IMAk02 Základy algebry - Samostatná zápočtová práce

1. Jsou dány množiny $A = \{a, b, c, d\}$ a $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Rozhodněte a zdůvodněte, zda následující binární relace z množiny A do množiny B jsou zobrazení. Pokud ano, určete přesně typ zobrazení:

a) $R_1 = \{[b, 1], [c, 2], [d, 3]\}$,
b) $R_2 = \{[a, 1], [b, 2], [a, 3]\}$,
c) $R_3 = \{[a, 1], [b, 3], [c, 2], [d, 4]\}$,
d) $R_4 = \{[a, 1], [b, 1], [c, 1], [d, 1]\}$.

2. Rozhodněte a zdůvodněte, která z následujících množin je ekvivalentní s množinou všech přirozených čísel $\boldsymbol{N}$. Které z uvedených množin jsou nekonečné?

$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\}$, $B = \{7, 6, 4, a, x\}$, $D = \{x \in \boldsymbol{N}: x = 5^n \wedge n \in \boldsymbol{N}\}$.

3. Zjistěte, které z vlastností *ND, A, K, EN, EI, ZR* mají operace $*$, $\circ$, $\vartriangle$ definované v množině $M = \{a, b, c\}$:

$*$	a	b	c
a	b	a	c
b	a	b	c
c	c	c	c

$\circ$	a	b	c
a	c	c	c
b	c	c	c
c	c	c	c

$\vartriangle$	a	b	c
a	c		a
b		c	b
c	a	b	c

Dále určete neutrální a agresivní prvky, pokud existují. Stanovte přesně typ každé algebraické struktury, kterou množina M spolu s jednotlivými operacemi tvoří.

4. Rozhodněte a zdůvodněte, které z vlastností *ND, A, K, EN, EI, ZR* mají následující operace ($\boldsymbol{C}$ je množina všech celých čísel):

a) $\circ = \{[x, y. z] \in \boldsymbol{N}^3: z = x + 2y\}$ neboli $x \circ y = x + 2y$,

b) $* = \{[x, y. z] \in \boldsymbol{C}^3: z = x + y + 1\}$ neboli $x * y = x + y + 1$.

5. Určete přesně typ algebraických struktur s jednou operací ($\boldsymbol{Q}$ je množina všech racionálních čísel, $\boldsymbol{Q}_0^+$ je množina všech nezáporných racionálních čísel):

$(\boldsymbol{N}, +)$, $(\boldsymbol{N}, \cdot)$, $(\boldsymbol{N}, -)$, $(\boldsymbol{Q}_0^+, +)$, $(\boldsymbol{Q}_0^+, \cdot)$, $(\boldsymbol{Q}-\{0\}, +)$, $(\boldsymbol{Q}-\{0\}, \cdot)$.

6. Určete přesně typ algebraických struktur se dvěma operacemi:

$(\boldsymbol{N}, +, \cdot)$, $(\boldsymbol{Q}_0^+, +, \cdot)$, $(\boldsymbol{Q}-\{0\}, +, \cdot)$.

7. Je dána množina $M = \{a, b,\}$. Určete přesně typ algebraických struktur

$(\mathcal{P}(M), \cup)$, $(\mathcal{P}(M), \cap)$, $(\mathcal{P}(M), -)$, $(\mathcal{P}(M), \vartriangle)$, $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$, $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup)$,

kde $\mathcal{P}(M)$ je potenční systém množiny M. Platí uvedené závěry i pro všechny množiny M, které mají nejméně dva prvky?