Úlohy k přípravě na státnice 2018

1. Řešte následující úlohu, která typově odpovídá úloze z Matematické olympiády. Vysvětlete postup řešení.

   Klára nalila džus do skleničky a hrnku a obě nádoby doplnila vodou. Hrnek měl třikrát větší objem než sklenička. Poměr džusu a vody ve skleničce byl $3:2$ a v hrnku $1:2$. Poté přelila obsah skleničky i obsah hrnku do džbánu. Jaký byl poměr džusu a vody ve džbánu?

2. Řešte následující úlohu, která typově odpovídá úloze z Matematické olympiády. Vysvětlete postup řešení.

   V lichoběžníku $KLMN$ platí, že KL je delší základnou, průsečík úhlopříček P dělí úsečku KM v poměru 4 : 3 a obsah trojúhelníku KLP je roven 12,5 cm . Určete obsah celého lichoběžníku.

3. Řešte následující úlohu, která typově odpovídá úloze z Matematické olympiády. Vysvětlete postup řešení.

   Prodavačka prodávala syrová vejce. První zákazník si koupil polovinu všech vajec a půl vejce, druhý zákazník polovinu zbytku a půl vejce, třetí zákazník polovinu zbytku po druhém a půl vejce a prodavačce zbylo jedno vejce. Kolik vajec měla na počátku?

4. Algebrogramy jsou typem příkladů vhodných pro matematicky nadané žáky. Na následujících příkladech vysvětlete postup řešení algebrogramu.

   a)

$$\begin{array}{r} \text{LES} \\ \text{LES} \\ \text{LES} \\ \hline \text{TAM} \end{array}$$

   b)

$$\begin{array}{r} \text{AAABCC} \\ \cdot\,\text{C} \\ \hline \text{DCCAABC} \end{array}$$

5. Doplňte chybějící číslice tak, aby platilo:

$$\begin{array}{r} x\;x\;9 \\ \cdot\,x\;x\;4 \\ \hline x\;x\;x\;x \\ 1\;7\;x\;4\;\; \\ x\;x\;2\;3\;\;\;\; \\ \hline x\;x\;x\;x\;x\;x \end{array}$$

6. Žák má problémy se sčítáním zlomků, sčítá je tak, že součet čitatelů dělí součtem jmenovatelů, např.: $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{5}$. V čem vidíte příčinu chyby? Jaká nápravná cvičení navrhujete?

Sestavila Irena Budínová

7. Ukažte různé chyby, kterých se dopouštějí žáci s dysfunkcemi při a) písemném sčítání, b) písemném odčítání, c) písemném násobení čísel. Uvažujte celá i desetinná čísla. Lze tyto nedostatky odstranit? Jak?
8. Zdůvodněte (pokud možno různými způsoby), proč platí následující pravidla:
   a) Součin sudého počtu záporných čísel je číslo kladné.
   b) Součin lichého počtu záporných čísel je číslo záporné.
   c) Dělit nulou nelze.
9. Prostředky žáka základní školy zapište číslo $0,\overline{15}$ pomocí zlomku.
10. Vyslovte a zdůvodněte následující pravidla:
    a) Sčítání / odčítání dvou zlomků.
    b) Násobení dvou zlomků.
    c) Dělení zlomku zlomkem.
11. Vyslovte a dokažte kritéria dělitelnosti čísel 2, …, 10.
12. Dokažte následující tvrzení z elementární teorie čísel:
    a) Součet lichého a sudého čísla je liché číslo.
    b) Součin několika lichých čísel je číslo liché.
    c) Je-li $n > 1$ libovolné celé číslo, je vždy jedno z čísel $n^2 - 1, n^2, n^2 + 1$ dělitelné pěti.
    d) Dokažte, že číslo $a = n^5 - 5n^3 - 6n, n \in N$ je dělitelné 10.
13. Ukažte induktivní a deduktivní přístup při dokazování následujících tvrzení a dokažte úplnou matematickou indukcí.
    a) Dokažte, že číslo $n^3 + 5n$ je dělitelné šesti pro libovolné přirozené n.
    b) Číslo $m(m^2 - 7)$ je dělitelné 6 pro libovolné přirozené číslo m.
14. Definujte největší společný dělitel a nejmenší společný násobek několika čísel. Nalezněte největší společný dělitel čísel 204, 476 a 578
    a) Eukleidovým algoritmem,
    b) rozkladem čísel na součin prvočinitelů.

