

Irena Budínová

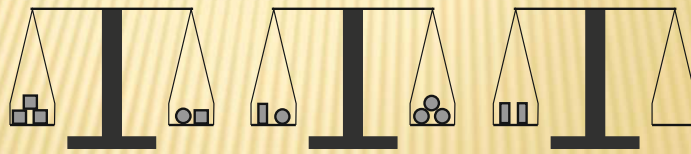
## ROVNICE NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE

### PROPEDEUTIKA ROVNIC

- ✘ Nežli začne samotné učivo Rovnice, je důležité, aby žáci řešili úlohy vedoucí na rovnice jinými prostředky. Jedná se o typy úloh:
  - + Úlohy s váhami,
  - + Úlohy zadané příběhem,
  - + Řešení tzv. aritmetických úloh.

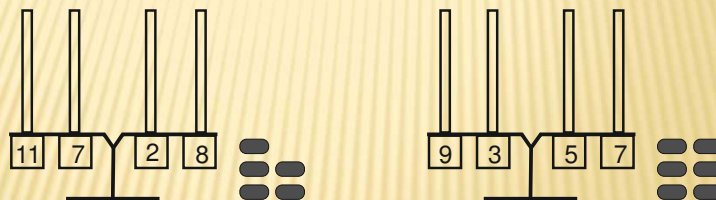
## ÚLOHY S VAHAMI

- ✘ *Kolik kroužků musíme umístit na pravou stranu poslední váhy, aby nastala rovnováha? Jaká je hodnota jednotlivých útvarů? (1. stupeň – 6. ročník)*



## ÚLOHY S VAHAMI

- ✘ *Doplňte na váhy závaží tak, aby nastala rovnováha.*



## SLOVNÍ ÚLOHY A STRATEGIE JEJICH ŘEŠENÍ

- ✘ Na následující úloze budeme diskutovat různé možnosti řešení:
- ✘ *Tatínek kupoval tři autíčka, červené, modré a zelené. Modré stálo dvakrát více než červené, zelené stálo tolik co červené a modré dohromady. Všechna autíčka stála dohromady 120 Kč. Vypočítej cenu každého autíčka.*
  - + Řešení experimentem,
  - + Aritmetické řešení s grafickým znázorněním.
  - + Algebraické řešení

## ŘEŠENÍ ARITMETICKÉ ÚLOHY

- ✘ Hledejte různé možnosti řešení následujících úloh:
  - + *Myslím si číslo. Když k němu přičtu 7 a výsledek vynásobím 8, dostanu 160. Které číslo si myslím?*
- ✘ *Řešení experimentem*
- ✘ *Aritmetické řešení od konce*
- ✘ *Algebraické řešení*

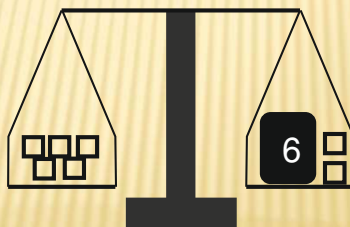
## POSTUPNÉ ZAVÁDĚNÍ SYMBOLIKY POMOCÍ SLOVNÍCH ÚLOH

1. Intuitivní zápis slovní úlohy.
2. Postupné zavádění písmena jakožto neznámé. Ukažme možnou učitelovu intervenci na následující úloze:

*Davidova maminka váží třikrát tolik a ještě o 5 kg více než David. Kolik kg váží David, když maminka váží 59 kg?*

