

Úlohy do semináře DM4

Sestavila Irena Budínová

1. Řešte následující úlohu, která typově odpovídá úloze z Matematické olympiády. Vysvětlete postup řešení.

V lichoběžníku $KLMN$ platí, že KL je delší základnou, průsečík úhlopříček P dělí úsečku KM v poměru $4 : 3$ a obsah trojúhelníku KLP je roven $12,5\text{cm}^2$. Určete obsah celého lichoběžníku.

2. Řešte následující úlohu, která typově odpovídá úloze z Matematické olympiády. Vysvětlete postup řešení.

Klára nalila džus do skleničky a hrnku a obě nádoby doplnila vodou. Hrněk měl třikrát větší objem než sklenička. Poměr džusu a vody ve skleničce byl $3 : 2$ a v hrnku $1 : 2$. Poté přelila obsah skleničky i obsah hrnku do džbánu. Jaký byl poměr džusu a vody ve džbánu?

3. Žák má problémy s výpočtem druhých mocnin dvojčlenů, např. $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Jaké postupy navrhuje, aby učivo zvládl?

4. Zdůvodněte (pokud možno různými způsoby), proč platí následující pravidla:

- a) Součin dvou záporných čísel je číslo kladné.
- b) Dělit nulou nelze.

5. Ukažte induktivní a deduktivní přístup při dokazování následujícího tvrzení a dokažte úplnou matematickou indukci.

Číslo $m(m^2 - 7)$ je dělitelné šesti pro libovolné přirozené číslo m .

6. Řešte následující slovní úlohy a) experimentálně, b) kongruencemi.

Číslo y dává po dělení pěti zbytek 2 a po dělení sedmi zbytek 4. O jaké číslo se jedná?

7. Dokažte, že $\sqrt{21}$ není racionální číslo. Znázorněte úsečku délky $\sqrt{21}$ cm

- a) pomocí Pythagorovy věty,
- b) pomocí Eukleidových vět.

8. Vyslovte větu o podílu dvou odmocnin a ověřte ji na úrovni ZŠ.

9. Na následující úloze vysvětlete problematické části procentového počtu.

Cena kabátu byla nejprve zvýšena o 20 % a potom byla tato nová cena snížena o 35 %. Nyní se kabát prodává za 3 990 Kč. Jaká byla jeho původní cena před zdražením?

10. Andrea si půjčila 480 000 Kč. Bude splácet pět let s roční úrokovou sazbou 11,8 %. Vypočítejte, kolik za půjčku zaplatí a) jednoduchým úrokováním, b) složeným úrokováním.

11. Řešte následující slovní úlohu a ukažte různé přístupy k řešení:

Honza, David a Kája mají dohromady ušetřeno 4 070 Kč. Kája ušetřil o 180 Kč méně než Honza, David dvakrát méně než Honza. Kolik korun ušetřil každý z nich?

12. Řešte metodou falešného předpokladu: Ke čtvrtině neznámého čísla jsme přičetli třetinu tohoto čísla a od výsledku odečetli 5. Získali jsme 16. Jaké je neznámé číslo?
13. Ukažte indukční a deduktivní přístupy při dokazování tvrzení:
Pro n prvních lichých přirozených čísel platí $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.
14. Vyslovte a dokažte větu o úhlopříčkách čtverce.
15. Řešte následující slovní úlohu i) pomocí rovnic, ii) pomocí funkcí (graficky):
Za chodcem jdoucím průměrnou rychlostí 4 km/h vyjel z téhož místa o 2 hodiny později cyklista průměrnou rychlostí 20 km/h. Za jak dlouho a jak daleko od výchozího místa dohoní cyklista chodce?
16. Řešte aritmeticky: Kolik litrů vody je třeba přilít k 7 litrům lihu o koncentraci 72 %, abychom získali líh o koncentraci 44 %?
17. Nalezněte koeficienty a tvar kvadratického polynomu $ax^2 + bx + c$, jestliže víte, že součin kořenů je roven $-\frac{5}{2}$ a součet kořenů $-\frac{3}{2}$.
18. Řešte úlohu prostředky žáka ZŠ: Obdélník má obsah 96 čtverečních jednotek. Jeho šířka je o 4 délkové jednotky větší než jeho délka. Určete rozměry obdélníku.
19. Řešte v oboru reálných čísel rovnici pouze ekvivalentními úpravami:

$$\frac{3x}{(x-2)(x-5)} = \frac{x+2}{x-5} - \frac{2}{x-2}$$
20. Zakreslete graf funkce $y = 3(5 - x)$ a na postupu vysvětlete transformace grafu.
21. Zakreslete grafy funkcí: $y = \frac{1}{x} + 1$, $y = \frac{1}{1-x}$
22. Zakreslete grafy funkcí $y = -x^2 + 1$, $y = 2x^2 - 4x - 6$. Určete vlastnosti druhé funkce.
23. Racionální lomená funkce: Zakreslete graf funkce $y = \frac{x+2}{x-5}$. Určete vlastnosti této funkce.
24. Jak se změní tlak plynu, jestliže se při stejné teplotě změní jeho objem na dvojnásobek? Zakreslete graf.
25. Goniometrické funkce: Zakreslete graf funkce $y = \frac{1}{2} \cos(x - \frac{\pi}{2})$. Určete vlastnosti.
26. Goniometrické funkce: Pomocí jednotkové kružnice definujte funkci $y = \operatorname{tg} x$. Dále pomocí jednotkové kružnice určete $\sin \frac{2}{3} \pi$.
27. Máme pravidelný trojboký jehlan o délce hrany základny 2 cm a výšce 4 cm. Určete odchylku a) boční stěny od základny, b) boční hrany od základny.
28. Zjistěte bez kalkulačky za použití pravítka, kružítka a úhlooměru úhel α , je-li $\sin \alpha = 0,73$.
29. Planimetrie: Vypočítejte obsah rovnoramenného lichoběžníku, jehož základny jsou v poměru 3:4, rameno je dlouhé 7 cm a výška je 4,5 cm.
30. Řešte konstrukční úlohu: Je dána úsečka AP, $|AP| = 4$ cm. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je AP výškou ke straně BC a dále je dáno $c = 5$ cm, $t_b = 6$ cm.
31. Geometrická zobrazení: Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: strany a, b a těžnice ke straně c .

32. Míry geometrických útvarů.

Vepište do kružnice o poloměru r postupně rovnostranný trojúhelník, čtverec, pravidelný šestiúhelník, pravidelný osmiúhelník. Vyjádřete jejich obvody a obsahy pomocí r .

33. Řešte kombinatorické úlohy. Postupujte způsobem odpovídajícím základní škole a pomocí vzorce, který na příkladu osvětlíte.

Kolik přímek je určených 12 různými body v rovině, jestliže právě čtyři z nich leží na jedné přímce a žádné tři další ze zadaných bodů již neleží na jedné přímce?

34. Řešte úlohy z pravděpodobnosti a statistiky:

Z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 0 sestavte všechna šesticiferná čísla tak, aby se číslice v zápisu čísla neopakovaly. Náhodně vybereme jedno číslo. Vypočítejte pravděpodobnost, že náhodně vybrané číslo bude i) dělitelné pěti, ii) dělitelné třemi.