**Binární operace v množině**

*Definice 1:*Nechť M je libovolná neprázdná množina. **Binární operací** **○** v množině M rozumíme zobrazení z množiny kartézského součinu M x M do množiny M.

* Jestliže v binární operaci je vzoru [*x,y*]  M x M přiřazen obraz *z*  M, píšeme:
1. *x* ***○*** *y = z*; prvek *z*  M se nazývá **výsledek operace** **○**.
2. **○**: M x M → M.

*Poznámka 1.* Zápisu [[*x,y*], *z*]  **○**, odpovídá zápis *x* ***○*** *y = z* (tj. *z* je výsledek operace **○**).

*Příklad 1.* a)Zápisu [[1,2], 3]  **+**, odpovídá 1 + 2 = 3 (tj. 3 je výsledek operace sčítání čísel 1 a 2).

 **binární operace sčítání** **součet**

 b) Zápisu [[2,3], 6]  **·**, odpovídá 2 **·** 3 = 6 (tj. 6 je výsledek operace násobení čísel 2 a 3).

 **binární operace násobení** **součin**

*Poznámka 2.* Označení binárních operací: +, **·**, **○**, **⁎**, **□**,..

 Příklady binárních operací ve školské matematice:

1. Sčítání (+), odčítání (**-**), násobení (**·**), dělení (**:**), umocňování,… (pracujeme s nimi v číselných množinách).
2. Sjednocení (), průnik (), rozdíl ( **-** ), symetrický rozdíl () množin,… (pracujeme s nimi v systémech množin).

**Vlastnosti binárních operací:**

Označení:

* ℕ - {1, 2, 3, 4, …} - množina všech přirozených čísel
* ℕ0 - {0, 1, 2, 3, 4, …} - množina všech přirozených čísel s nulou (množina všech nezáporných celých čísel)
* ℂ - {…, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …} - množina všech celých čísel
* ℚ - množina všech racionálních čísel (zlomky)
* ℝ - množina všech reálných čísel

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

*Definice 2:*Binární operace **○** v množině M, která má vlastnost, že je definována pro každou uspořádanou dvojici [*x,y*]  M x M, se nazývá operace **neomezeně definovaná** v množině M (zkráceně operace **definovaná** **na** množině M). Značíme **ND**.

 Symbolicky: $(∀ $*x, y*  M)($ ∃$ *z*  M)[ *x* ***○*** *y = z*].

*Příklad 2*:

* operace sčítání (**+**)…….v množině ℕ, ℂ, ℚ je **ND**
* operace odčítání (**-**)……v množině ℕ není **ND**

 v množině ℂ, ℚ, ℝ je **ND**

* operace násobení (**∙**)….. v množině ℕ, ℂ, ℚ je **ND**
* operace dělení (**:**)……. v množině ℕ, ℂ, ℚ, ℝ není **ND**

 v množině ℚ - {0}, ℝ - {0} je **ND**

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

*Definice 3:*Binární operace **○** definovaná na množině M (je ND), se nazývá **komutativní** právě tehdy, když platí:

 $(∀ $*x, y*  M)[ *x* ***○*** *y = y* ***○*** *x*].

Značíme **K**.

*Příklad 3*:

* operace sčítání (**+**)…….na množině ℕ, ℂ, ℚ je **K**
* operace odčítání (**-**)……na množině ℂ, ℚ, ℝ není **K**
* operace násobení (**∙**)….. na množině ℕ, ℂ, ℚ, ℝ je **K**
* operace dělení (**:**)…….. na množině ℚ - {0}, ℝ - {0} není **K**

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

*Definice 4:*Binární operace **○** definovaná na množině M, se nazývá **asociativní** právě tehdy, když platí:

 $(∀ $*x, y, z*  M)[ (*x* ***○*** *y*) **○** *z* = *x* **○** (*y* ***○*** *z*)].

Značíme **A**.

*Příklad 4*:

* operace sčítání (**+**)…….na množině ℕ, ℂ, ℚ je **A**
* operace odčítání (**-**)……na množině ℂ, ℚ, ℝ není **A**
* operace násobení (**∙**)….. na množině ℕ, ℂ, ℚ, ℝ je **A**
* operace dělení (**:**)…….. na množině ℚ - {0}, ℝ - {0} není **A**

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

*Definice 5:*Nechť v množině M je definována binární operace **○**. Existuje-li prvek *e*  M, pro který platí:

 $ (∀ $*x*  M)[ *x* ***○*** *e = e* ***○*** *x = x*].

Pak se prvek *e*  M nazývá **neutrálním prvkem** množiny M vzhledem k operaci **○.**

Značíme **EN**.

