ve tvaru polynomu

3. vypočítáme y_p' a y_p''
4. dosadíme y_p, y_p' a y_p'' do původní rovnice a upravíme
5. pokud jsme počítali správně, vyjde rovnice s polynomy na obou stranách
6. víme, že dva polynomy se rovnají právě tehdy, když
   - jsou stejného stupně
   - koeficienty u stejných mocnin jsou stejné

Řešení metodou neznámých koeficientů

- Metoda vychází z předchozí metody, jen partikulární řešení volíme konkrétněji, s ohledem na pravou stranu.

Pravá strana ve tvaru polynomu

3. vypočítáme y_p' a y_p''
4. dosadíme y_p, y_p' a y_p'' do původní rovnice a upravíme
5. pokud jsme počítali správně, vyjde rovnice s polynomy na obou stranách
6. víme, že dva polynomy se rovnají právě tehdy, když
   - jsou stejného stupně
   - koeficienty u stejných mocnin jsou stejné
7. OŘNLDR má tak tvar $\quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + Q(x)$
   ($Q(x)$ má již dopočítané konkrétní koeficienty)

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1. $y'' - 7y' + 12y = 5$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1. $y'' - 7y' + 12y = 5$ $\qquad \left[y = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 \mathrm{e}^{4x} + \frac{5}{12}\right]$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1. $y'' - 7y' + 12y = 5$ $\left[y = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 \mathrm{e}^{4x} + \frac{5}{12}\right]$
2. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1. $y'' - 7y' + 12y = 5$ $\left[y = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 \mathrm{e}^{4x} + \frac{5}{12}\right]$
2. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$
   $\left[y = C_1 \mathrm{e}^{-2x} \cos x + C_2 \mathrm{e}^{-2x} \sin x + x^2 - 8x + 7\right]$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1. $y'' - 7y' + 12y = 5$ $\left[y = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x} + \frac{5}{12}\right]$
2. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$
   $\left[y = C_1\,\mathrm{e}^{-2x}\cos x + C_2\,\mathrm{e}^{-2x}\sin x + x^2 - 8x + 7\right]$
3. $y'' + 3y' = 9x$

Příklady

Určete obecné řešení diferenciální rovnice:

1. $y'' - 7y' + 12y = 5$ $\left[y = C_1\,\mathrm{e}^{3x} + C_2\,\mathrm{e}^{4x} + \frac{5}{12}\right]$
2. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$
   $\left[y = C_1\,\mathrm{e}^{-2x}\cos x + C_2\,\mathrm{e}^{-2x}\sin x + x^2 - 8x + 7\right]$
3. $y'' + 3y' = 9x$ $\left[y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x\right]$