1 Funkce dvou a tří proměnných

1.1 Pojem funkce více proměnných

Definice
Funkce dvou proměnných je předpis, který každému bodu z $\mathbf{R}^2$ (tj. z roviny) přiřazuje jediné reálné číslo.

Značení: $z = f(x, y)$,
$D(f) \subset \mathbf{R}^2$ - definiční obor funkce funkce f,
$H(f) \subset \mathbf{R}$ - obor funčních hodnot funkce f

Příklady
Objem kvádru $V = a^2c$
vzdálenost bodu v rovině od počátku soustavy souřadnic $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Definice
Funkce tří proměnných je předpis, který každému bodu z $\mathbf{R}^3$ (tj. z prostoru) přiřazuje jediné reálné číslo.

Značení: $f(x, y, z)$

Příklady
Objem hranolu $V = abc$
vzdálenost bodu v prostoru od počátku soustavy souřadnic $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + y^2}$.
Příklad
Je dána funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2y + y + 1}$. Vypočtěte $f(1, 2)$, $f(-5, 1)$.
Řešení
$f(1, 2) = \sqrt{1^2 \cdot 2 + 2 + 1} = \sqrt{5}$,
$f(-5, 1) = \sqrt{(-5)^2 \cdot 1 + 1 + 1} = \sqrt{27}$.

1.2 Parciální derivace funkce

Při výpočtu parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x považujeme proměnnou y za konstantu a stanovíme derivaci podle vzorců a pravidel pro derivování funkce jedné proměnné. Analogicky při výpočtu parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle y považujeme proměnnou x za konstantu.

Značení:
parciální derivace funkce f podle x: $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\quad {f_x}'$
parciální derivace funkce f podle x v bodě (a, b): $\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}$, $\quad {f_x}'(a, b)$
parciální derivace funkce f podle y: $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\quad f'_y$
parciální derivace funkce f podle y v bodě (a, b): $\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}$, $\quad f'_x(a, b)$

Parciální derivace funkce f podle x udává změnu funkce f ve směru osy x, parciální derivace funkce f podle y udává změnu funkce f ve směru osy y.

Příklady

Vypočtěte parciální derivace funkce f v bodě (a, b) podle obou proměnných:

1. $f(x, y) = 3x^2y^3 + 5x - 6y + 4$, $(a, b) = (-1, 6)$
2. $f(x, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$, $(a, b) = (1, 2)$
3. $f(x, y) = \dfrac{x+y}{x-y}$, $(a, b) = (-3, 5)$

Řešení

1. $$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^3 + 5 \qquad \frac{\partial f(-1,6)}{\partial x} = 6 \cdot (-1) \cdot 6^3 + 5 = 221$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 9x^2y^2 - 6 \qquad \frac{\partial f(-1,6)}{\partial y} = 9 \cdot (-1)^2 \cdot 6^2 - 6 = 30$$

2. $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial f(1,2)}{\partial x} = \frac{1}{2} - \frac{2}{1} = -\frac{3}{2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y(1,2)} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{1} = \frac{3}{4}$$

3. $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 \cdot (x-y) - (x+y) \cdot 1}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{(x-y)^2}$$
$$\frac{\partial f(-3,5)}{\partial x} = \frac{-10}{(-3-5)^2} = -\frac{10}{64} = -\frac{5}{32}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1 \cdot (x-y) - (x+y) \cdot (-1)}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}$$
$$\frac{\partial f(-3,5)}{\partial x} = \frac{-6}{(-3-5)^2} = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$$

Příklad

Ukažte, že funkce $u(x, y) = \frac{y}{x}$ vyhovuje parciální diferenciální rovnici

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \; .$$

Řešení

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

Dosadíme do dané rovnice

$$L = x \cdot (-\frac{y}{x^2}) + y \cdot \frac{1}{x} = -\frac{y}{x} + \frac{y}{x} = 0, \quad P = 0 \quad \Rightarrow \quad L = P$$

1.3 Derivace ve směru

Derivace funkce f v bodě (a, b) ve směru daném vektorem $\vec{s} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ udává změnu funkce f ve směru vektoru $\vec{s}$.

Značení: $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial \vec{s}}$

Výpočet:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\sin\alpha\ ,$$

kde α je úhel, který svírá vektor $\vec{s}$ s kladnou poloosou x.

1.4 Gradient funkce

Gradient funkce f je vektor (f'_x, f'_y).
Značí se grad f.
Gradient funkce f v bodě (a, b) udává směr největšího růstu funkce f v bodě (a, b).
Výpočet derivace ve směru pomocí gradientu:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial \vec{s}} = \operatorname{grad} f(a,b) \cdot \vec{s^o}\ ,$$

kde $\vec{s^o}$ je jednotkový vektor ve směru vektoru $\vec{s}$.
Příklad
Je dána funkce $f(x, y) = x^3 - y^2 + 2xy$.