    Nalezněte nejmenší společný násobek čísel 12, 32, 60, 80, 120
    a) rozkladem čísel na součin prvočinitelů,
    b) pomocí věty: Pro libovolná celá čísla a, b existuje jejich nejmenší společný násobek $[a, b]$ a platí $(a, b) \cdot [a, b] = |a \cdot b|$.
15. Řešte následující slovní úlohy a) experimentálně, b) rovnicemi, c) kongruencemi.
    a) Číslo y dává po dělení pěti zbytek 2 a po dělení sedmi zbytek 4. O jaké číslo se jedná?
    b) Katka si dává do prasátka pouze dvoukoruny a pětikoruny. Spočítala, že má přesně 97 korun. Jaké jsou možnosti počtu dvoukorun a pětikorun?
16. Dokažte, že $\sqrt{5}$ není racionální číslo. Znázorněte úsečku délky $\sqrt{5}$ cm
    a) pomocí Pythagorovy věty,
    b) pomocí Eukleidových vět.
17. Ilustrujte zavedení Ludolfova čísla jako poměru určitých délek a ukažte možnost přiblížení jeho iracionality žákům.

Sestavila Irena Budínová

18. Řešte následující úlohy z finanční matematiky. Vysvětlete na nich problematické části procentového počtu.
    a) Cena kabátu byla nejprve zvýšena o 20 % a potom byla tato nová cena snížena o 35 %. Nyní se kabát prodává za 3 990 Kč. Jaká byla jeho původní cena před zdražením?
    b) Cena kabátu byla nejprve zvýšena o 20 % a potom byla tato nová cena snížena o 25 %. Ušetří nakupující oproti ceně před zdražením?
    c) Kolika procenty byla úročena půjčka, jestliže částka 80 000 Kč byla za jeden rok splacena částkou 106 000 Kč?
19. Vyberte zájezd z nabídky cestovní kanceláře pro rok 2018 a vypočtěte cenu zájezdu pro čtyřčlennou rodinu. Zahrňte nabízené slevy, připočtěte cestovní pojištění. Které matematické dovednosti jsou potřeba k určení ceny?
    Vysvětlete následující slevy, se kterými se můžeme setkat v obchodech, z hlediska procentového počtu: 1+1 zdarma, 2+1 zdarma, 3+1 zdarma, 400 ml + 100 ml zdarma, 8 ks + 2 ks zdarma. Ukažte na konkrétních příkladech z letáků.
20. Řešte následující slovní úlohy a ukažte různé přístupy k řešení:
    a) Honza a Kája mají dohromady ušetřeno 3 220 Kč. Kája ušetřil o 180 Kč méně než Honza. Kolik korun ušetřil každý z nich?
    b) Jirka počítal projíždějící auta a motorky. Projelo 21 vozidel a dohromady měly 74 kol. Kolik bylo aut a kolik motorek?
    c) Ukažte rozdíl mezi syntetickou a analytickou metodou při řešení slovní úlohy: Pavel načesal 160 kg jablek, hrušek o 40 kg více než jablek a švestek dvakrát méně než hrušek. Kolik kilogramů ovoce Pavel načesal?
21. Ukažte různé způsoby zavedení / definování následujících pojmů na základní škole: zlomek, desetinné číslo, lineární funkce, trojúhelník, kružnice.
    Vysvětlete princip axiomatické výstavby v geometrii.
22. Ukažte možnosti ověřování / dokazování následujících matematických tvrzení. Ve kterém ročníku se s těmito větami můžeme setkat?
    c) Pro n prvních lichých přirozených čísel platí $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.
    d) Dokažte pomocí nepřímého důkazu: Jestliže n^2 není dělitelné třemi, pak n také není dělitelné třemi.
    e) Součet tří po sobě jdoucích mocnin čísla 2 je vždy dělitelný číslem 7.
    f) Pythagorovu větu.
    g) Trojúhelníkovou nerovnost.
23. Vyřešte rovnici $\frac{1{,}1-0{,}1x}{1{,}2x-0{,}2} = \frac{1{,}01-0{,}01x}{0{,}12x-1{,}82}$ a popisujte úpravy, které provádíte.
24. Řešte úlohu: Součet tří po sobě jdoucích celých čísel je roven polovině součinu prvních dvou. Určete tato čísla.
25. Řešte následující slovní úlohy.
    a) 45 litrů vína bylo stočeno do 54 lahví, některé byly litrové a některé 0,7 litrové. Kolik bylo kterých lahví?
    b) Řešte v množině celých čísel $3x + 15y = 0$.

c) Řešte Diofantickou rovnici: Zjistěte, kolika způsoby lze přelít 31 litrů vína do dvoulitrových a pětilitrových nádob.