*Příklad* 5:

* operace sčítání (**+**)…….na množině ℕ nemá vlastnost **EN** (tj. neexistuje neutrální prvek v množině ℕ vzhledem ke sčítání)
* operace sčítání (**+**)…….na množině ℕ0, ℂ, ℚ, ℝ má vlastnost **EN** (tj. existuje neutrální prvek vzhledem ke sčítání ***e* = 0**: *x* +0 = 0 + *x* = *x*)
* operace odčítání (**-**)……v množině ℕ, ℂ, ℚ, ℝ nemá vlastnost **EN** (tj. neexistuje neutrální prvek vzhledem k odčítání)
* operace násobení (**∙**)….. na množině ℕ, ℂ, ℚ, ℝ má vlastnost **EN** (tj. existuje neutrální prvek vzhledem k násobení ***e* = 1**: *x* **∙** 1 = 1 **∙** *x* = *x*)
* operace dělení (**:**)……..v množině ℕ, ℂ, ℚ, ℝ nemá vlastnost **EN** (tj. neexistuje neutrální prvek vzhledem k dělení)

*Poznámka 3*. Je-li operace **○** komutativní, pak v zápisu vlastnosti **EN** lze vynechat jedna ze dvou stran rovnosti *x* ***○*** *e* nebo *e* ***○*** *x.*

*-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------*

*Definice 6:*Nechť v množině M je definována binární operace **○** a nechť *e* je neutrální prvek množiny M vzhledem k operaci **○**. Prvek *ā*  M nazýváme **inverzním prvkem** k prvku *a*  M v operaci **○** v množině M právě tehdy, když platí:

 *ā* ***○*** *a = a* ***○*** *ā = e.*

Jestliže $(∀ $*a*  M)($ ∃$ *ā*  M)[ *ā* ***○*** *a = a* ***○*** *ā = e*], řekneme, že ke každému prvku množiny M existuje prvek inverzní vzhledem k operaci **○**. Značíme **EI**.

*Příklad* 6:

* operace sčítání (**+**)…….na množině ℕ0 nemá vlastnost **EI**
* operace sčítání (**+**)…….na množině ℂ, ℚ, ℝ má vlastnost **EI** (tj. existuje inverzní prvek ke každému prvku z dané množiny vzhledem ke sčítání tak, aby platilo *ā* ***+*** *a* = *a* ***+*** *ā* = 0. Inverzní prvek k prvku *a* vzhledem ke sčítání se nazývá **prvek opačný** a značíme jej

***ā* = *- a***)

* operace odčítání (**-**)……v množině ℕ, ℂ, ℚ, ℝ nemá vlastnost **EI** (neboť nemá vlastnost **EN**)
* operace násobení (**∙**)….. na množině ℕ, ℂ, ℚ, ℝ nemá vlastnost **EI**
* operace násobení (**∙**)….. na množině ℚ - {0}, ℝ - {0} má vlastnost **EI** (tj. existuje inverzní prvek ke každému prvku z dané množiny vzhledem k násobení tak, aby platilo

*ā* **∙** *a* = *a* **∙** *ā* = 1. Inverzní prvek k prvku *a* vzhledem k násobení se nazývá **prvek převrácený** a značíme jej ***ā* =** $\frac{1}{a}$ **=** *a-1*.

* operace dělení (**:**)……..v množině ℕ, ℂ, ℚ, ℝ nemá vlastnost **EI** (neboť nemá vlastnost **EN**)

*Poznámka 4*. Je-li operace **○** komutativní, pak v zápisu vlastnosti **EI** lze vynechat jedna ze dvou stran rovnosti *ā* ***○*** *a = a* ***○*** *ā.*

*-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------*

*Definice 7:* Říkáme, že binární operace **○** definovaná na množině M má vlastnost **řešitelnost základních rovnic** právě tehdy, když platí:

 $(∀ $*a, b*  M) )($ ∃$ *x, y*  M)[ *a* ***○*** *x = b* ** *y* ***○*** *a = b*].

Značíme **ZR**.

*Poznámka 5*. Je-li operace **○** komutativní, pak v zápisu vlastnosti **ZR** lze vynechat jedna z výrokových forem *a* ***○*** *x = b* nebo *y ○ a = b.*

*Příklad* 7:

* operace sčítání (**+**)…….na množině ℕ, nemá vlastnost **ZR** (tj. rovnice *a + x = b* není pro všechny prvky množiny ℕ řešitelná)
* operace sčítání (**+**)…….na množině ℂ, ℚ, ℝ má vlastnost **ZR** (tj. rovnice *a + x = b* je pro všechny prvky uvažovaných množin řešitelná:  *x = b - a*)
* operace násobení (**∙**)….. na množině ℕ, ℂ, ℚ, ℝ nemá vlastnost **ZR** (tj. rovnice *a* **∙** *x = b* není pro všechny prvky uvažovaných množin řešitelná)
* operace násobení (**∙**)….. na množině ℚ - {0}, ℝ - {0} má vlastnost **ZR** (tj. rovnice *a* **∙** *x = b* je pro všechny prvky uvažovaných množin řešitelná: *x =* $\frac{b}{a}$)

*Definice 8:*Nechť v množině M je definována binární operace **○**. Existuje-li prvek *g*  M, pro který platí:

 $(∀ $*x*  M)[ *x* ***○*** *g = g* ***○*** *x = g*].