1. Vypočtěte $\operatorname{grad} f$ v bodě $[2, 3]$.

2. Vypočtěte derivaci funkce f v bodě $[2, 3]$ ve směru vektoru $\vec{s} = (-3, 2)$.

Řešení

1. $\operatorname{grad} f = (3x^2 + 2y, -2y + 2x) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(2,3) = (3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3, -2 \cdot 3 + 2 \cdot 2) = (18, -2)$

2. $$\frac{\partial f(2,3)}{\partial \vec{s}} = (18, -2) \cdot (-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}) = -\frac{54}{\sqrt{13}} - \frac{4}{\sqrt{13}} = \\ = -\frac{58}{\sqrt{13}} = -\frac{58\sqrt{13}}{13}$$

1.5 Derivace vyšších řádů

Pro funkci dvou proměnných jsou parciální derivace f_x a f_y funkcemi dvou proměnných a mohou tedy mít parciální derivace. To jsou potom *druhé parciální derivace* funkce f.
Značení:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \text{nebo} \qquad f_{xx}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad \text{nebo} \qquad f_{yy}\ .$$

"Smíšená" parciální derivace $\dfrac{\partial f_x}{\partial y}$ se zapisuje jako

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \text{nebo} \;\; f_{xy}$$

a parciální derivace $\dfrac{\partial f_y}{\partial x}$ jako

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \text{nebo} \;\; f_{yx}\ .$$

Na pořadí proměnných v poznačení smíšené parciální derivace příliš nezáleží, protože obvykle se ukazuje, že f_{xy} a f_{yx} si jsou rovny. Platí totiž:

Existuje-li f_y i f_{xy} a je-li f_{xy} spojitá funkce, pak existuje i f_{yx} a platí $f_{yx} = f_{xy}$.

Totéž platí, zaměníme-li x a y.
Příklad
Najděte první a druhé parciální derivace funkce $f(x) = x^2 y + y^2 \sin x$.
Řešení

$$\begin{array}{lll} f_x = 2xy + y^2 \cos x & f_{xx} = 2y - y^2 \sin x & f_{xy} = 2x + 2y \cos x \\ f_y = x^2 + 2y \sin x & f_{yy} = 2 \sin x & f_{yx} = 2x + 2y \cos x \end{array}$$

Analogicky se definují derivace vyšších řádů. např. parciální derivace $\dfrac{\partial f_{xy}}{\partial y}$ znamená třetí parciální derivaci funkce f: f_{xyy}.
Příklad
Pro funkci z předchozího příkladu vypočtěte všechny třetí parciální derivace.

Řešení

$$\begin{array}{ll} f_{xxx} = -y^2 \sin x & f_{xxy} = 2 - 2y \sin x \\ f_{xyx} = 2 - 2y \sin x & f_{xyy} = 2 \cos x \\ f_{yxx} = -2 - 2y \sin x & f_{yxy} = 2 \cos x \\ f_{yyx} = 2 \cos x & f_{yyy} = 0 \end{array}$$

1.6 Extrémy funkce dvou proměnných

Řekneme, že funkce $f(x, y)$ má v bodě (x_0, y_0) *lokální maximum* (resp. *lokální minimum*), nabývá-li v nějakém okolí bodu bodu (x_0, y_0) maximální (resp. minimální) hodnoty v (x_0, y_0). Analogicky jako pro funkci jedné reálné proměnné platí (nutná podmínka existence extrému):

Má-li funkce f lokální maximum nebo lokální minimum v bodě (x_0, y_0), potom je

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{a} \qquad f_y(x_0, y_0) = 0\ .$$

Bod (x_0, y_0), v němž jsou první parciální derivace nulové, se nazývá *stacionární* bod.

Může se stát, že derivace f_x a f_y jsou v bodě (x_0, y_0) nulové a přesto nemá funkce f v tomto bodě lokální maximum ani minimum. Z tohoto hlediska je zajímavý případ tzv. sedlového bodu, tj. bodu, ve kterém má funkce f v jednom směru lokální maximum a v druhém směru lokální minimum.

Nechť funkce f m8 spojité druhé parciální derivace. Označme (x_0, y_0) stacionární bod funkce f. Specifikace extrému se provádí pomocí druhých parciálních derivací. Označme $D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$. Platí

1. Je-li $D(x_0, y_0) > 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) extrém.
   (a) Je-li $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální minimum.
   (b) Je-li $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální maximum.
2. Je-li $D(x_0, y_0) < 0$, nemá funkce f v bodě (x_0, y_0) extrém, má v bodě (x_0, y_0) sedlový bod.
3. Je-li $D(x_0, y_0) = 0$, nedává tato věta žádnou informaci o extrému funkce f v bodě (x_0, y_0).