26. Řešte pomocí rovnice nebo soustavy rovnic: Tatínek je třikrát starší než Michal. Za pět roků bude tatínek jen dvakrát starší než Michal. Kolik roků je tatínkovi a kolik roků je Michalovi?

27. Řešte úlohy a rovnice vedoucí na řešení kvadratických rovnic:
    a) Odvoďte vztahy mezi reálnými kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ a jejími kořeny (tzv. Vietovy vzorce).
    b) Nalezněte koeficienty a tvar kvadratického polynomu $ax^2 + bx + c$, jestliže víte, že součin kořenů je roven $-\frac{5}{2}$ a součet kořenů $-\frac{3}{2}$.
    c) Řešte v oboru reálných čísel rovnici ekvivalentními i důsledkovými úpravami:
    $$\frac{3x}{(x-2)(x-5)} = \frac{x+2}{x-5} - \frac{2}{x-2}.$$

28. Na následujících příkladech popište metodiku výuky zakreslování grafu funkce.
    a) Motivujte reálnými příklady následující funkce a zakreslete jejich grafy: $y = 3x, y = -0{,}5x, y = 2x - 5, y = 2(x+3)$.
    b) Zakreslete grafy funkcí: $y = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{x} + 1, y = \frac{1}{x+1}$
    c) S využitím grafu lineární funkce řešte úlohu: Z místa A vyšel Adam průměrnou rychlostí 5 km/h do místa B, vzdáleného 10 km, a o půl hodiny později vyšel z místa B do místa A Boris průměrnou rychlostí 4 km/h. Za jak dlouho a jak daleko od místa A se budou míjet?
    d) Zakreslete graf závislosti šířky obdélníku o obsahu 24 cm^2 na jeho výšce. Vysvětlete možnosti rozvoje limitního myšlení na tomto příkladu.

29. Kvadratická funkce. Funkce racionální lomená.
    a) Zakreslete grafy funkcí $y = x^2, y = -x^2 + 1, y = 2x^2 + 6x, y = 2x^2 - 4x - 6$. Určete vlastnosti poslední funkce.
    b) Zakreslete graf funkce $y = \frac{x+2}{x-5}$. Určete vlastnosti této funkce.
    c) Míč byl vyhozen svisle nahoru rychlostí 20 m/s. Jak vysoko poletí a za jak dlouho dopadne na zem? Zakreslete graf závislosti dráhy na čase.

30. Goniometrické funkce.
    a) Vyvoďte funkce $\sin x$ a $\cos x$ pomocí pravoúhlého trojúhelníku a podobnosti.
    b) Zakreslete grafy funkcí $y = \sin 3x, y = -2\sin x + 1, y = \frac{1}{2}\cos(x - \frac{\pi}{2})$. Určete vlastnosti druhé z funkcí.
    c) Pomocí jednotkové kružnice definujte funkce $y = \sin x, x = \cos x, y = \operatorname{tg} x$.

31. Aplikace goniometrických funkcí.
    a) Vypočtěte obsah rovnoběžníku s délkami stran 5 cm, 4 cm, jestliže sousední strany svírají úhel o velikosti 30°.
    b) Máme pravidelný trojboký jehlan o délce hrany základny 2 cm a výšce 4 cm. Určete odchylku a) boční stěny od základy, b) boční hrany od základny.
    c) Zjistěte bez kalkulačky za použití pravítka, kružítka a úhloměru úhel α, je-li $\sin\alpha = 0{,}73$.