Pak se prvek *g*  M nazývá **agresivním** prvkem množiny M vzhledem k operaci **○**.

*Příklad* 8:

* pro operaci sčítání (**+**) na množině ℕ, ℂ, ℚ neexistuje agresivní prvek.
* pro operaci násobení (**∙**) na množině ℂ, ℚ, ℝ existuje agresivní prvek: ***g* = 0**: *x* **∙** 0 = 0 **∙** *x* = 0.

*-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------*

**Určení vlastností binárních operací podle tvaru operační tabulky**

Uvažujme binární operaci **○** v množině M zapsané pomocí operační tabulky, viz příklad:

*Příklad* 9: Je dána množina M = {a, b, c} a operace **○** v množině M daná tabulkou. Určete vlastnosti operace **○**.Pokud existuje neutrální nebo agresivní prvek, určete je. K jednotlivým prvkům stanovte prvky inverzní, pokud existují.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  **○** |  a |  b |  c |
|  a |  b |  c |  a |
|  b |  c |  c |  b |
|  c |  a |  b |  c |

 Vysvětlivky k tabulce: a **○** a = b

 b **○** c = b

 c **○** a = a

 Řešení: **ND ** K ** A ** EN ** EI ** ZR**

Pravidla pro určování vlastností operace v množině dané tabulkou:

**ND**: Tabulka je celá vyplněná prvky množiny M

**K**: Prvky tabulky, která je celá vyplněná prvky množiny M, jsou souměrně rozloženy podle

 hlavní diagonály

**A**: Z tabulky obvykle nepoznáme - určujeme z definice nebo ze vztahu **A  (ZR EI)**

**EN**: Alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky

**EI**: Každý řádek i sloupec tabulky obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a

 sloupcích existují takové, že jsou souměrně rozloženy podle hlavní diagonály.

**ZR**: Každý řádek i sloupec obsahuje všechny prvky množiny M

**Agresivní prvek** *g*  M poznáme tak, že v celém jemu příslušejícím řádku i sloupci se vyskytuje pouze prvek *g*.

**Problém asociativity operace ○**

Vyjdeme ze vztahu **A  (ZR EI):**

1. Pokud nastane situace, že **EI ** ZR** nebo **EI ** ZR**, pak platí, že operace **○** není asociativní, tj. **A**
2. Pokud nastane situace, že **EI ** ZR** nebo **EI ** ZR**, pak asociativitu operace **○** nelze určit přímo, ale je potřeba využít *Definici 4* ověřením všech možných trojic prvků z dané množiny (zdlouhavé)

**Algebraické struktury s jednou operací**

*Definice 9:*Uspořádaná dvojice (M, ○), kde M je neprázdná množina, ve které je definována binární operace ○, se nazývá **algebraická struktura s jednou operací.**

*Příklad* 9: Příklad algebraických struktur: (ℕ, +), (ℂ, -), (ℚ - {0}, :), (ℝ, **∙**); (M, ○), kde množina M = {a, b, c} a operace ○ jsou z *Příkladu 9, 10*.

*Definice 10:*

1. Algebraická struktura (M, ○) se nazývá **grupoid** právě tehdy, když operace ○ je neomezeně definovaná v množině M (ND).
2. Grupoid (M, ○), jehož operace ○ je asociativní, se nazývá **pologrupa** (ND, A).
3. Pologrupa (M, ○) taková, že v M existuje neutrální prvek vzhledem k operaci (M, ○) a ke každému prvku *a*  M existuje prvek inverzní *ā*  M, se nazývá **grupa** (ND, A, EN, EI).