## POSTUPNÉ ZAVÁDĚNÍ SYMBOLIKY POMOCÍ ÚLOH S VAHAMÍ

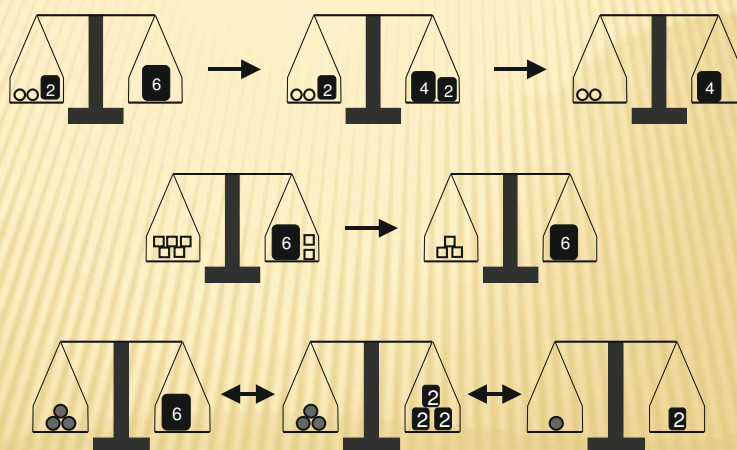
- ✘ U váhy můžeme domluvit následující symboliku: neznámé závaží ... **neznámá** ... označíme  $x$ , známé závaží má udanou číselnou hodnotu ... číslo.



## EKVIVALENTNÍ ÚPRAVY ROVNIC

- ✘ Jedná se o takové úpravy celé rovnice, při jejichž použití mají rovnice před úpravou a po úpravě stejné kořeny (rovnice původní a rovnice upravená mají stejnou množinu všech řešení).
  - + záměna obou stran rovnice
  - + přičtení (odečtení) stejného čísla nebo stejného výrazu k oběma stranám rovnice
  - + vynásobení obou stran rovnice stejným číslem různým od nuly nebo stejným mnohočlenem, který má pro každou proměnnou hodnotu různou od nuly
  - + vydělení obou stran rovnice stejným číslem různým od nuly nebo stejným mnohočlenem, který má pro každou proměnnou hodnotu různou od nuly.

## VYVOZENÍ EKVIVALENTNÍCH ÚPRAV POMOCÍ ÚLOH S VAHAMI



## ROVNOST

- ✘ Rovnost je „binární relace a určujeme, zda daná dvojice čísel do relace patří nebo nepatří, tedy zjišťujeme pravdivost výroku pro daná čísla“ (Malinová, 1983).
- ✘ Jedná se o relaci, která je:
  - + reflexivní, tj. pro každé  $a$  z dané množiny  $a = a$
  - + symetrická, tj. pro každé  $a, b$  z dané množiny platí: jestliže  $a = b$ , pak  $b = a$
  - + tranzitivní, tj. pro každé  $a, b, c$ , z dané množiny platí: jestliže  $a = b$  a zároveň  $b = c$ , pak  $a = c$ .
- ✘ tedy je to **relace ekvivalence**.

## ROVNICE

- ✘ Rovnice je
  - a) zápis rovnosti dvou výrazů, z nichž alespoň jeden obsahuje neznámou,
  - b) výroková forma  $A(x)$ , jejíž obor pravdivosti hledáme.
- ✘ Na ZŠ se žáci seznamují s **lineární rovnicí s jednou neznámou** a s některými rovnicemi, které na ni vedou.
- ✘ Pro žáky je výhodou vycházet z aritmetických dovedností (úlohy rovnicového charakteru)

## LINEÁRNÍ ROVNICE O JEDNÉ NEZNÁMÉ

- ✘ Rovnice typu  $ax+b=0$ .
- ✘ Tato rovnice může mít vzhledem ke koeficientům  $a, b$ 
  - + nekonečně mnoho řešení,
  - + žádné řešení,
  - + právě jedno řešení.
- ✘ Při výuce postupujeme od nejjednodušších tvarů rovnice, postupně zavádíme nové jevy.

## ŘEŠENÍ ROVNICE

- ✘ Při řešení rovnice hledáme její **kořen** – číslo, které po dosazení za neznámou změní rovnici v rovnost.
- ✘ Postupujeme podle **algoritmu** – přesné posloupnosti kroků, jejímž cílem je nalezení neznámé.
- ✘ Rovnici je potřeba upravovat jako celek – to nekoresponduje s dosavadními používanými aritmetickými metodami