32. Planimetrie.
    a) Proveďte jakožto konstrukční úlohu grafický rozdíl dvou úseček.
    b) Jaký je součet vnitřních úhlů čtyřúhelníku? Dokažte různými způsoby.
    c) Jaké jsou vlastnosti úhlopříček kosočtverce? Dokažte.
    d) Vyslovte a dokažte základní větu o obvodových úhlech a středovém úhlu.
33. Vypočítejte obsah rovnoramenného trojúhelníku, jehož rameno je o 30 % delší než jeho základna.
34. Řešte konstrukční úlohy:
    a) Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, jestliže znáte |BC| = 4,2 cm, dále velikost výšky ke straně a a velikost úhlu α. Velikosti zvolte tak, aby úloha měla řešení.
    b) Sestrojte lichoběžník ABCD, znáte-li délky jeho základen a úhlopříček.
    c) Proveďte a popište základní konstrukci úsečky délky $\frac{15}{4}$ cm dvěma různými způsoby.
    d) Sestrojte všechny trojúhelníky, znáte-li a, c, t_b. Uveďte tři různá řešení.
35. Geometrická zobrazení.
    a) Je dán bod A, který leží uvnitř konvexního úhlu určeného přímkami p, q. Určete na přímkách body X, Y tak, aby trojúhelník AXY měl nejmenší obvod.
    b) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: strany a, b a těžnice ke straně c.
    c) Je dán čtverec ABCD, přímka p a bod S. Sestrojte úsečku XY tak, aby bod S byl jejím středem, bod X ležel na přímce P a bod Y byl bodem hranice čtverce ABCD.
36. Geometrická zobrazení.
    a) Rozdělte úsečku AB v poměru zlatého řezu.
    b) K dvěma různým kružnicím sestrojte jejich společné tečny.
    c) Pomocí stejnolehlosti dokažte, že těžnice trojúhelníku se protínají v jednom bodě.
37. Stereometrie
    a) Definujte pravidelná tělesa a uveďte jejich zajímavé vlastnosti. Experimentálním způsobem ověřte platnost Eulerovy věty.
    b) Sestrojte co nejvíce sítí těchto těles: krychle, kvádr, pravidelný šestiboký hranol.
    c) Sestrojte sítě těchto těles: čtyřboký jehlan, válec, kužel.
38. Čtverec o straně délky 4,5 cm se otáčí kolem své úhlopříčky. Vypočítejte objem a povrch vzniklého tělesa.
39. Míry geometrických útvarů.
    a) Definujte následující pojmy: délka úsečky, obsah rovinného útvaru, objem prostorového útvaru.
    b) Ukažte zavedení obsahu čtverce, obdélníku, rovnoběžníku, trojúhelníku.
    c) Ukažte možné způsoby zavedení vztahu pro obsah lichoběžníku.
40. Míry geometrických útvarů.
    a) Jak lze na základní škole vyvodit vztahy pro obvod a obsah kruhu?

b) Vepište do kružnice o poloměru r postupně rovnostranný trojúhelník, čtverec, pravidelný šestiúhelník, pravidelný osmiúhelník. Vyjádřete jejich obvody a obsahy pomocí r.
c) Odvoďte vzorec pro povrch kužele.