*Poznámka 6*. Jestliže v případech I., II., III. je operace **○** komutativní, pak hovoříme o

1. Komutativním grupoidu
2. Komutativní pologrupě
3. Komutativní grupě

Schéma k *Definici 10*:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Vlastnost operace ○** | **Algebraická struktura** |
|  | ND | Grupoid |
|  | ND K | Komutativní grupoid |
|  (M, ○) | ND A | Pologrupa |
|  | ND A  K | Komutativní pologrupa |
|  | ND A  EN  EI  | Grupa |
|  | ND A  EN  EI  K | Komutativní grupa |

**Příklady algebraických struktur s jednou operací**

1. (ℕ, +) … komutativní pologrupa

 sčítání … ND **  K ** A ** EN **  EI **  ZR

 rovnice *a + x = b* není pro libovolné *a, b*  ℕ řešitelná

2. (ℕ0, +) … komutativní pologrupa s neutrálním prvkem *e* = 0

 sčítání … ND **  K ** A ** EN **  EI **  ZR

3. (ℕ0, -) … není ani grupoid

 odčítání …ND **  K ** A ** EN **  EI **  ZR

 hledáme neutrální prvek, pro který platí: *a – e = e – a = a*

 *a – e = a  e – a = a*

 *e = 0  e = 2a* (vlastnost EN není splněna)

4. (ℕ0, ∙) … komutativní pologrupa s neutrálním prvkem *e* = 1

 násobení …ND **  K ** A ** EN **  EI **  ZR

5. (ℕ0, : ) …není ani grupoid

 dělení… ND **  K ** A ** EN **  EI **  ZR

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

6. (ℂ, +) … komutativní grupa s neutrálním prvkem *e* = 0 s vlastností ZR

 sčítání…ND **  K ** A ** EN **  EI **  ZR

 ***ā* = *- a***

 rovnice *a + x = b* je pro libovolné *a, b*  ℂ vždy řešitelná

7. (ℂ, -) … grupoid s vlasností ZR

 odčítání …ND **  K ** A ** EN **  EI **  ZR

operace odčítání není K*: a - x = b  y - a = b*

 *x = a – b  y = b + a*

 *a – b*  ℂ ** *b + a*  ℂ, tj. obě rovnice jsou pro lib. *a, b*  ℂ vždy řešitelné

8. (ℂ, ∙) … komutativní pologrupa s neutrálním prvkem *e* = 1

 násobení …ND **  K ** A ** EN **  EI **  ZR

 rovnice *a* ∙ *x = b* není pro libovolné *a, b*  ℂ řešitelná

9. (ℂ, : ) …není ani grupoid

 dělení… ND **  K ** A ** EN **  EI **  ZR

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

10. (ℚ, +), (ℝ, +) … komutativní grupy s neutrálním prvkem *e* = 0 a vlastností ZR

 sčítání…ND **  K ** A ** EN **  EI **  ZR

 ***ā* = *- a***

 rovnice *a + x = b* je pro libovolné *a, b*  ℚ, ℝ vždy řešitelná

11. (ℚ, -), (ℝ, -)… grupoid s vlasností ZR

 odčítání …ND **  K ** A ** EN **  EI **  ZR

12. (ℚ, ∙), (ℝ, ∙)… komutativní pologrupy s neutrálním prvkem *e* = 1

 násobení …ND **  K ** A ** EN **  EI **  ZR

 EI: *ā* **∙** *a* = 1

 ***ā* =** $\frac{1}{a}$

 pro *a* = 0 však neexistuje *ā,* neboťčíslo$\frac{1}{0}$není definováno

 ZR: *a* ∙ *x = b*

 *x =* $\frac{b}{a}$

pro *a* = 0 * b* ≠ 0 však neexistuje x  ℚ, ℝ tak, aby platilo *0* ∙ *x = b*.

13. (ℚ, :), (ℝ, :)… není ani grupoid

 dělení… ND **  K ** A ** EN **  EI **  ZR

14. (ℚ - {0}, ∙), (ℝ - {0}, ∙) … komutativní grupa s neutrálním prvkem *e* = 1 a vlastností ZR

 násobení…ND **  K ** A ** EN **  EI **  ZR

 ***ā* =** $\frac{1}{a}$

rovnice *a* ∙ *x = b* je pro libovolné *a, b*  ℚ - {0}, ℝ - {0} vždy řešitelná

*Příklad* 10: Je dána množina M = {a, b, c} a operace **○** v množině M daná tabulkou. Určete vlastnosti operace **○**.Pokud existuje neutrální nebo agresivní prvek, určete je. K jednotlivým prvkům stanovte prvky inverzní, pokud existují. Určete typ algebraické struktury (M, ○).

1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  **○** |  a |  b |  c |
|  a |  b |  a |  c |
|  b |  c |  b |  a |
|  c |  a |  c |  b |

2.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  **○** |  a |  b |  c |
|  a |  c |  a |  a |
|  b |  a |  c |  b |
|  c |  a |  b |  c |

3.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  **○** |  a |  b |  c |
|  a |  c |  a |  a |
|  b |   |  c |  b |
|  c |  a |  b |  c |

4.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  **○** |  a |  b |  c |
|  a |  a |  a |  a |
|  b |  a  |  a |  a |
|  c |  a |  a |  a |

*Příklad* 11: Určete vlastnosti operace dané předpisem

**○** = {[[*a,b*],*c*]  ℂ2 x ℂ: *c = a + b - 2* }