## ŘEŠENÍ LINEÁRNÍ ROVNICE

- × Ekvivalentní úpravy, které provádíme s celou rovnicí, je nutné ze začátku zdůrazňovat:

$$3x - 2 = 16$$

$$3x - 2 + 2 = 16 + 2$$

$$3x : 3 = 18 : 3$$

$$x = 6$$

- × Vždy provádíme zkoušku správnosti z důvodu eliminace numerické chyby dosazením kořene do obou stran rovnice.
- × **Úloha:** Řešte rovnici, proveďte zkoušku:

$$x(4+x) = (x-2)(x+5)$$

## ROVNICE S NEZNÁMOU VE JMENOVATELI

- × Na ZŠ rovnice se zlomky s neznámou ve jmenovateli, které lze převést na lineární rovnici.
- × Tyto rovnice je možno řešit ekvivalentními nebo důsledkovými úpravami
- × **Důsledkové úpravy:** úpravy, které mohou změnit množinu řešení dané rovnice. Na ZŠ se jedná o:
  - + vynásobení rovnice výrazem s neznámou, který je roven nule,
  - + vydělení rovnice výrazem s neznámou, který je roven nule,
  - + umocnění obou stran rovnice na druhou,
  - + odmocnění obou stran rovnice.



## ŘEŠENÍ RŮZNÝCH ROVNIC NA ZŠ

- ✘ Některé důsledkové úpravy ubírají řešení zadané rovnici, jiné naopak přidávají. Při použití důsledkové úpravy je nutné provést **zkoušku** z toho důvodu, abychom odstranili přidaná řešení.
- ✘ Na ZŠ je možné se důsledkovým úpravám vyhnout.
- ✘ **Úloha:** Řešte rovnici a) pouze ekvivalentními úpravami, b) i důsledkovými úpravami.

$$\frac{z}{z+1} = 1 - \frac{4}{z-2}$$

## ŘEŠENÍ RŮZNÝCH ROVNIC NA ZŠ

- ✘ **Úloha:** Šířka obdélníku je o 2 větší než jeho výška. Obsah obdélníku je 120. Jaké jsou jeho rozměry?
- ✘ **Úloha:** Obsah obdélníku je 72. Jeho šířka je dvakrát větší než jeho výška. Jaké jsou rozměry obdélníku?
- ✘ **Úloha:** Řešte rovnici  $(x-3)(x+3)-1=26$ .
- ✘ **Úloha:** Řešte rovnici  $2x^2+x+1=x^2-x+1$ .

## SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC SE DVĚMA NEZNÁMÝMI

- × Jedná se o soustavu rovnic typu

$$ax+by=c$$

$$dx+ey=f$$

- × Soustavu rovnic řešíme následujícími metodami:
  - + dosazovací metoda
  - + sčítací metoda
  - + velice často se volí kombinace dvou předchozích metod
  - + komparační metoda
  - + grafické řešení – až po probrání lineární funkce

## ŘEŠENÍ SOUSTAVY ROVNIC

- × Zásady:
  - + Rovnice píšeme stále pod sebe, jednotlivé kroky oddělujeme vodorovnou čarou.
  - + Výsledek zapisujeme jako uspořádanou dvojici.
  - + Zkoušku provádíme dosazením obou kořenů do zadané soustavy. Je-li nekonečně mnoho řešení, nebo není-li žádné řešení, prověřujeme správnost řešení např. pomocí komparační metody – z obou rovnic vyjádříme stejnou neznámou a porovnáme.

## ŘEŠENÍ SOUSTAVY ROVNIC

- ✘ Řešte soustavu rovnic s neznámými  $x, y$ :

$$\frac{5}{x+y} + \frac{12}{x-y} = 7$$

$$\frac{1}{x+y} + \frac{6}{x-y} = 2$$

- ✘ Řešte soustavu rovnic:

$$\frac{t+2}{3} + \frac{r-1}{5} = 2$$

$$t + \frac{3r}{5} = 4$$

## DIOFANTICKÉ ROVNICE

- ✘ Diofantické neboli neurčité rovnice jsou rovnice, které obsahují více neznámých než rovnic.
- ✘ Nejjednodušší je řešit diofantickou rovnicí 1. stupně o dvou neznámých.
- ✘ Je možné je řešit experimentálně, redukční metodou, nebo kongruencemi.