41. Řešte kombinatorické úlohy. Postupujte způsobem odpovídajícím základní škole a pomocí vzorce, který na příkladu osvětlíte.
    a) Na vrchol hory vede pět turistických cest a lanovka. Zjistěte počet způsobů, kterými je možné se dostat i) na vrchol a zpět tak, že zpáteční cesta je jiná než cesta tam, ii) na vrchol a zpět tak, že alespoň jednou je použita lanovka.
    b) Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá z desíti číslic vyskytuje nejvýše jednou. Kolik z těchto čísel je větších než 8 000?
    c) Volejbalového turnaje se zúčastní 10 družstev. Určete, kolik utkání bude sehráno, jestliže se družstva rozlosují do dvou pětičlenných skupin, ve kterých bude hrát každé družstvo s každým a potom se vítězové skupin utkají o první a druhé místo.
    d) Určete, kolika způsoby můžeme na šachovnici rozestavit 8 věží tak, aby žádné dvě nebyly ve stejné řadě a stejném sloupci.
42. Řešte kombinatorické úlohy:
    a) Kolik anagramů (bez ohledu na jejich smysl) lze sestavit z písmen slova MATEMATIKA? V kolika z nich není žádná dvojice sousedních písmen tvořena dvěma písmeny A?
    b) Kolika způsoby můžeme rozdělit 30 stejných kuliček mezi 5 dětí?
    c) Kolik přímek je určených 12 různými body v rovině, jestliže právě čtyři z nich leží na jedné přímce a žádné tři další ze zadaných bodů již neleží na jedné přímce?
43. Řešte úlohy z pravděpodobnosti a statistiky:
    d) Z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 0 sestavte všechna šesticiferná čísla tak, aby se číslice v zápisu čísla neopakovaly. Náhodně vybereme jedno číslo. Vypočítejte pravděpodobnost, že náhodně vybrané číslo bude i) dělitelné pěti, ii) dělitelné třemi.
    a) Uvažuje všechna trojciferná čísla menší než 1000. Náhodně vyberte jedno číslo. Jaká je pravděpodobnost, že číslo je menší než 120 a je sudé?
    b) Z osudí, ve kterém je 8 bílých a 12 černých kuliček vybíráme i) jednu bílou, ii) jednu bílou nebo černou, iii) dvě tak, aby byly obě černé. Jaká je pravděpodobnost jednotlivých výběrů?
    c) Automobil ujel vzdálenost 120 km. 10 km jel průměrnou rychlostí 35 km/h, 90 km jel průměrnou rychlostí 120 km/h a 20 km jel průměrnou rychlostí 50 km/h. Vypočítejte průměrnou rychlost automobilu na celé trase.
44. Určete četnost písmen v určitém českém a anglickém textu. Na souboru dat definujte vhodné statistické veličiny.

Sestavila Irena Budínová

45. Řešte historické úlohy:
    a) Staří Egypťané neznali pojem čitatele a měli znaky pouze pro zlomky jedna polovina, jedna třetina, jedna čtvrtina, atd. Dnes pro tyto zlomky s čitatelem 1 užíváme název **kmenné zlomky**. Egypťané tyto zlomky zapisovali tak, že nad číslo udávající velikost jmenovatele umístili značku připomínající tvar oka. Počítání s těmito zlomky bylo velmi pracné. Egypťané každý zlomek museli zapsat jako součet navzájem různých kmenných zlomků. Jakým způsobem by zapsali např. číslo $\frac{9}{16}, \frac{5}{6}, \frac{4}{7}$?
    b) **Úloha ze starověké Mezopotámie:** Nalezl jsem kámen, ale neznám jeho hmotnost. Poté, co jsem přidal $\frac{1}{7}$ a poté ještě $\frac{1}{11}$ toho všeho, dostal jsem 60 váhových jednotek. Jaká byla původní hmotnost kamene?
    c) **Úloha z helénistických zemí – Diofantův epitaf:** Zde tento náhrobek přikrývá Diofanta – zázrak na pohled! Aritmetickým uměním sděluje kámen jeho věk. Šestinu života popřál mu Bůh být chlapcem., když pak dvanáctina uplynula, nechal mu vyrašit vous; ještě sedmina, tu rozžehl mu svatební pochodeň, a pět let nato mu dal synáčka. Běda, nešťastné dítě! Dosáhlo teprve poloviny otcova věku, když přijal ho Hádes, ten strašný. Ještě čtyři roky snášel Diofantos bolest, žije vědě. A nyní řekni věk, kterého dosáhl.
46. Řešte historické úlohy:
    a) Staří čínští matematikové prováděli krácení zlomků podle tohoto předpisu: „Co můžeš rozdělit dvěma, rozděl; nelze-li dělit dvěma, odčítej od většího menší. Odčítej vzájemně tak dlouho, až dostaneš stejná čísla. Tím stejným číslem krať zlomek.“ Jak bychom tímto způsobem krátili zlomek $\frac{3\,000}{3\,600}$?
    b) Aproximujte obsah kruhu metodou, kterou použil Archimédes.
47. Připomeňte si matematické úlohy s tématikou z jiného oboru (úlohy o pohybu, úlohy o směsích).
48. Devět centimetrů na mapě představuje pět kilometrů ve skutečnosti. Určete měřítko této mapy.
49. Mezipředmětové vztahy matematika – filozofie: Popište, jakou filozofii zastávali Platón, Aristoteles, Johannes Kepler. Jaké byly jejich matematické či jiné objevy?
50. Co vše má obsahovat příprava na vyučovací hodinu? Ilustrujte na fiktivní přípravě „dělení zlomku přirozeným číslem“.