

## Funkce více proměnných

### Parciální derivace

V následujících příkladech zjistěte, kde jsou funkce definované, spojité, kde mají parciální derivace 1. řádu a kde jsou spojité 1. parciální derivace

1.  $f(x, y) = \ln(x + y)$
2.  $f(x, y, z) = \cos x \cosh y$
3.  $f(x, y) = |x||y|$
4.  $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$
5.  $f(x, y) = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$
6.  $f(x, y, x) = x^{\frac{y}{z}}$ .
7. Nechť  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pro jaké hodnoty  $\alpha$  bude mít funkce

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

parciální derivace 1. řádu v bodě  $(0, 0)$ ?

Spočtěte parciální derivace 2. řádu a zjistěte, zda jsou záměnné

8.  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$
9.  $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$
10.  $f(x, y) = x \sin(x + y)$
11.  $f(x, y) = \operatorname{tg} \frac{x^2}{y}$
12.  $f(x, y, z) = x^{y^z}$
13.  $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$

14.  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$  (Uvažujte bod  $(0, 0)$ .)
15. Spočtete derivaci funkce  $x^2 - y^2$  v bodě  $(1, 1)$  ve směru jednotkového vektoru, který svírá s kladným směrem osy  $x$  úhel  $\frac{\pi}{3}$ .
16. Najděte jednotkový vektor, v jehož směru má derivace  $x^2 - xy + y^2$  v bodě  $(1, 1)$  největší, nejmenší a nulovou hodnotu.
17. Spočtete  $\frac{\partial F}{\partial u}$ , kde  $F = f(g)$ ,  $f(x, y, z)$  je daná funkce a  $g_1(u, v) = (u^2 - 1)/2v$ ,  $g_2(u, v) = (u + v)/(u - v)$ ,  $g_3(u, v) = u^2 - v^2$ .
18. Necht'  $f(s, t)$  je hladká nezáporná funkce na  $\mathbb{R}^2$ . Vyjádřete parciální derivace 1. řádu funkce  $g(x, y) = f(x, y)^{f(y, x)}$  pomocí hodnot  $f$  a jejich parciálních derivací.