## DIOFANTICKÉ ROVNICE

- ✘ Na ZŠ nejsou předmětem běžného učiva, mohou být však obohacujícím učivem pro bystré a nadané žáky.
- ✘ Také se často objevují v Matematické olympiádě.
- ✘ **Úloha:** *Na okně jsou pavouci a mouchy. Dohromady mají 38 noh. Kolik je kterých?*

## LINEÁRNÍ NEROVNICE

- ✘ Na 1. stupni – pojem **nerovnosti**.
- ✘ Nerovnost je binární relace  $a > b$ . Tato relace je antireflexivní, antisymetrická, tranzitivní (uspořádání)
- ✘ Zápis nerovnosti dvou výrazů, ve kterém musíme určit neznámé číslo tak, aby daná nerovnost platila, nazýváme **nerovnice**.
- ✘ Řešit nerovnici znamená najít taková čísla, aby po dosazení těchto čísel za neznámou se nerovnice změnila ve správnou nerovnost. Nalezená čísla se nazývají řešení dané nerovnice.

## LINEÁRNÍ NEROVNICE

- ✘ Rozlišujeme **ostré nerovnice** a **neostré nerovnice**.
- ✘ Žáci se musí seznámit s pojmem **intervalu**, úlohy řeší v množině reálných čísel nebo přirozených čísel. Velmi vhodné je řešení úloh pomocí číselné osy.
- ✘ Zkoušku **správnosti** provádíme náhodným dosazením čísla z nalezeného intervalu.

## ŘEŠENÍ LINEÁRNÍCH NEROVNIC

- ✘ Nejčastěji užívané úpravy lineární nerovnice jsou:
  1. Přičítání nebo odčítání stejného výrazu k oběma stranám nerovnice.
  2. Násobení nebo dělení obou stran nerovnice stejným číslem různým od nuly.

- ✦ Úloha: Řešte nerovnici s neznámou v množině přirozených čísel:

$$\frac{2 + 27x}{6} < \frac{5}{2} + \frac{12x + 1}{3}$$

- ✦ Úloha: Řešte soustavu nerovnic s neznámou  $x$ :

$$5(x + 1) + 6(x + 2) > 9(x + 3)$$

$$\underline{7x - 3(2x + 3) \geq 2(x - 18)}$$

## ŘEŠENÍ NEROVNIC

- ✦ Úloha: Řešte nerovnici s neznámou  $x$ :

$$\frac{2x + 1}{x + 2} \geq 1$$

- ✦ Aplikační úloha: Dokažte, že nerovnost  $a^2 + 1 \geq 2a$  platí pro každé reálné číslo  $a$ .

## KVADRATICKÁ ROVNICE NA SŠ

- ✘ Rovnice typu  $ax^2+bx+c=0$ .
- ✘ Kořeny kvadratické rovnice hledáme nejčastěji následujícími způsoby:
  - + pomocí vzorce,
  - + pomocí Viétoých vzorců,
  - + pomocí doplnění na úplný čtverec,
  - + ve speciálních případech, kdy  $b=0$  (ryze kvadratická rovnice) nebo  $c=0$  používáme **rozklad mnohočlenů**.

- ✘ **Úloha:** *Určete kořeny následujících kvadratických rovnic:*

$$2x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2$$

$$(x + 1)^2 = 5x + 1$$

## LITERATURA

- × Bečvář, J., Bečvářová, M., Vymazalová, H.: *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*. Edice Dějiny matematiky, 23. svazek. Praha: Prometheus, 2003
- × Czudek, P. a kol.: *Slovní úlohy řešené rovnicemi. 555 úloh pro žáky a učitele ZŠ, studenty a profesory SŠ*. Praha: sdružení podnikatelů HAV, 1998
- × Hejný, M.: *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Pdf UK, Praha 2014. ISBN 978-80-7290-776-2
- × Tipps, S., Johnson, A., Kennedy, L. M.: *Guiding Children's Learning of Mathematics*. Wadsworth, Cengage Learning, 2011